УДК 517.977.5 + 517.923 + 517.928.2

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. А. Курина, Т. Х. Нгуен

Воронежская государственная лесотехническая академия

Поступила в редакцию 16 августа 2010 г.

Аннотация: используя вид оптимального управления в форме обратной связи, построена асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи с разрывными коэффициентами. Получены оценки близости асимптотического решения к точному. Рассмотрен иллюстративный пример.
Ключевые слова: линейно-квадратичные задачи оптимального управления, сингулярные возмущения, разрывные коэффициенты, уравнение Риккати, обратная связь, асимптотические разложения.

Abstract: the paper deals with constructing asymptotic solution for singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients, using a feedback optimal control. The estimates of the proximity of asymptotic solution to the exact one are obtained and an illustrative example is given.
Key words: linear-quadratic optimal control problems, singular perturbations, discontinuous coefficients, Riccati equation, feedback control, asymptotic expansions.

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическое решение сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи управления без ограничений на управление может быть получено тремя способами. Первый способ использует асимптотику решения краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Второй способ основан на непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотического разложения. А третий способ использует вид оптимального управления в форме обратной связи и асимптотику решения матричного дифференциального уравнения Риккати, с помощью которого строится оптимальное управление в форме обратной связи. При этом нет необходимости решать двухточечные краевые задачи. Разные подходы к построению асимптотического разложения решений сингулярно возмущенных задач управления обсуждаются в обзорах [1, 2].

В настоящей работе, используя третий подход, для сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с разрывными в промежуточной точке коэффициентами и без ограничений на управление построена асимптотика решения, содержащая функции погранслоя четырёх типов, доказаны оценки близости по управлению, траектории и функционалу приближенного асимптотического решения к точному, приведён иллюстративный пример.

Отметим, что ранее оптимальное управление в форме обратной связи для сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач исследовалось только в случае непрерывных коэффициентов. При наших условиях на внеинтегральный член в критерии качества поведение при стремлении малого параметра к нулю решения задачи Коши для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати, возникающего при построении оптимального управления в форме обратной связи, изучалось в [3]. Общая форма внеинтегрального члена приводит к более сложной зависимости от малого параметра решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения Риккати (см., например, 4]).

* Работа первого автора была поддержана РФФИ (код проекта 08-06-00302) и The Wenner Gren Foundation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача P_ε, заключающаяся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left\langle \overset{(2)}{z}(T,\varepsilon), \mathbb{F}(\varepsilon)\overset{(2)}{z}(T,\varepsilon)\right\rangle + \\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \overset{(j)}{z}(t,\varepsilon), \overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon)\right\rangle + \\ +\left\langle \overset{(j)}{u}(t,\varepsilon), \overset{(j)}{\mathbb{R}}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon)\right\rangle\right\}dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\mathbb{E}(\varepsilon)\overset{(j)}{\dot{z}}(t,\varepsilon) = \\ = \overset{(j)}{\mathbb{A}}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon) + \overset{(j)}{\mathbb{B}}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon), \\ t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2, \tag{2}$$

$$\overset{(1)}{z}(0,\varepsilon) = z^0,\quad \overset{(1)}{z}(t_1,\varepsilon) = \overset{(2)}{z}(t_1,\varepsilon). \tag{3}$$

Здесь угловые скобки означают скалярное произведение в соответствующих пространствах, $t \in [0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения $t_j (j = 0,1,2)$ фиксированы; точка сверху означает производную по t; $z = (x', y')'$; штрих означает транспонирование, $\overset{(j)}{x}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $\overset{(j)}{y}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, $\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$; $\varepsilon \ge 0$ — малый параметр; $E(\varepsilon) = diag(I, \varepsilon I)$, I — единичный оператор; $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{W}_1(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon) \\ \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon)' & \overset{(j)}{W}_3(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$,

$\overset{(j)}{\mathbb{A}}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{A}_1(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{A}_2(t,\varepsilon) \\ \overset{(j)}{A}_3(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{A}_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, $\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{B}_1(t,\varepsilon) \\ \overset{(j)}{B}_2(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$,

операторы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,\varepsilon)$ и $\overset{(j)}{\mathbb{R}}(t,\varepsilon)$ симметрические, кроме того, $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,0) > 0$ и $\overset{(j)}{\mathbb{R}}(t,0) > 0$ при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, операторы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{\mathbb{A}}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{\mathbb{B}}(t,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$, и $\varepsilon \ge 0$. Оператор $\mathbb{F}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1(\varepsilon) & \varepsilon F_2(\varepsilon) \\ \varepsilon F_2(\varepsilon)' & \varepsilon F_3(\varepsilon)\end{pmatrix}$ не зависит от t, он является симметрическим и достаточно гладким по ε, $\mathbb{F}(\varepsilon) \ge 0$.

Для краткости аргумент t и параметр ε будут часто опускаться.

В качестве допустимых управлений $u(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{u}(t,\varepsilon), t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{u}(t,\varepsilon), t \in [t_1, t_2] \end{cases}$ выбираются кусочно-непрерывные функции. При этом для $\varepsilon > 0$ рассматриваются непрерывные соответствующие траектории

$$x(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{x}(t,\varepsilon),\ t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{x}(t,\varepsilon),\ t \in [t_1, t_2], \end{cases} \\ y(t,\varepsilon) = \begin{cases} \overset{(1)}{y}(t,\varepsilon),\ t \in [t_0, t_1], \\ \overset{(2)}{y}(t,\varepsilon),\ t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

— решение задачи (2) — (3).

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ траектория $y(t,\varepsilon)$ будет иметь разрыв при $t = t_1$.

Предположим, что выполнено одно из следующих двух условий:

1^0. Пары $(\overset{(j)}{A}_4(t,0), \overset{(j)}{B}_2(t,0))$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$, полностью управляемы.

2^0. $\overset{(j)}{B}_2(t,0) = 0$, матрицы $\overset{(j)}{A}_4(t,0)$ устойчивы, $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$.

Используя второй способ построения асимптотики решения задач оптимального управления с параметром, названный в [5] прямой схемой, в [6] была построена асимптотика решения нулевого порядка для задачи вида (1) — (3) при $\mathbb{F}(\varepsilon) = 0$ и условии устойчивости матриц $\overset{(j)}{A}_4(t,0), j = 1,2$. Здесь будем использовать третий способ построения асимптотики.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Хорошо известен вид оптимального управления в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи с непрерывными коэффициентами (см., например, [7], стр. 205). Получим аналогичный результат в нашем случае, т.е. когда коэффициенты разрывны в одной точке t_1.

Теорема 1. *Пусть* $\overset{(j)}{\mathbb{K}}(\cdot,\varepsilon)$ *— решение задачи*

$$\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}} = -\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{\mathbb{A}} - \overset{(j)}{\mathbb{A}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}} + \overset{(j)}{\mathbb{K}}'\overset{(j)}{\mathbb{S}}\overset{(j)}{\mathbb{K}} - \overset{(j)}{\mathbb{W}},$$
$$\overset{(j)}{\mathbb{S}} = \overset{(j)}{\mathbb{B}}\overset{(j)}{R}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}',\ t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2, \qquad (4)$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(2)}{\mathbb{K}}(T,\varepsilon) = \mathbb{F}(\varepsilon),\ \ \overset{(1)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon) = \overset{(2)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon), \qquad (5)$$

$\overset{(j)}{z}_*(\cdot,\varepsilon)$ — *решение задачи*

$$\mathbb{E}\overset{(j)}{z}_* = \left(\overset{(j)}{\mathbb{A}} - \overset{(j)}{\mathbb{S}}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\right)\overset{(j)}{z}_*,$$
$$t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2, \qquad (6)$$

$$\overset{(1)}{z}_*(0,\varepsilon) = z^0, \overset{(2)}{z}_*(t_1,\varepsilon) = \overset{(1)}{z}_*(t_1,\varepsilon). \qquad (7)$$

Тогда функция $u_*(\cdot,\varepsilon)$, *составленная из функций*

$$\overset{(j)}{u}_* = -\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*,$$
$$t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1,2, \qquad (8)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *является оптимальным управлением для задачи* (1) — (3). *При этом оптимальная траектория* $z_*(\cdot,\varepsilon)$ *составлена из функций* $\overset{(j)}{z}_*(\cdot,\varepsilon)$, *и минимальное значение критерия качества* (1) *равно*

$$J_\varepsilon(u_*) = \frac{1}{2}\left\langle z^0, \mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(1)}{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)z^0\right\rangle. \qquad (9)$$

Доказательство. Отметим, что матрицы $\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}$, являются симметрическими, т. е.

$$\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}} = \overset{(j)}{\mathbb{K}}'\mathbb{E},\ j = 1,2. \qquad (10)$$

Действительно, из (4) в силу симметричности матриц $\overset{(j)}{\mathbb{R}}$, $\overset{(j)}{\mathbb{S}}$ и $\overset{(j)}{\mathbb{W}}$ получаем

$$(\mathbb{E}'\dot{\overset{(j)}{\mathbb{K}}})' = \mathbb{E}'\dot{\overset{(j)}{\mathbb{K}}}.$$

С учётом равенства (5) из последнего выражения следует (10).

Для произвольного допустимого управления $u(\cdot,\varepsilon)$, составленного из функций $\overset{(j)}{u}(\cdot,\varepsilon)$, и соответствующей траектории $z(\cdot,\varepsilon)$, составленной из функций $\overset{(j)}{z}(\cdot,\varepsilon)$, в силу (10) имеем

$$\frac{d}{dt}\left\langle \overset{(j)}{z}, \frac{1}{2}\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right\rangle = \left\langle \mathbb{E}\dot{\overset{(j)}{z}}, \frac{1}{2}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right\rangle +$$
$$+\left\langle \overset{(j)}{z}, \frac{1}{2}\mathbb{E}'\dot{\overset{(j)}{\mathbb{K}}}\overset{(j)}{z} + \frac{1}{2}\overset{(j)}{\mathbb{K}}'\mathbb{E}\dot{\overset{(j)}{z}}\right\rangle,$$
$$t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2.$$

Используя соотношения (2), (4), после несложных преобразований получаем

$$\frac{d}{dt}\left\langle \overset{(j)}{z}, \frac{1}{2}\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right\rangle =$$
$$= -\frac{1}{2}\left\langle \overset{(j)}{z}, \overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \overset{(j)}{u}, \overset{(j)}{\mathbb{R}}\overset{(j)}{u}\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle \overset{(j)}{u} + \overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}, \overset{(j)}{R}\left(\overset{(j)}{u} + \overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right)\right\rangle.$$

Отсюда следует равенство

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left\langle \overset{(2)}{z}(T,\varepsilon), \mathbb{F}(\varepsilon)\overset{(2)}{z}(T,\varepsilon)\right\rangle -$$
$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{d}{dt}\left\langle \overset{(j)}{z}, \frac{1}{2}\mathbb{E}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right\rangle dt + G(u,z),$$

где

$$G(u,z) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\langle \overset{(j)}{u} + \overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}, R\times\right.$$
$$\left.\times\left(\overset{(j)}{u} + \overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{\mathbb{B}}'\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}\right)\right\rangle dt.$$

В силу положительной определенности $\overset{(j)}{\mathbb{R}}(t)$ легко видеть, при достаточно малых $\varepsilon > 0$что величина $G(u,z)$ неотрицательна и равна нулю при $\overset{(j)}{u} = \overset{(j)}{u}_*$, $\overset{(j)}{z} = \overset{(j)}{z}_*$, т. е. $G(\overset{(j)}{u}_*, \overset{(j)}{z}_*) = 0$.

Далее, используя равенства (3), (5), имеем

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left\langle \overset{(2)}{z}(T,\varepsilon), \mathbb{F}(\varepsilon)\overset{(2)}{z}(T,\varepsilon)\right\rangle -$$
$$-\left\langle \overset{(1)}{z}(t_1,\varepsilon), \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(1)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon)\overset{(1)}{z}(t_1,\varepsilon)\right\rangle +$$
$$+\left\langle z^0, \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(1)}{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)z^0\right\rangle -$$
$$-\left\langle \overset{(2)}{z}(T,\varepsilon), \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(2)}{\mathbb{K}}(T,\varepsilon)\overset{(2)}{z}(T,\varepsilon)\right\rangle +$$
$$+\left\langle \overset{(2)}{z}(t_1,\varepsilon), \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(2)}{\mathbb{K}}(t_1,\varepsilon)\overset{(2)}{z}(t_1,\varepsilon)\right\rangle + G(u,z) =$$
$$= \left\langle z^0, \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(1)}{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)z^0\right\rangle + G(u,z).$$

Следовательно,

$$J_\varepsilon(u) \geq \frac{1}{2}\left\langle z^0, \mathbb{E}(\varepsilon)'\overset{(1)}{\mathbb{K}}(0,\varepsilon)z^0\right\rangle = J_\varepsilon(u_*).$$

Значит, $\overset{(j)}{u}_*(\cdot,\varepsilon)$ является оптимальным управлением, и минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле (9). Теорема доказана. ■

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ

Следуя [8], будем искать асимптотические разложения решений задач (4), (5) и (6), (7) в виде рядов по целым неотрицательным степеням ε

$$\overset{(j)}{\mathbb{K}}(t,\varepsilon)=\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k\left(\overset{(j)}{\overline{\mathbb{K}}}_k(t)+\overset{(j)}{Q}_k\,\mathbb{K}(\tau_j)\right), \qquad (11)$$

$$\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon)=\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k\left(\overset{(j)}{\overline{z}}_k(t)+\overset{(j)}{\Pi}_k\,z(\tau_{j-1})+\overset{(j)}{Q}_k\,z(\tau_j)\right), \qquad (12)$$

где символ $\overset{(j)}{\Pi}, j=1,2,$ означает функции погранслоя экспоненциального типа вблизи левых концов промежутков $[0,t_1]$ и $[t_1,T]$, а $\overset{(j)}{Q}, j=1,2,$ — функции погранслоя экспоненциального типа вблизи правых концов этих же промежутков, $\tau_0=\dfrac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1=\dfrac{t-t_1}{\varepsilon}$, $\tau_2=\dfrac{t-T}{\varepsilon}$.

Тогда $\overset{(j)}{u}_*(\cdot,\varepsilon)$ из (8) представится в виде

$$\overset{(j)}{u}_*(t,\varepsilon)=\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k\left(\overset{(j)}{\overline{u}}_k(t)+\overset{(j)}{\Pi}_k\,u(\tau_{j-1})+\overset{(j)}{Q}_k\,u(\tau_j)\right). \qquad (13)$$

Матричные коэффициенты в (4)—(6) разложим в ряды по целым неотрицательным степеням ε. Коэффициент при ε^k в разложении некоторой матрицы $D(t,\varepsilon)$ по степеням ε будем обозначать через $D_k(t)$.

Для разложения произвольной функции $h=h(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε будем использовать следующее обозначение:

$$h(\varepsilon)=\sum_{i\ge 0}\varepsilon^i h_i=\{h\}_{n-1}+\varepsilon^n[h]_n+\alpha(\varepsilon^{n+1}),$$

где $[h]_n=h_n$, $\{h\}_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon^i h_i$, а $\alpha(\varepsilon^{n+1})$ означает сумму членов разложения порядка ε^{n+1} и выше.

Будем также применять обозначения

$$\tilde{\overline{v}}_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{i}\varepsilon^k\overline{v}_k(t),\ \widetilde{\Pi}_i v(\tau_{j-1},\varepsilon)=$$
$$=\sum_{k=0}^{i}\varepsilon^k\Pi_k v(\tau_{j-1}),\ \widetilde{Q}_i v(\tau_j,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{i}\varepsilon^k Q_k v(\tau_j).$$

Операторы $\overset{(j)}{\mathbb{K}}(t,\varepsilon)$ и $\overset{(j)}{\mathbb{S}}(t,\varepsilon)$ представим в блочном виде $\overset{(j)}{\mathbb{K}}=\begin{pmatrix}\overset{(j)}{K}_1 & \overset{(j)}{K}_2\\ \overset{(j)}{K}_3 & \overset{(j)}{K}_4\end{pmatrix}$, $\overset{(j)}{\mathbb{S}}=\begin{pmatrix}\overset{(j)}{S}_1 & \overset{(j)}{S}_2\\ \overset{(j)}{S'}_2 & \overset{(j)}{S}_3\end{pmatrix}$. В силу (10) имеем $\overset{(j)}{K'}_1=\overset{(j)}{K}_1$, $\overset{(j)}{K}_2=\varepsilon\overset{(j)}{K'}_3$, $\overset{(j)}{K'}_4=\overset{(j)}{K}_4$, $j=1,2$.

Запишем уравнения для блоков операторов $\overset{(j)}{\mathbb{K}}$

$$\begin{aligned}
\dot{\overset{(j)}{K}}_1 &= -\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{A}_1-\overset{(j)}{A'}_1\overset{(j)}{K}_1-\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{A}_3-\\
&-\overset{(j)}{A'}_3\overset{(j)}{K}_3+\overset{(j)}{K}_1\left(\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1+\overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\right)+\\
&+\overset{(j)}{K'}_3\left(\overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K}_1+\overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\right)-\overset{(j)}{W}_1,\\
\varepsilon\dot{\overset{(j)}{K'}}_3 &= -\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{A}_2-\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{A}_4-\varepsilon\overset{(j)}{A'}_1\overset{(j)}{K'}_3-\\
&-\overset{(j)}{A'}_3\overset{(j)}{K}_4+\overset{(j)}{K}_1\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K'}_3+\overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right)+\\
&+\overset{(j)}{K'}_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K'}_3+\overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right)-\overset{(j)}{W}_2,\\
\varepsilon\dot{\overset{(j)}{K}}_4 &= -\varepsilon\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{A}_2-\overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{A}_4-\varepsilon\overset{(j)}{A'}_2\overset{(j)}{K'}_3-\\
&-\overset{(j)}{A'}_4\overset{(j)}{K}_4+\varepsilon\overset{(j)}{K}_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K'}_3+\overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right)+\\
&+\overset{(j)}{K}_4\left(\varepsilon\overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K'}_3+\overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right)-\overset{(j)}{W}_3,
\end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{K}_1(T,\varepsilon)=F_1(\varepsilon),\ \overset{(2)}{K}_3(T,\varepsilon)'=F_2(\varepsilon),\ \overset{(2)}{K}_4(T,\varepsilon)=F_3(\varepsilon),\\
&\overset{(1)}{K}_1(t_1,\varepsilon)=\overset{(2)}{K}_1(t_1,\varepsilon),\overset{(1)}{K}_3(t_1,\varepsilon)'=\\
&=\overset{(2)}{K}_3(t_1,\varepsilon)',\overset{(1)}{K}_4(t_1,\varepsilon)=\overset{(2)}{K}_4(t_1,\varepsilon).
\end{aligned} \qquad (15)$$

Подставим разложение (11) в равенства (14), (15) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t, τ_0, τ_1, τ_2. Для нахождения членов регулярного ряда нулевого порядка из (11) получаем систему

$$\begin{aligned}
\dot{\overset{(j)}{\overline{K}}}_{10} &= -\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{A}_{10}-\overset{(j)}{A'}_{10}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}-\overset{(j)}{\overline{K'}}_{30}\overset{(j)}{A}_{30}-\\
&-\overset{(j)}{A'}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}+\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\left(\overset{(j)}{S}_{10}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}+\overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right)+\\
&+\overset{(j)}{\overline{K'}}_{30}\left(\overset{(j)}{S'}_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}+\overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right)-\overset{(j)}{W}_{10},\\
0 &= -\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{A}_{20}-\overset{(j)}{\overline{K'}}_{30}\left(\overset{(j)}{A}_{40}-\overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\right)-\\
&-\left(\overset{(j)}{A'}_{30}-\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{S}_{20}\right)\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}-\overset{(j)}{W}_{20},\\
0 &= -\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\overset{(j)}{A}_{40}-\overset{(j)}{A'}_{40}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}+\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}-\overset{(j)}{W}_{30},
\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\overset{(2)}{\overline{K}}_{10}(T)=F_1(0),\ \ \overset{(1)}{\overline{K}}_{10}\left(t_1\right)=\overset{(2)}{\overline{K}}_{10}\left(t_1\right), \qquad (17)$$

так как

$$\overset{(j)}{Q}_0 K_1\left(\tau_j\right)=0,\ j=1,2. \qquad (18)$$

Легко видеть, что система (16), (17) получается из (14) при $\varepsilon=0$.

Если выполнено условие 1^0, то в силу положительной определенности операторов $\overset{(j)}{W}_{30}(t),\ \ t\in[t_{j-1},t_j],\ \ j=1,2,$ третье уравнение системы (16), которое является стандартным матричным алгебраическим уравнением Риккати, имеет единственное симметричное положительно определённое решение для всех $t\in[t_{j-1},t_j],\ \ j=1,2,$ и при этом оператор $\overset{(j)}{A}_{40}(t)-\overset{(j)}{S}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}(t),\ \ t\in[t_{j-1},t_j],\ \ j=1,2,$ устойчивый (см., например, [7], стр. 216).

Если же выполнено условие 2^0, то $\overset{(j)}{S}_{30}=0$, $j=1,2$, и третье уравнение системы (16) является алгебраическим матричным уравнением Ляпунова. В силу устойчивости $\overset{(j)}{A}_{40}$ и положительной определенности $\overset{(j)}{W}_{30}$ оно имеет единственное симметричное положительно определенное решение для всех $t\in\left[t_{j-1},t_j\right]$: $\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}=\int_0^{+\infty}e^{\overset{(j)}{A}_{40}{}'s}\,\overset{(j)}{W}_{30}\,e^{\overset{(j)}{A}_{40}s}ds,\ \ j=1,2$ (см., например [9], стр. 146).

Поэтому из второго уравнения системы (16) можно однозначно выразить $\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}(t)$ через $\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}(t)$.

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы (16). Получим стандартное матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\dot{\overset{(j)}{\overline{K}}}_{10}=-\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{\mathcal{D}}_1-\overset{(j)}{\mathcal{D}}{}_1'\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}+\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{\mathcal{D}}_2\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}-\overset{(j)}{\mathcal{D}}_3.$$

Неотрицательная определённость $\overset{(j)}{\mathcal{D}}_2,\overset{(j)}{\mathcal{D}}_3$ доказывается аналогично [3].

Уравнения для $\overset{(j)}{K}_{10}$ при условиях (17) однозначно разрешимы (см., например, [7], стр. 206).

Из (14), (15) для нахождения функций погранслоя нулевого порядка, входящих в разложение (11) для $\overset{(j)}{K}_4(\cdot,\varepsilon)$ и $\overset{(j)}{K}_3(\cdot,\varepsilon)$, получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overset{(j)}{Q}_0 K_4}{d\tau_j}=-\overset{(j)}{Q}_0 K_4\Bigg(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\\
&-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\left(t_j\right)\Bigg)-\Bigg(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\\
&-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\left(t_j\right)\Bigg)'\overset{(j)}{Q}_0 K_4+\\
&+\overset{(j)}{Q}_0 K_4\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4,
\end{aligned} \qquad (19)$$

$$\tau_j\le 0,\ j=1,2,$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 K_4(0)=\overset{(2)}{\overline{K}}_{40}\left(t_1\right)-\overset{(1)}{\overline{K}}_{40}\left(t_1\right),$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 K_4(0)=F_3(0)-\overset{(2)}{\overline{K}}_{40}(T),$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overset{(j)}{Q}_0 K_3'}{d\tau_j}=-\overset{(j)}{Q}_0 K_3'\Bigg(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\\
&-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\left(t_j\right)\Bigg)+\overset{(j)}{Q}_0 K_3'\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4-\\
&-\Bigg(\overset{(j)}{A}_{30}\left(t_j\right)'-\overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\left(t_j\right)\overset{(j)}{S}_{20}\left(t_j\right)-\\
&-\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\left(t_j\right)'\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\Bigg)\overset{(j)}{Q}_0 K_4,
\end{aligned}$$

$$\tau_j\le 0,\ j=1,2, \qquad (20)$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 K_3(0)=\overset{(2)}{\overline{K}}_{30}\left(t_1\right)-\overset{(1)}{\overline{K}}_{30}\left(t_1\right),$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 K_3(0)=F_2(0)'-\overset{(2)}{\overline{K}}_{30}(T).$$

Уравнения (19) являются стандартными в теории оптимального управления операторными дифференциальными уравнениями Риккати, но операторы $F_3(0)-\overset{(2)}{\overline{K}}_{40}(T)$ и $\overset{(2)}{\overline{K}}_{40}(t_1)-\overset{(1)}{\overline{K}}_{40}(t_1)$ не обязательно неотрицательно определённые. Поэтому, чтобы установить разрешимость задач (19), аналогично [10] сделаем замены

$$Y_j\left(\tau_j\right)=\overset{(j)}{Q}_0 K_4\left(\tau_j\right)+\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\left(t_j\right),$$
$$j=1,2.$$

Тогда $Y_j(0)$ неотрицательно определены, а уравнения для $Y_j(\cdot),\ \ j=1,2,$ в силу (19), (16) имеют вид

$$\frac{dY_j}{d\tau_j} = -Y_j \overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right) - \overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)' Y_j + Y_j \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right) Y_j - \overset{(j)}{W}_{30}\left(t_j\right),$$

т. е. уравнения для Y_j, $j = 1,2$, являются стандартными в теории оптимального управления операторными дифференциальными уравнениями Риккати. Значит, задачи (19) однозначно разрешимы.

Уравнения (20) являются линейными относительно $\overset{(j)}{Q}_0 K_3$, поэтому для задачи (20) существует единственное решение $\overset{(j)}{Q}_0 K_3\left(\tau_j\right)$, $j = 1,2$, которое является функцией погранслоя экспоненциального типа.

Для коэффициентов в разложении (11) при ε^n $(n \geq 1)$, зависящих от t, получим из (14), (15) серию однозначно разрешимых задач

$$\begin{gathered}
\dot{\overset{(j)}{\overline{K}}}_{1n}(t_1) = -\overset{(j)}{\overline{K}}_{1n}\left(\overset{(j)}{A}_{10} - \overset{(j)}{S}_{10}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10} - \overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right) - \\
-\left(\overset{(j)}{A}_{10} - \overset{(j)}{S}_{10}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10} - \overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right)'\overset{(j)}{\overline{K}}_{1n} - \\
\overset{(j)}{\overline{K}}{}'_{3n}\left(\overset{(j)}{A}_{30} - \overset{(j)}{S}{}'_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right) - \\
-\left(\overset{(j)}{A}_{30} - \overset{(j)}{S}{}'_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{10} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{30}\right)'\overset{(j)}{\overline{K}}_{3n} - \\
-\Bigg[\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)}\left(\overset{(j)}{A}_1 - \overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)} - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{3(n-1)}\right) + \\
+\left(\overset{(j)}{A}{}'_1 - \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)} - \overset{(j)}{S}{}'_2\right)\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)} + \\
+\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\left(\overset{(j)}{A}_3 - \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{3(n-1)}\right) + \overset{(j)}{A}{}'_3\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{3(n-1)} + \overset{(j)}{W}_1\Bigg]_n,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\overset{(j)}{\overline{K}}}{}'_{3(n-1)} = -\overset{(j)}{\overline{K}}_{1n}\left(\overset{(j)}{A}_{20} - \overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\right) - \\
-\overset{(j)}{\overline{K}}{}'_{3n}\left(\overset{(j)}{A}_{40} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\right) - \\
-\left(\overset{(j)}{A}{}'_{30} - \overset{(j)}{\overline{K}}_{10}\overset{(j)}{S}_{20} - \overset{(j)}{\overline{K}}{}'_{30}\overset{(j)}{S}_{30}\right)\overset{(j)}{\overline{K}}_{4n} - \\
-\Bigg[\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)}\overset{(j)}{A}_2 + \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\overset{(j)}{A}_4 + \\
+\left(\overset{(j)}{A}{}'_3 - \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)}\overset{(j)}{S}_2 - \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\overset{(j)}{S}_3\right)\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)} + \\
+\overset{(j)}{W}_2\Bigg]_n - \Bigg[\Bigg(\overset{(j)}{A}{}'_1 - \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{1(n-1)}\overset{(j)}{S}_1 - \\
-\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\overset{(j)}{S}{}'_2\Bigg)\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\Bigg]_{n-1},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\overset{(j)}{\overline{K}}}{}'_{4(n-1)} = -\overset{(j)}{\overline{K}}_{4n}\left(\overset{(j)}{A}_{40} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\right) - \\
-\left(\overset{(j)}{A}_{40} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\overline{K}}_{40}\right)'\overset{(j)}{\overline{K}}_{4n} - \\
-\Bigg[\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)}\overset{(j)}{A}_4 + \left(\overset{(j)}{A}{}'_4 - \overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)}\overset{(j)}{S}_3\right)\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)} + \\
+\overset{(j)}{W}_3\Bigg]_n - \Bigg[\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{3(n-1)}\left(\overset{(j)}{A}_2 - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)}\right) + \\
+\left(\overset{(j)}{A}_2 - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{4(n-1)}\right)'\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-1)}\Bigg]_{n-1} + \\
+\left[\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}_{3(n-2)}\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{\widetilde{\widetilde{K}}}{}'_{3(n-2)}\right]_{n-2},
\end{gathered}$$

$$\overset{(2)}{\overline{K}}_{1n}(T) = F_{1n} - \overset{(2)}{Q}_n K_1(0),$$

$$\overset{(1)}{\overline{K}}_{1n}(t_1) = \overset{(2)}{\overline{K}}_{1n}(t_1) - \overset{(1)}{Q}_n K_1(0),$$

где $\overset{(j)}{Q}_n K_1\left(\tau_j\right)$, $j = 1,2$, определяются членами приближения меньшего, чем n, порядка (см. (21) ниже).

Введём обозначения

$$\begin{gathered}
\overset{(j)}{G}_1 = -\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{A}_1 - \overset{(j)}{A}{}'_1\overset{(j)}{K}_1 - \overset{(j)}{K}{}'_3\overset{(j)}{A}_3 - \\
-\overset{(j)}{A}{}'_3\overset{(j)}{K}_3 + \overset{(j)}{K}_1\left(\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{\bar{K}}_1 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\bar{K}}_3\right) + \\
+\overset{(j)}{\bar{K}}_1\left(\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\right) + \overset{(j)}{K}_1\left(\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\right) + \\
+\overset{(j)}{K}{}'_3\left(\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{\bar{K}}_1 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{\bar{K}}_3\right) + \overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3\left(\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}_1 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\right) + \\
+\overset{(j)}{K}{}'_3\left(\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}_1 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\overset{(j)}{G}_3 = -\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{A}_2 - \overset{(j)}{K}{}'_3\overset{(j)}{A}_4 - \varepsilon\overset{(j)}{A}{}'_1\overset{(j)}{K}{}'_3 - \\
-\overset{(j)}{A}{}'_3\overset{(j)}{K}_4 + \overset{(j)}{K}_1\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\bar{K}}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{\bar{K}}_1\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{K}_1\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{K}{}'_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{\bar{K}}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{K}{}'_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\overset{(j)}{G}_4 = -\varepsilon\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{A}_2 - \overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{A}_4 - \varepsilon\overset{(j)}{A}{}'_2\overset{(j)}{K}{}'_3 - \\
-\overset{(j)}{A}{}'_4\overset{(j)}{K}_4 + \varepsilon\overset{(j)}{K}_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{\bar{K}}_4\right) + \\
+\varepsilon\overset{(j)}{\bar{K}}_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right) + \\
+\varepsilon\overset{(j)}{K}_3\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right) + \overset{(j)}{K}_4\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{\bar{K}}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{\bar{K}}_4\right) + \\
+\overset{(j)}{\bar{K}}_4\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right) + \overset{(j)}{K}_4\left(\varepsilon\overset{(j)}{S}{}'_2\overset{(j)}{K}{}'_3 + \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right).
\end{gathered}$$

Коэффициенты в разложении (11) для $\overset{(j)}{K}_1(t,\varepsilon)$ при ε^n $(n\ge 1)$, зависящие от τ_1, τ_2, однозначно определяются из соотношений

$$\frac{d\overset{(j)}{Q}_n K_1}{d\tau_j}=\left[\overset{(j)}{\hat{Q}}_{n-1}G_1\right]_{n-1}, \qquad (21)$$
$$\overset{(j)}{Q}_n K_1(-\infty)=0,\ j=1,2,$$

где $\overset{(j)}{\hat{Q}}_{n-1}G_1$ являются значениями функций $\overset{(j)}{G}_1$ при $\overset{(j)}{K}_i=\overset{(j)}{\breve{Q}}_{n-1}K_i$, $\overset{(j)}{\bar{K}}_i=\overset{(j)}{\bar{\bar{K}}}_{i(n-1)}$, $i=1,3$, $t=t_j+\varepsilon\tau_j$.

Коэффициенты в разложении (11) для $\overset{(j)}{K}_4(t,\varepsilon)$ при ε^n $(n\ge 1)$, зависящие от τ_1, τ_2, однозначно определяются из соотношений

$$\frac{d\overset{(j)}{Q}_n K_4}{d\tau_j}=$$
$$=-\overset{(j)}{Q}_n K_4\left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\bar{K}}_{40}\left(t_j\right)\right)+$$
$$+\overset{(j)}{Q}_n K_4\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4-$$
$$-\left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\bar{K}}_{40}\left(t_j\right)\right)'\overset{(j)}{Q}_n K_4+$$
$$+\overset{(j)}{Q}_0 K_4\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_n K_4+\left[\overset{(j)}{\hat{Q}}_{n-1}G_4\right]_n,$$
$$\overset{(2)}{Q}_n K_4\left(0\right)=F_{3n}-\overset{(2)}{\bar{K}}_{4n}(T),$$
$$\overset{(1)}{Q}_n K_4\left(0\right)=\overset{(2)}{\bar{K}}_{4n}\left(t_1\right)-\overset{(1)}{\bar{K}}_{4n}\left(t_1\right),$$

где $\overset{(j)}{\hat{Q}}_{n-1}G_4$ являются значениями функций $\overset{(j)}{G}_4$ при $\overset{(j)}{K}_i=\overset{(j)}{\breve{Q}}_{n-1}K_i$, $\overset{(j)}{\bar{K}}_i=\overset{(j)}{\bar{\bar{K}}}_{in}$, $i=3,4$, $t=t_j+\varepsilon\tau_j$.

Коэффициенты в разложении (11) для $\overset{(j)}{K}_3(t,\varepsilon)$ при ε^n $(n\ge 1)$, зависящие от τ_1, τ_2, однозначно определяются из соотношений

$$\frac{d\overset{(j)}{Q}_n K_3'}{d\tau_j}=-\overset{(j)}{Q}_n K_3'\left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right)-\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{\bar{K}}_{40}\left(t_j\right)\right)+$$
$$+\overset{(j)}{Q}_n K_3'\overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4+\left[\overset{(j)}{\hat{Q}}_n G_3\right]_n,$$
$$\overset{(2)}{Q}_n K_3(0)'=F_{2n}-\overset{(2)}{\bar{K}}_{3n}(T),$$
$$\overset{(1)}{Q}_n K_3(0)=\overset{(2)}{\bar{K}}_{3n}\left(t_1\right)-\overset{(1)}{\bar{K}}_{3n}\left(t_1\right),$$

где $\overset{(j)}{\hat{Q}}_n G_3$ являются значениями функций $\overset{(j)}{G}_3$ при $\overset{(j)}{K}_i=\overset{(j)}{\breve{Q}}_n K_i$, $i=1,4$, $\overset{(j)}{K}_3=\overset{(j)}{\breve{Q}}_{n-1}K_3$, $\overset{(j)}{\bar{K}}_i=\overset{(j)}{\bar{\bar{K}}}_{in}$, $i=1,3,4$, $t=t_j+\varepsilon\tau_j$.

Перепишем равенства (6), (7) (переобозначаем $\overset{(j)}{z}_*=\overset{(j)}{z}$) в следующем виде:

$$\overset{(j)}{x}=\left(\overset{(j)}{A}_1-\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1-\overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\right)\overset{(j)}{x}+$$
$$+\left(\overset{(j)}{A}_2-\varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K'_3}-\overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\right)\overset{(j)}{y},$$
$$\varepsilon\overset{(j)}{y}=\left(\overset{(j)}{A}_3-\overset{(j)}{S'_2}\overset{(j)}{K}_1-\overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\right)\overset{(j)}{x}+ \qquad (22)$$
$$+\left(\overset{(j)}{A}_4-\varepsilon\overset{(j)}{S'_2}\overset{(j)}{K'_3}-\overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\right)\overset{(j)}{y},$$

$$\overset{(1)}{x}(0,\varepsilon)=x^0,\ \overset{(2)}{x}\left(t_1,\varepsilon\right)=\overset{(1)}{x}\left(t_1,\varepsilon\right),$$
$$\overset{(1)}{y}(0,\varepsilon)=y^0,\ \overset{(2)}{y}\left(t_1,\varepsilon\right)=\overset{(1)}{y}\left(t_1,\varepsilon\right), \qquad (23)$$

где $z^0=\left(x^{0\prime},y^{0\prime}\right)'$.

Подставляя разложения (11), (12) в равенства (22), (23) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t,τ_0,τ_1,τ_2, для нахождения коэффициентов ряда (12) при ε^0, зависящих от t, получаем однозначно разрешимую задачу

$$\overset{(j)}{\bar{x}}_0=\left(\overset{(j)}{A}_{10}-\overset{(j)}{S}_{10}\overset{(j)}{\bar{K}}_{10}-\overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\bar{K}}_{30}\right)\overset{(j)}{\bar{x}}_0+$$
$$+\left(\overset{(j)}{A}_{20}-\overset{(j)}{S}_{20}\overset{(j)}{\bar{K}}_{40}\right)\overset{(j)}{\bar{y}}_0,$$
$$0=\left(\overset{(j)}{A}_{30}-\overset{(j)}{S'}_{20}\overset{(j)}{\bar{K}}_{10}-\overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\bar{K}}_{30}\right)\overset{(j)}{\bar{x}}_0+ \qquad (24)$$
$$+\left(\overset{(j)}{A}_{40}-\overset{(j)}{S}_{30}\overset{(j)}{\bar{K}}_{40}\right)\overset{(j)}{\bar{y}}_0,$$
$$\overset{(1)}{\bar{x}}_0(0)=x^0,\ \overset{(2)}{\bar{x}}_0\left(t_1\right)=\overset{(1)}{\bar{x}}_0\left(t_1\right).$$

Здесь учли, что

$$\overset{(j)}{\Pi}_0 x\left(\tau_{j-1}\right)=0,\ \overset{(j)}{Q}_0 x\left(\tau_j\right)=0,\ j=1,2. \qquad (25)$$

Для нахождения остальных коэффициентов разложения (12) при ε^0, зависящих от τ_0,τ_1,τ_2, получаем задачу

$$\frac{d\,\overset{(j)}{\Pi_0}\, y}{d\tau_{j-1}} = \left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_{j-1}\right) - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_{j-1}\right)\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_{40}\left(t_{j-1}\right)\right)\overset{(j)}{\Pi}_0\, y,$$

$$\begin{gathered}\frac{d\,\overset{(j)}{Q_0}\, y}{d\tau_j} = \left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right) - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_{40}\left(t_j\right) -\right.\\ \left. - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4\right)\overset{(j)}{Q}_0\, y - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_3\, \overset{(j)}{\bar x}_0\left(t_j\right) - \\ - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0 K_4\, \overset{(j)}{\bar y}_0\left(t_j\right),\end{gathered} \qquad (26)$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0\, y(0) = y^0 - \overset{(1)}{\bar y}_0\left(0\right),$$

$$\overset{(j)}{Q}_0\, y(-\infty) = 0,$$

$$j = 1, 2,$$

$$\overset{(2)}{\Pi}_0\, y(0) = \overset{(1)}{\bar y}_0\left(t_1\right) + \overset{(1)}{Q}_0\, y(0) - \overset{(2)}{\bar y}_0\left(t_1\right).$$

Для определения коэффициентов разложения (12) при ε^n $(n \geq 1)$, зависящих от t, получаем задачу

$$\begin{gathered}\dot{\overset{(j)}{x}}_n = \left(\overset{(j)}{A}_{10} - \overset{(j)}{S}_{10}\overset{\underline{(j)}}{K}_{10} - \overset{(j)}{S}_{20}\overset{\underline{(j)}}{K}_{30}\right)\overset{(j)}{x}_n + \\ + \left(\overset{(j)}{A}_{20} - \overset{(j)}{S}_{20}\overset{\underline{(j)}}{K}_{40}\right)\overset{\underline{(j)}}{y}_n + \\ + \left[\left(\overset{(j)}{A}_1 - \overset{(j)}{S}_1\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{1n} - \overset{(j)}{S}_2\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{3n}\right)\overset{\underset{\sim}{(j)}}{x}_{n-1} + \right. \\ \left. + \left(\overset{(j)}{A}_2 - \overset{(j)}{S}_1\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{3(n-1)} - \overset{(j)}{S}_2\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{4n}\right)\overset{\underset{\sim}{(j)}}{y}_{n-1}\right]_n,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\dot{\overset{(j)}{y}}_{n-1} = \left(\overset{(j)}{A}_{30} - \overset{(j)}{S'}_{20}\overset{\underline{(j)}}{K}_{10} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{\underline{(j)}}{K}_{30}\right)\overset{(j)}{x}_n + \\ + \left(\overset{(j)}{A}_{40} - \overset{(j)}{S}_{30}\overset{\underline{(j)}}{K}_{40}\right)\overset{\underline{(j)}}{y}_n + \\ + \left[\left(\overset{(j)}{A}_3 - \overset{(j)}{S'}_2\overset{\underline{(j)}}{\tilde{\bar K}}_{1n} - \overset{(j)}{S}_3\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{3n}\right)\overset{\underset{\sim}{(j)}}{x}_{n-1} + \right. \\ \left. + \left(\overset{(j)}{A}_4 - \overset{(j)}{S'}_2\overset{\underline{(j)}}{\tilde{\bar K}}{}'_{3(n-1)} - \overset{(j)}{S}_3\overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{4n}\right)\overset{\underset{\sim}{(j)}}{y}_{n-1}\right]_n,\end{gathered}$$

$$\overset{\underline{(1)}}{x}_n(0) = -\overset{(1)}{\Pi}_n\, x(0),$$

$$\overset{\underline{(2)}}{x}_n\left(t_1\right) = \overset{\underline{(1)}}{x}_n\left(t_1\right) + \overset{(1)}{Q}_n\, x(0) - \overset{(2)}{\Pi}_n\, x(0).$$

Введём обозначения

$$\begin{gathered}\overset{(j)}{M}_1 = \overset{(j)}{A}_1\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S}_1\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_1\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{\bar x} - \overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{x} - \\ - \overset{(j)}{S}_2\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_3\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{\bar x} - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{x} + \\ \overset{(j)}{A}_2\overset{(j)}{y} - \varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{\underline{(j)}}{\bar K'}_3\overset{(j)}{y} - \varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{\bar y} - \varepsilon\overset{(j)}{S}_1\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{y} - \\ - \overset{(j)}{S}_2\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_4\overset{(j)}{y} - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{\bar y} - \overset{(j)}{S}_2\overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{y},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\overset{(j)}{M}_2 = \overset{(j)}{A}_3\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S'}_2\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_1\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{\bar x} - \overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K}_1\overset{(j)}{x} - \\ - \overset{(j)}{S}_3\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_3\overset{(j)}{x} - \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{\bar x} - \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_3\overset{(j)}{x} + \\ + \overset{(j)}{A}_4\overset{(j)}{y} - \varepsilon\overset{(j)}{S'}_2\overset{\underline{(j)}}{\bar K'}_3\overset{(j)}{y} - \varepsilon\overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{\bar y} - \varepsilon\overset{(j)}{S'}_2\overset{(j)}{K'}_3\overset{(j)}{y} - \\ - \overset{(j)}{S}_3\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_4\overset{(j)}{y} - \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{\bar y} - \overset{(j)}{S}_3\overset{(j)}{K}_4\overset{(j)}{y}.\end{gathered}$$

Для определения функций погранслоя в разложении (12) при ε^n для $\overset{(j)}{x}(\cdot, \varepsilon)$ получаем задачу

$$\frac{d\,\overset{(j)}{\Pi}_n\, x}{d\tau_{j-1}} = \left[\overset{(j)}{\hat\Pi}_{n-1} M_1\right]_{n-1}, \quad \frac{d\,\overset{(j)}{Q}_n\, x}{d\tau_j} = \left[\overset{(j)}{\hat Q}_{n-1} M_1\right]_{n-1},$$

$$\overset{(j)}{\Pi}_n\, x(+\infty) = 0, \quad \overset{(j)}{Q}_n\, x(-\infty) = 0,$$

$$j = 1, 2,$$

где $\overset{(j)}{\hat\Pi}_{n-1} M_1$, $\overset{(j)}{\hat Q}_{n-1} M_1$ являются значениями функций $\overset{(j)}{M}_1$ соответственно при $\overset{(j)}{z} = \overset{\underline{(j)}}{\Pi}_{n-1} z$, $\overset{\underline{(j)}}{z} = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{z}_{n-1}$, $\overset{(j)}{K}_i = 0$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{i(n-1)}$, $i = 1, 3, 4$, $t = t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}$ и $\overset{(j)}{z} = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{Q}_{n-1} z$, $\overset{\underline{(j)}}{z} = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{z}_{n-1}$, $\overset{(j)}{K}_i = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{Q}_{n-1} K_i$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\sim}{(j)}}{K}_{i(n-1)}$, $i = 1, 3, 4$, $t = t_j + \varepsilon\tau_j$.

А для определения функций погранслоя в разложении (12) при ε^n для $\overset{(j)}{y}(\cdot, \varepsilon)$ имеем задачу

$$\begin{gathered}\frac{d\,\overset{(j)}{\Pi}_n\, y}{d\tau_{j-1}} = \left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_{j-1}\right) - \right. \\ \left. - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_{j-1}\right)\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_{40}\left(t_{j-1}\right)\right)\overset{(j)}{\Pi}_n\, y + \left[\overset{(j)}{\hat\Pi}_n M_2\right]_n,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\,\overset{(j)}{Q}_n\, y}{d\tau_j} = \left(\overset{(j)}{A}_{40}\left(t_j\right) - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_{40}\left(t_j\right) - \right. \\ \left. - \overset{(j)}{S}_{30}\left(t_j\right)\overset{(j)}{Q}_0\overset{\underline{(j)}}{\bar K}_4\right)\overset{(j)}{Q}_n\, y + \left[\overset{(j)}{\hat Q}_n M_2\right]_n,\end{gathered}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_n\, y(0) = -\overset{(1)}{\bar y}_n\left(0\right),$$

$$\overset{(j)}{Q}_n\, y(-\infty) = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\overset{(2)}{\Pi}_n\, y(0) = \overset{(1)}{\bar y}_n\left(t_1\right) + \overset{(1)}{Q}_n\, y(0) - \overset{(2)}{\bar y}_n\left(t_1\right),$$

где $\overset{(j)}{\hat{\Pi}}_n M_2$, $\overset{(j)}{\hat{Q}}_n M_2$ являются значениями функций $\overset{(j)}{M}_2$ соответственно при $\overset{(j)}{x} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\Pi}_n x$, $\overset{(j)}{y} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\Pi}_{n-1} y$, $\overset{(j)}{\overline{z}} = \overset{(j)}{\tilde{\overline{z}}}_n$, $\overset{(j)}{K}_i = 0$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{\overline{K}}}_{in}$, $i = 1,3,4$, $t = t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}$ и $\overset{(j)}{x} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{Q}_n x$, $\overset{(j)}{y} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{Q}_{n-1} y$, $\overset{(j)}{\overline{z}} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{z}}_n$, $\overset{(j)}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{Q}_n K_i$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{\overline{K}}}_{in}$, $i = 1,3,4$, $t = t_j + \varepsilon\tau_j$.

Перепишем (8) в следующем виде (переобозначаем $\overset{(j)}{u}_* = \overset{(j)}{u}$, $\overset{(j)}{z}_* = \overset{(j)}{z}$, $z = (x', y')'$):

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{u} = -\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\Bigg[&\left(\overset{(j)}{B'_1}\overset{(j)}{K_1} + \overset{(j)}{B'_2}\overset{(j)}{K_3}\right)\overset{(j)}{x} + \\ &+\left(\varepsilon \overset{(j)}{B'_1}\overset{(j)}{K'_3} + \overset{(j)}{B'_2}\overset{(j)}{K_4}\right)\overset{(j)}{y}\Bigg]. \end{aligned} \tag{27}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{U} = &-\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{B'_1}\left(\overset{\underline{(j)}}{K}_1 \overset{(j)}{x} + \overset{(j)}{K_1}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{x} + \overset{(j)}{K_1}\overset{(j)}{x}\right) - \\ &-\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{B'_2}\left(\overset{\underline{(j)}}{K}_3 \overset{(j)}{x} + \overset{(j)}{K_3}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{x} + \overset{(j)}{K_3}\overset{(j)}{x}\right) - \\ &-\varepsilon\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{B'_1}\left(\overset{(j)}{\underline{K}'_3}\overset{(j)}{y} + \overset{(j)}{K'_3}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{y} + \overset{(j)}{K'_3}\overset{(j)}{y}\right) - \\ &-\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\overset{(j)}{B'_2}\left(\overset{\underline{(j)}}{K}_4 \overset{(j)}{y} + \overset{(j)}{K_4}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{y} + \overset{(j)}{K_4}\overset{(j)}{y}\right). \end{aligned}$$

Подставляя разложения (11) — (13) в выражение (27), находим коэффициенты в разложении (13) для оптимального управления:

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{\overline{u}}_0 = -\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}_0^{-1}\Bigg[&\left(\overset{(j)}{B'}_{10}\overset{(j)}{K}_{10} + \overset{(j)}{B'}_{20}\overset{(j)}{K}_{30}\right)\overset{(j)}{x}_0 + \\ &+\overset{(j)}{B'}_{20}\overset{(j)}{K}_{40}\overset{(j)}{y}_0\Bigg], \end{aligned}$$

$$\overset{(j)}{\Pi}_0 u = -\overset{(j)}{\mathbb{R}}_0\left(t_{j-1}\right)^{-1}\overset{(j)}{B}_{20}\left(t_{j-1}\right)'\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{K}}_{40}\left(t_{j-1}\right)\overset{(j)}{\Pi}_0 y, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{Q}_0 u = &-\overset{(j)}{R}_0\left(t_j\right)^{-1}\overset{(j)}{B}_{20}\left(t_j\right)'\left[\overset{(j)}{Q}_0 K_3\overset{(j)}{x}_0\left(t_j\right) + \right. \\ &\left.+\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{K}}_{40}(t_j)\overset{(j)}{Q}_0 y + \overset{(j)}{Q}_0 K_4\left(\overset{(j)}{\overline{y}}_0(t_j) + \overset{(j)}{Q}_0 y\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{\overline{u}}_n = &-\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}_0^{-1}\left[\left(\overset{(j)}{B'}_{10}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{K}}_{10} + \overset{(j)}{B'}_{20}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{K}}_{30}\right)\overset{(j)}{\overline{x}}_n + \right. \\ &\left.+\overset{(j)}{B'}_{20}\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{K}}_{40}\overset{(j)}{y}_n\right] - \Bigg[\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\Bigg(\left(\overset{(j)}{B'}_1\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\tilde{\overline{K}}}_{1n} + \overset{(j)}{B'}_2\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\tilde{\overline{K}}}_{3n}\right)\overset{(j)}{\tilde{\overline{x}}}_{n-1} + \\ &+\left(\overset{(j)}{B'}_1\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\tilde{\overline{K}}}_{3(n-1)} + \overset{(j)}{B'}_2\overset{\underset{\smile}{(j)}}{\tilde{\overline{K}}}_{4n}\right)\overset{(j)}{\tilde{\overline{y}}}_{n-1}\Bigg)\Bigg]_n, \end{aligned}$$

$$\overset{(j)}{\Pi}_0 u = \left[\overset{(j)}{\hat{\Pi}}_n U\right]_n,$$

$$\overset{(j)}{Q}_n u = \left[\overset{(j)}{\hat{Q}}_n U\right]_n,$$

где $\overset{(j)}{\hat{\Pi}}_n U$, $\overset{(j)}{\hat{Q}}_n U$ являются значениями функций $\overset{(j)}{U}$ соответственно при $\overset{(j)}{z} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\Pi}_n z$, $\overset{(j)}{\overline{z}} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{z}}_n$, $\overset{(j)}{K}_i = 0$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{\overline{K}}}_{in}$, $i = 1,3,4$, $t = t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}$ и $\overset{(j)}{z} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{Q}_n z$, $\overset{(j)}{\overline{z}} = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{z}}_n$, $\overset{(j)}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{Q}_n K_i$, $\overset{\underline{(j)}}{K}_i = \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\overline{\overline{K}}}_{in}$, $i = 1,3,4$, $t = t_j + \varepsilon\tau_j$.

Таким образом можно определить все коэффициенты разложений (11)—(13).

4. ОЦЕНКИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Предположим, что найдены члены разложений (11) — (13) до порядка n включительно. Введём обозначения

$$\overset{(j)}{v}_n(t,\varepsilon) = \overset{\underline{(j)}}{v}_n(t) + \overset{(j)}{\Pi}_n v(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_n v(\tau_j),$$

$$\overset{(j)}{\tilde{v}}_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \overset{(j)}{v}_k(t,\varepsilon),$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2,$$

где v означает $\mathbb{K}$, z или u.

Систему (14), (15) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \overset{(j)}{\dot{K}}_1 &= f(\overset{(j)}{K}_1, \overset{(j)}{K}_5, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \overset{(j)}{\dot{K}}_5 &= g(\overset{(j)}{K}_1, \overset{(j)}{K}_5, t, \varepsilon), \\ \overset{(2)}{K}_1(T,\varepsilon) &= F_1(\varepsilon), \\ \overset{(2)}{K}_5(T,\varepsilon) &= F_5(\varepsilon), \\ \overset{(1)}{K}_1(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{K}_1(t_1,\varepsilon), \\ \overset{(1)}{K}_5(t_1,\varepsilon) &= \overset{(2)}{K}_5(t_1,\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\overset{(j)}{K}_5 = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{K'_3} \\ \overset{(j)}{K_4} \end{pmatrix}$, $F_5 = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$, $f(\overset{(j)}{K}_1, \overset{(j)}{K}_5, t, \varepsilon)$ — правая часть первого равенства в (14), $g(\overset{(j)}{K}_1, \overset{(j)}{K}_5, t, \varepsilon)$ — правые части второго и третьего равенств в (14).

Применяя стандартные в теории сингулярных возмущений рассуждения при оценке остаточных членов асимптотики из [3, 8] сначала для $t \in [t_1, T]$, затем для $t \in [0, t_1]$, для остаточных членов $\Delta \overset{(j)}{\mathbb{K}}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{\mathbb{K}}(t,\varepsilon) - \overset{\underset{\smile}{(j)}}{\mathbb{K}}_n(t,\varepsilon)$ имеем оценки

$$\left\|\Delta \overset{(j)}{\mathbb{K}}\right\|_{C_{[t_{j-1},t_j]}} = O(\varepsilon^{n+1}),\ j=1,2. \qquad (29)$$

Аналогичным образом, рассматривая сначала $t\in[0,t_1]$, затем $t\in[t_1,T]$, для остаточных членов $\Delta \overset{(j)}{z}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{z}_*(t,\varepsilon) - \overset{(j)}{\tilde z}_n(t,\varepsilon)$ имеем оценки

$$\left\|\Delta \overset{(j)}{z}\right\|_{C_{[t_{j-1},t_j]}} = O(\varepsilon^{n+1}),\ j=1,2. \qquad (30)$$

Для остаточного члена $\Delta \overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{u}_*(t,\varepsilon) - \overset{(j)}{\tilde u}_n(t,\varepsilon)$ с учётом (8), (29), (30) имеем

$$\left\|\Delta \overset{(j)}{u}\right\|_{C_{[t_{j-1},t_j]}} = O(\varepsilon^{n+1}),\ j=1,2. \qquad (31)$$

Из (29) — (31) следует

Теорема 2. *Для решений задач* (4)—(5), (6)—(7) *и оптимального управления* (8) *можно построить асимптотические разложения в ряд по целым неотрицательным степеням* ε *вида* (11) — (13), *при этом остаточные члены* $\Delta\overset{(j)}{\mathbb{K}},\ \Delta\overset{(j)}{z},\ \Delta\overset{(j)}{u},\ j=1,2,$ *являются величинами порядка* ε^{n+1}.

Обозначим через $\overset{(j)}{\hat z}_n$ решение задачи (6), (7) при $\overset{(j)}{\mathbb{K}} = \overset{(j)}{\tilde{\mathbb{K}}}_n$, т. е.

$$\mathbb{E}\,\dot{\overset{(j)}{\hat z}}_n = \left(\overset{(j)}{\mathbb{A}} - \overset{(j)}{\mathbb{S}}\,\overset{(j)}{\widetilde{\mathbb{K}}}_n\right)\overset{(j)}{\hat z}_n,$$
$$\overset{(1)}{\hat z}_n(0,\varepsilon) = z^0,\ \overset{(2)}{\hat z}_n(t_1,\varepsilon) = \overset{(1)}{\hat z}_n(t_1,\varepsilon). \qquad (32)$$

Тогда из (6), (7) и (29) имеем

$$\mathbb{E}\frac{d(\overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*)}{dt} = \left(\overset{(j)}{\mathbb{A}}_0 - \overset{(j)}{\mathbb{S}}_0\,\overset{(j)}{\mathbb{K}}_0\right)(\overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*) +$$
$$+O(\varepsilon)(\overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad (33)$$
$$\overset{(1)}{\hat z}_n(0,\varepsilon) - \overset{(1)}{z}_*(0,\varepsilon) = 0,$$
$$\overset{(2)}{\hat z}_n(t_1,\varepsilon) - \overset{(2)}{z}_*(t_1,\varepsilon) = \overset{(1)}{\hat z}_n(t_1,\varepsilon) - \overset{(1)}{z}_*(t_1,\varepsilon).$$

Рассматривая задачу (33) сначала на отрезке $[0,t_1]$, а затем на $[t_1,T]$, и учитывая условие 1^0 или 2^0, а также оценки экспоненциального типа для функций погранслоя $Q_0\overset{(j)}{\mathbb{K}}$, стандартными в теории сингулярных возмущений рассуждениями при оценке остаточного члена асимптотики решения задачи Коши (см., например, [8], стр. 65) получаем оценки

$$\left\|\overset{(j)}{\hat z}_n(t,\varepsilon) - \overset{(j)}{z}_*(t,\varepsilon)\right\|_{C[t_{j-1},t_j]} = O(\varepsilon^{n+1}),$$
$$j=1,2. \qquad (34)$$

Обозначим через $\overset{(j)}{\hat u}_n$ правую часть выражения (8) при $\overset{(j)}{z}_* = \overset{(j)}{\hat z}_n,\ \overset{(j)}{\mathbb{K}} = \overset{(j)}{\widetilde{\mathbb{K}}}_n$, т.е.

$$\overset{(j)}{\hat u}_n = -\overset{(j)}{R}{}^{-1}\,\overset{(j)}{\mathbb{B}}{}'\,\overset{(j)}{\widetilde{\mathbb{K}}}_n\,\overset{(j)}{\hat z}_n. \qquad (35)$$

Тогда

$$\overset{(j)}{\hat u}_n - \overset{(j)}{u}_* = -\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\,\overset{(j)}{\mathbb{B}}{}'\,\overset{(j)}{\widetilde{\mathbb{K}}}_n(\overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*) +$$
$$+\overset{(j)}{\mathbb{R}}{}^{-1}\,\overset{(j)}{\mathbb{B}}{}'\,\Delta\overset{(j)}{\mathbb{K}}\,\overset{(j)}{z}_*.$$

Отсюда, в силу (29), (34) имеем

$$\left\|\overset{(j)}{\hat u}_n(t,\varepsilon) - \overset{(j)}{u}_*(t,\varepsilon)\right\|_{C[t_{j-1},t_j]} = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$
$$j=1,2. \qquad (36)$$

Рассмотрим приращение функционала: $\Delta J = J_\varepsilon(\hat u_n) - J_\varepsilon(u_*)$.

Учитывая (1), имеем

$$\Delta J = \frac12\Big\langle \overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon) - \overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon), \mathbb{F}(\varepsilon)\times$$
$$\times\left(\overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon) - \overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon)\right)\Big\rangle +$$
$$+\frac12\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*, \overset{(j)}{\mathbb{W}}\left(\overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*\right)\right\rangle +\right.$$
$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat u}_n - \overset{(j)}{u}_*, \overset{(j)}{\mathbb{R}}\left(\overset{(j)}{\hat u}_n - \overset{(j)}{u}_*\right)\right\rangle\right)dt +$$
$$+\left\langle \overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon) - \overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon), \mathbb{F}(\varepsilon)\,\overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon)\right\rangle +$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n - \overset{(j)}{z}_*, \overset{(j)}{\mathbb{W}}\,\overset{(j)}{z}_*\right\rangle +\right.$$
$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat u}_n - \overset{(j)}{u}_*, \overset{(j)}{\mathbb{R}}\,\overset{(j)}{u}_*\right\rangle\right)dt.$$

Используя соотношения (8), (2), (10), (4), (6), (5), (7), преобразуем сумму двух последних интегралов в предшествующем выражении

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat u}_n-\overset{(j)}{u}_*,\overset{(j)}{\mathbb{R}}\overset{(j)}{u}_*\right\rangle\right)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat u}_n-\overset{(j)}{u}_*,-\overset{(j)}{\mathbb{B}'}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle\right)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle E\dot{\overset{(j)}{z}}_n-\overset{(j)}{\mathbb{A}}\overset{(j)}{\hat z}_n-\mathbb{E}\dot{\overset{(j)}{z}}_*+\overset{(j)}{\mathbb{A}}\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle\right)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}_*+\overset{(j)}{\mathbb{A}'}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle-\right.$$

$$-\frac{d}{dt}\left\langle \mathbb{E}\left(\overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*\right),\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle+$$

$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\mathbb{E}'\dot{\overset{(j)}{\mathbb{K}}}\overset{(j)}{z}_*+\overset{(j)}{\mathbb{K}'}E\dot{\overset{(j)}{z}}_*\right\rangle\right)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}\overset{(j)}{z}_*+\overset{(j)}{\mathbb{A}'}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle+\right.$$

$$+\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\left(-\overset{(j)}{\mathbb{K}'}\overset{(j)}{\mathbb{A}}-\overset{(j)}{\mathbb{A}'}\overset{(j)}{\mathbb{K}}+\overset{(j)}{\mathbb{K}'}\overset{(j)}{\mathbb{S}}\overset{(j)}{\mathbb{K}}-\overset{(j)}{\mathbb{W}}\right)\overset{(j)}{z}_*+\right.$$

$$\left.\left.+\overset{(j)}{\mathbb{K}'}\left(\overset{(j)}{\mathbb{A}}-\overset{(j)}{\mathbb{S}}\overset{(j)}{\mathbb{K}}\right)\overset{(j)}{z}_*\right\rangle\right)dt-$$

$$-\left\langle \mathbb{E}\left(\overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*\right),\overset{(j)}{\mathbb{K}}\overset{(j)}{z}_*\right\rangle\Bigg|_{t_{j-1}}^{t_j}=$$

$$=-\left\langle \overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon)-\overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon),\mathbb{F}(\varepsilon)\overset{(j)}{z}_*(T,\varepsilon)\right\rangle.$$

Таким образом,

$$\Delta J=\frac{1}{2}\left\langle \overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon)-\overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon),\mathbb{F}(\varepsilon)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\overset{(2)}{\hat z}_n(T,\varepsilon)-\overset{(2)}{z}_*(T,\varepsilon)\right)\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*,\overset{(j)}{\mathbb{W}}(\overset{(j)}{\hat z}_n-\overset{(j)}{z}_*)\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle \overset{(j)}{\hat u}_n-\overset{(j)}{u}_*,\overset{(j)}{\mathbb{R}}(\overset{(j)}{\hat u}_n-\overset{(j)}{u}_*)\right\rangle\right)dt.$$

Отсюда и из (34), (36) следует

Теорема 3. *Для оптимального управления задачи* (1)—(3) *составленного из* $\overset{(j)}{u}_*$ *вида* (8), *можно построить, используя асимптотические разложения решений задач* (4), (5) *и* (6), (7), *приближение* $\hat u_n$, *составленное из* $\overset{(j)}{\hat u}_n$ *вида* (35), *где* $\overset{(j)}{\hat z}_n$ *является решением задачи* (32). *При этом для всех* $t\in[0,T]$ *и достаточно малых* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\overset{(j)}{\hat u}_n(t,\varepsilon)-\overset{(j)}{u}_*(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon^{n+1},$$

$$\left\|\overset{(j)}{\hat z}_n(t,\varepsilon)-\overset{(j)}{z}_*(t,\varepsilon)\right\|\le c\varepsilon^{n+1},\ j=1,2,$$

$$J_\varepsilon(\hat u_n)-J_\varepsilon(u_*)\le c\varepsilon^{2(n+1)},$$

где постоянная c *не зависит от* t,ε.

4. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим задачу P_ε, заключающуюся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\left((\overset{(2)}{x}(2,\varepsilon))^2+\varepsilon(\overset{(2)}{y}(2,\varepsilon))^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left((\overset{(1)}{x})^2+3(\overset{(1)}{y})^2+(\overset{(1)}{u})^2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^2\left(4(\overset{(2)}{x})^2+8\overset{(2)}{x}\overset{(2)}{y}+8(\overset{(2)}{y})^2+(\overset{(2)}{u})^2\right)dt$$

на траекториях систем

$$\dot{\overset{(1)}{x}}=\overset{(1)}{x},\ \varepsilon\dot{\overset{(1)}{y}}=-\overset{(1)}{y}+\overset{(1)}{u},\ t\in[0,1],$$

$$\dot{\overset{(2)}{x}}=0,\ \varepsilon\dot{\overset{(2)}{y}}=\overset{(2)}{x}-\overset{(2)}{y}-\overset{(2)}{u},\ t\in[1,2],$$

$$\overset{(1)}{x}(0,\varepsilon)=1,\ \ \overset{(1)}{y}(0,\varepsilon)=1,$$

$$\overset{(2)}{x}(1,\varepsilon)=\overset{(1)}{x}(1,\varepsilon),\ \ \overset{(2)}{y}(1,\varepsilon)=\overset{(1)}{y}(1,\varepsilon).$$

Найдём точное решение рассматриваемой задачи.

Для этого сначала находим решение системы (14), (15) в данном случае:

$$\overset{(1)}{K}_1(t,\varepsilon)=C_3e^{-2t}-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon C_2^2e^{-2t(1+\frac{2}{\varepsilon})}}{4(1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}})},$$

$$\overset{(1)}{K}_3(t,\varepsilon)=-\frac{C_2e^{-t(1+\frac{2}{\varepsilon})}}{1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}}},$$

$$\overset{(1)}{K}_4(t,\varepsilon)=1-\frac{4}{1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}}},$$

$$\overset{(2)}{K}_1(t,\varepsilon)=C_6-4t-$$

$$-\frac{4\varepsilon C_4}{1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}}e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}-\frac{\varepsilon C_5(C_5+4e^{\frac{3t}{\varepsilon}})}{6(1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}})}e^{-\frac{6t}{\varepsilon}},$$

$$\overset{(2)}{K}_3(t,\varepsilon)=2-\frac{2+C_5e^{-\frac{3t}{\varepsilon}}}{1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}},$$

$$\overset{(2)}{K}_4(t,\varepsilon)=2-\frac{6}{1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}},$$

где

$$C_1=\frac{(1-25e^{\frac{6}{\varepsilon}})e^{\frac{4}{\varepsilon}}}{20(1-e^{\frac{6}{\varepsilon}})},$$

$$C_2=8\frac{e^{1+\frac{5}{\varepsilon}}}{1+e^{\frac{3}{\varepsilon}}},$$

$$C_3=\frac{11}{2}e^2+\frac{10\varepsilon e^2(1-e^{\frac{3}{\varepsilon}})}{3(1+e^{\frac{3}{\varepsilon}})},$$

$$C_4=-\frac{5}{6}e^{\frac{12}{\varepsilon}},$$

$$C_5=10e^{\frac{6}{\varepsilon}},$$

$$C_6=9+\frac{10}{3}\varepsilon.$$

Затем находим решение системы (22), (23) для этого примера:

$$\overset{(1)}{x}(t,\varepsilon)=e^t,$$

$$\overset{(1)}{y}(t,\varepsilon)=-C_7(1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}})e^{\frac{2t}{\varepsilon}}-\frac{C_2}{4}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}},$$

$$\overset{(2)}{x}(t,\varepsilon)=e,$$

$$\overset{(2)}{y}(t,\varepsilon)=-C_8(1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}})e^{\frac{3t}{\varepsilon}}-\frac{1}{6}(C_5+2e^{\frac{3t}{\varepsilon}})e^{1-\frac{3t}{\varepsilon}},$$

где

$$C_7=-\frac{4+C_2}{4(1-4C_1)},$$

$$C_8=\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-6C_4e^{-\frac{6}{\varepsilon}}}\times$$

$$\times\left(C_7(1-4C_1e^{-\frac{4}{\varepsilon}})+\frac{C_2}{4}e^{-\frac{4}{\varepsilon}}-\frac{1}{6}(C_5+2e^{\frac{3}{\varepsilon}})e^{1-\frac{5}{\varepsilon}}\right).$$

В силу (27) оптимальное управление в форме обратной связи имеет следующий вид:

$$\overset{(1)}{u}(t,\varepsilon)=\frac{C_2e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}}{1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}}}+$$

$$+\left(1-\frac{4}{1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}}}\right)\times$$

$$\times\left(C_7(1-4C_1e^{-\frac{4t}{\varepsilon}})e^{\frac{2t}{\varepsilon}}+\frac{C_2}{4}e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}\right),$$

$$\overset{(2)}{u}(t,\varepsilon)=\left(2-\frac{2+C_5e^{-\frac{3t}{\varepsilon}}}{1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}}\right)e-$$

$$-\left(2-\frac{6}{1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}}}\right)\times$$

$$\times\left(C_8(1-6C_4e^{-\frac{6t}{\varepsilon}})e^{\frac{3t}{\varepsilon}}+\frac{1}{6}(C_5+2e^{\frac{3t}{\varepsilon}})e^{1-\frac{3t}{\varepsilon}}\right).$$

Теперь построим асимптотику решения нулевого порядка.

Находим решение системы (16), (17) в данном случае:

$$\overset{(1)}{\overline{K}}_{10}(t)=-\frac{1}{2}(1-11e^{2-2t}),$$

$$\overset{(1)}{\overline{K}}_{30}(t)=0,$$

$$\overset{(1)}{\overline{K}}_{40}(t)=1,$$

$$\overset{(2)}{\overline{K}}_{10}(t)=-4t+9,$$

$$\overset{(2)}{\overline{K}}_{30}(t)=2,$$

$$\overset{(2)}{\overline{K}}_{40}(t)=2.$$

Находим решение системы (24) для этого примера:

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_0(t)=e^t,$$

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t)=0,$$

$$\overset{(2)}{\overline{x}}_0(t)=e,$$

$$\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t)=-\frac{e}{3}.$$

Отсюда и из (28) получаем

$$\overset{(1)}{u}_0(t) = \overset{(1)}{y}_0(t) = 0,$$
$$\overset{(2)}{u}_0(t) = 2\overset{(2)}{x}_0(t) + 2\overset{(2)}{y}_0(t) = \frac{4e}{3}.$$

В силу (18) имеем $\overset{(j)}{Q}_0 K_1 \equiv 0,\ j = 1,2.$

Находим решение системы (19), (20):

$$\overset{(1)}{Q}_0 K_3 = -\frac{8e^{-2\tau_1}}{1-5e^{-4\tau_1}},$$
$$\overset{(1)}{Q}_0 K_4 = -\frac{4}{1-5e^{-4\tau_1}},$$
$$\overset{(2)}{Q}_0 K_3 = -2\frac{1+5e^{-3\tau_2}}{1+5e^{-6\tau_2}},$$
$$\overset{(2)}{Q}_0 K_4 = -\frac{6}{1+5e^{-6\tau_2}}.$$

В силу (25) имеем $\overset{(j)}{\Pi}_0 x = \overset{(j)}{Q}_0 x \equiv 0,$ $j = 1,2.$

Находим решение системы (26) в данном случае:

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y = e^{-2\tau_0},$$
$$\overset{(1)}{Q}_0 y = -\frac{2}{5}e^{1+2\tau_1},$$
$$\overset{(2)}{\Pi}_0 y = -\frac{1}{15}e^{1-3\tau_1},$$
$$\overset{(2)}{Q}_0 y = \frac{1}{3}e^{1+3\tau_2}.$$

Отсюда и из (28) получаем

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 u = -\overset{(1)}{\Pi}_0 y = -e^{-2\tau_0},$$
$$\overset{(1)}{Q}_0 u = \frac{8e^{1-2\tau_1}}{1-5e^{-4\tau_1}} + \frac{3+5e^{-4\tau_1}}{1-5e^{-4\tau_1}}\overset{(1)}{Q}_0 y = -\frac{6}{5}e^{1+2\tau_1},$$
$$\overset{(2)}{\Pi}_0 u = 2\overset{(2)}{\Pi}_0 y = -\frac{2}{15}e^{1-3\tau_1},$$
$$\overset{(2)}{Q}_0 u = -\frac{10e^{1-3\tau_2}}{1+5e^{-6\tau_2}} + \frac{2(5e^{-6\tau_2}-2)}{1+5e^{-6\tau_2}}\overset{(2)}{Q}_0 y = -\frac{4}{3}e^{1+3\tau_2}.$$

Итак, найдено асимптотическое приближение нулевого порядка:

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{K}}_{10}(t,\varepsilon) = -\dfrac{1}{2}(1-11e^{2-2t}), \\ \overset{(2)}{\tilde{K}}_{10}(t,\varepsilon) = -4t+9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{K}}_{30}(t,\varepsilon) = -\dfrac{8e^{-2\frac{t-1}{\varepsilon}}}{1-5e^{-4\frac{t-1}{\varepsilon}}}, \\ \overset{(2)}{\tilde{K}}_{30}(t,\varepsilon) = 2-2\dfrac{1+5e^{-3\frac{t-2}{\varepsilon}}}{1+5e^{-6\frac{t-2}{\varepsilon}}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{K}}_{40}(t,\varepsilon) = 1-\dfrac{4}{1-5e^{-4\frac{t-1}{\varepsilon}}}, \\ \overset{(2)}{\tilde{K}}_{40}(t,\varepsilon) = 2-\dfrac{6}{1+5e^{-6\frac{t-2}{\varepsilon}}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{u}}_0(t,\varepsilon) = -e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - \dfrac{6}{5}e^{1+2\frac{t-1}{\varepsilon}}, \\ \overset{(2)}{\tilde{u}}_0(t,\varepsilon) = \dfrac{4}{3}e - \dfrac{2}{15}e^{1-3\frac{t-1}{\varepsilon}} - \dfrac{4}{3}e^{1+3\frac{t-2}{\varepsilon}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{x}}_0(t,\varepsilon) = e^t, \\ \overset{(2)}{\tilde{x}}_0(t,\varepsilon) = e, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\tilde{y}}_0(t,\varepsilon) = e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - \dfrac{2}{5}e^{1+2\frac{t-1}{\varepsilon}}, \\ \overset{(2)}{\tilde{y}}_0(t,\varepsilon) = -\dfrac{1}{3}e - \dfrac{1}{15}e^{1-3\frac{t-1}{\varepsilon}} + \dfrac{1}{3}e^{1+3\frac{t-2}{\varepsilon}}. \end{cases}$$

На рисунках 1—6 изображены графики функций $K_1(t,\varepsilon)$, $K_3(t,\varepsilon)$, $K_4(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$, $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ соответственно, решение вырожденной задачи и приближение нулевого порядка для этих функций при $\varepsilon = 0{,}15$. При этом сплошная линия означает точное решение, линия, состоящая из кружков, — вырожденное решение, а линия, состоящая из квадратиков, — приближение нулевого порядка.

Значения критерия качества приведены в таблице 1.

Таблица 1

ε	$J_\varepsilon(\overline{u}_0)$	$J_\varepsilon(\tilde{u}_0)$	$J_\varepsilon(u_*)$
0.15	20.98348437	20.07101478	20.07101476

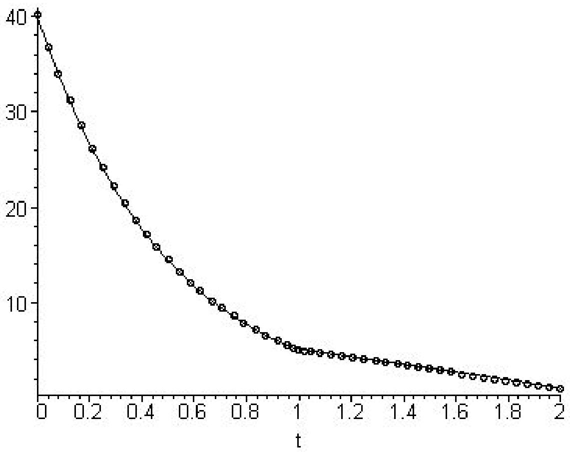

Рис. 1.

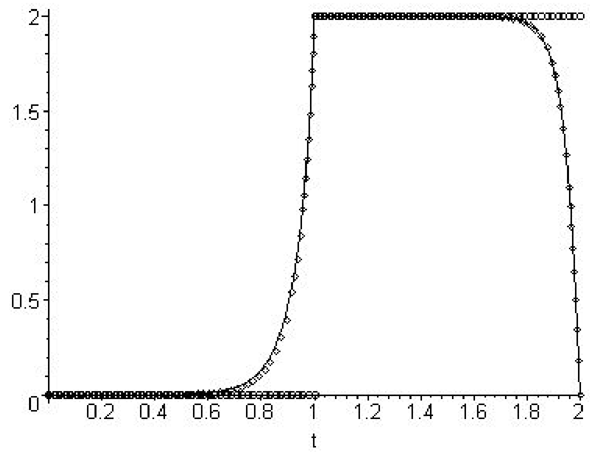

Рис. 2.

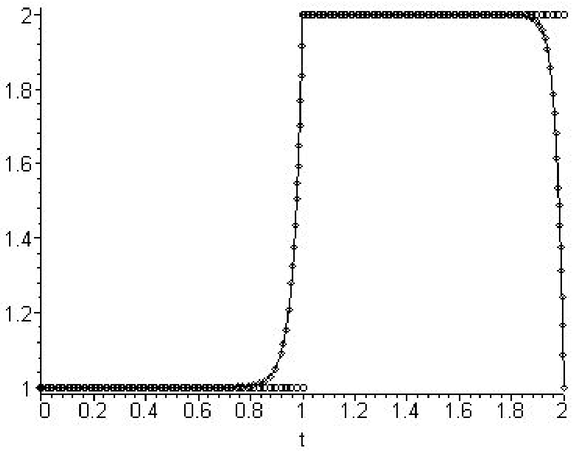

Рис. 3.

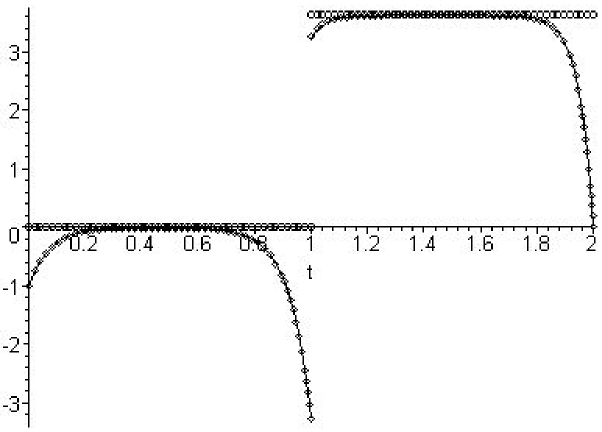

Рис. 4.

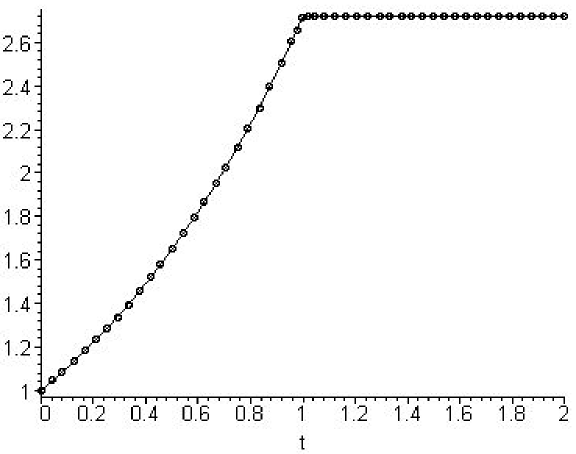

Рис. 5.

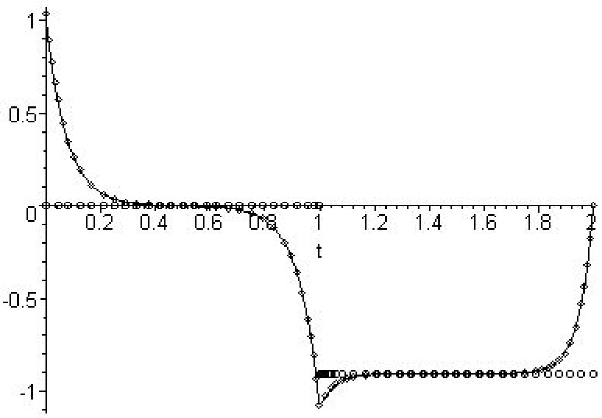

Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев // Итоги науки и техн. мат. анализ, М., — 1982. — Т. 20. — С. 3—77.

2. *Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3—51.

3. *Kokotovic P. V.* Singular perturbation of linear regulators: basic theorems / P. V. Kokotovic, R. A. Yackel // IEEE Trans. Automat. Control. — 1972. — V. 17. — N. 1. — P. 29—37.

4. *Глизер В. Я.* Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникаю-

щей в теории оптимального управления / В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 4. — С. 601—612.

5. *Belokopytov S. V.* Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions / S. V. Belokopytov, M. G. Dmitriev // Systems and Control Letters. — 1986. — V. 8. — № 2. — P. 129—195.

6. *Курина Г. А.* Приближение нулевого порядка асимптотики решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи управления с разрывными коэффициентами / Г. А. Курина, Т. Х. Нгуен // МАИС. — 2010. — Т. 17. — № 1. — С. 93—116.

7. *Ли Э. Б.* Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус — М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы. — 1972. — 576 с.

8. *Васильева А. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов — М. : Наука. — 1973. — 272 с.

9. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев — М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы. — 1976. — 424 с.

10. *Yackel R. A.* A boundary layer method for the matrix Riccati equations / R. A. Yackel, P. V. Kokotovic // IEEE Trans. Automat. Control. — 1973. — V. AC18. — N 1. — P. 17—24.

Курина Г. А., доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики, Воронежская государственная лесотехническая академия

E-mail: kurina@math.vsu.ru

Нгуен Тхи Хоай, аспирантка кафедры математики, Воронежская государственная лесотехническая академия

E-mail: nthoai0682@yahoo.com

Kurina G. A., DSc, prof., the chair of mathematics, Voronezh State Academy of Forestry Engineering

E-mail: kurina@math.vsu.ru

Nguyen Thi Hoai, Post-graduate student, the chair of mathematics, Voronezh State Academy of Forestry Engineering

E-mail: nthoai0682@yahoo.com