УДК 517.9

МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА*

Н. С. Калужина

Воронежский государственный университет

Статья поступила в редакцию 3 марта 2010 г.

Аннотация: вводится понятие медленно меняющихся на бесконечности функций и периодических на бесконечности функций, изучаются их свойства, доказывается эквивалентность определений медленно меняющихся функций и функций, стационарных на бесконечности, исследуется структура фактор-пространства медленно меняющихся на бесконечности функций, изучаются спектральные свойства медленно меняющихся на бесконечности функций.
Ключевые слова: медленно меняющаяся на бесконечности функция, стационарная на бесконечности функция, слабо колеблющаяся функция, периодическая на бесконечности функция, спектр Бёрлинга.

Abstract: concept of slowly varying and periodic on infinity functions has introduced, their behaviours are studying, equivalence between the definition of slowly varying functions and the definition of steady-state on infinity functions is proving, structure of factor-space of slowly varying functions is investigating, spectral behaviours of slowly varying functions are studing.
Key words: slowly varying on infinity function, steady-state on infinity function, periodic on infinity function, Beurling spectrum.

1. ПОНЯТИЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИИ

Рассматривается банахово пространство $C_b(\mathbb{R})$ заданных на вещественной оси $\mathbb{R}$ непрерывных ограниченных комплексных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|$. Через $C_{b,u}(\mathbb{R})$ обозначается замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций. На этом пространстве определена и сильно непрерывна изометрическая группа операторов сдвига функций $(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau)$, $t,\tau \in \mathbb{R}$, $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$. Через $C_0(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство $\{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}) : \lim\limits_{|t|\to\infty}|x(t)| = 0\}$.

Определение 1 Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ называется **медленно меняющейся на бесконечности функцией**, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R})$ или, другими словами, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{|t|\to\infty}|x(t+\alpha) - x(t)| = 0. \qquad (1)$$

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $C_{sl}(\mathbb{R})$.

Пример 1. Функции из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ вида:

1) $x(t) = \sin\ln(1+|t|)$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $x(t) = \dfrac{\sin t^2}{1+it}$, $t \in \mathbb{R}$;

3) $x(t) = \begin{cases} \exp(i\alpha\ln(1+t)) - 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$;

4) $x(t) = \begin{cases} 1, & t > 1 \\ t, & t \in [-1,1], \\ -1, & t < -1 \end{cases}$

принадлежат $C_{sl}(\mathbb{R})$.

2. Основные свойства функций из $C_{sl}(\mathbb{R})$

Лемма 1. *$C_{sl}(\mathbb{R})$ — замкнутое линейное подпространство из $C_{b,u}(\mathbb{R})$, инвариантное относительно оператора сдвига $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}) \to C_{b,u}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, любых $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ и любых функций $x, y \in \mathbb{C}_{sl}(\mathbb{R})$ справедливо равенство $S(\alpha)(\gamma x + \beta y) - (\gamma x + \beta y) = \gamma(S(\alpha)x - x) + \beta(S(\alpha)y - y) \in C_0(\mathbb{R})$. Таким образом, $\gamma x + \beta y \in C_{sl}(\mathbb{R})$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00276

Покажем теперь, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x \in C_{sl}(R)$ функция $S(t_0)x$ принадлежит $C_{sl}(R)$. Из представления $S(\alpha)S(t_0)x - S(t_0)x = S(t_0)(S(\alpha)x - x)$, $t_0, t \in \mathbb{R}$, и сильной непрерывности оператора сдвига $S(t_0)x$ следует, что $S(t_0)x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, а значит, пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ инвариантно относительно оператора сдвига.

Пусть последовательность (x_n), $n \in \mathbb{N}$, из $C_{sl}(\mathbb{R})$ сходится к $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо $S(\alpha)x_0 - x_0 = \lim_{n\to\infty}(S(\alpha)x_n - x_n) \in C_0(\mathbb{R})$, в силу замкнутости пространства $C_0(\mathbb{R})$. Следовательно, $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R})$. □

Лемма 2. *Пространство медленно меняющихся на бесконечности функций $C_{sl}(\mathbb{R})$ несепарабельно.*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \ge 0\}$ из $C_{b,u}(\mathbb{R})$ вида:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \exp(i\alpha \ln(1+t)) - 1, & t \ge 0 \\ 0 & , t < 0. \end{cases}, \quad \alpha \ge 0.$$

Покажем, что $\{x_\alpha, \alpha \ge 0\} \subset C_{sl}(\mathbb{R})$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

$$\lim_{|t|\to\infty}\left|x_\alpha(t+\tau) - x(t)\right| = $$
$$= \lim_{|t|\to\infty}\left|e^{i\alpha\ln(1+t+\tau)} - e^{i\alpha\ln(1+t)}\right| =$$
$$= \lim_{|t|\to\infty}\left|e^{i\alpha\ln\frac{1+t+\tau}{1+t}} - 1\right| = 0.$$

Заметим, что для функций $e^{i\alpha t}$ и $e^{i\beta t}$, $\alpha \ne \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$, имеет место оценка $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|e^{i\alpha t} - e^{i\beta t}\right| \ge \sqrt{2}$.

Поскольку отображение $t \mapsto \ln(1+t)$ из $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ в $\mathbb{R}_+$ является гомеоморфизмом, то $\left\|x_\alpha - x_\beta\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|e^{i\alpha t} - e^{i\beta t}\right| \ge \sqrt{2}$, , $\alpha \ne \beta$, , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, в пространстве $C_{sl}(\mathbb{R})$ содержится семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \ge 0\}$, состоящее из континуума функций, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{2}$. Это значит, что пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ несепарабельно. □

Лемма 3. *Пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ образует алгебру относительно поточечного умножения функций.*

Доказательство. Пусть $x, y \in C_{sl}(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства: $S(\alpha)(xy) - xy = S(\alpha)y(S(\alpha)x - x) + x(S(\alpha)y - y)$, из которых следует, что $S(\alpha)xy - xy \in C_0(\mathbb{R})$. □

3. МОДУЛЬНАЯ СТРУКТУРА НА $C_{sl}(\mathbb{R})$

Будем рассматривать банахову алгебру $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых на $\mathbb{R}$ функций со свёрткой в качестве умножения. Через $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Лемма 4. *Пространство $C_{sl}(\mathbb{R})$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, структура которого определяется формулой свертки:*

$$f * x = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)x d\tau, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in C_{sl}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Доказательство. Покажем корректность определения свертки, т.е. докажем включение $f * x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$. Из представления (2), непрерывности отображения $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ и определения интеграла следует, что функция $f * x$ является пределом в $C_{b,u}(\mathbb{R})$ линейных комбинаций сдвигов функции x. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любой функции $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R})$ функция y_0, определяемая равенствами

$$y_0 = S(\alpha)f * x_0 - f * x_0 =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)(S(\alpha)x_0 - x_0)d\tau =$$
$$= f * (S(\alpha)x_0 - x_0),$$

есть предел в $C_{b,u}(\mathbb{R})$ линейных комбинаций сдвигов функции $S(\alpha)x_0 - x_0$, принадлежащей $C_0(\mathbb{R})$. В силу замкнутости подпространства $C_0(\mathbb{R})$, функция y_0 принадлежит $C_0(\mathbb{R})$. □

Лемма 5. *Для любой функции $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ и любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(0) = 0$ справедливо свойство $f * x \in C_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ вида $f = S(\alpha)g - g$, где $g \in L^1(\mathbb{R})$. Эта функция имеет преобразование Фурье вида $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)e^{i\lambda\alpha} - \hat{g}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и поэтому $\hat{f}(0) = 0$. По тауберовой теореме Винера [1] множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \hat{f}(0) = 0\}$ и поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции f рассматриваемого вида. Пусть $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$. Ввиду того, что $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R})$, получаем: $f * x = (S(\alpha)g - g) * x = g * (S(\alpha)x - x) \in C_0(\mathbb{R})$. □

Лемма 6. *Для любой функции $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ и любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(0) = 1$ справедливо свойство $f * x - x \in C_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$ обладает свойством $\hat{f}(0) = 1$. Рассмотрим $\{e_\alpha, \alpha > 0\}$ — ограниченная аппроксимативная единица (сокращенно о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathbb{R})$. Тогда, в силу равномерной непрерывности функции $f * x - x$, , получаем равенство $\lim\limits_\alpha e_\alpha * (f * x - x) = f * x - x$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции $e_\alpha * (f * x - x) = y_\alpha$. Для любого $\alpha > 0$ представим y_α в виде $y_\alpha = (e_\alpha * f - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$. Поскольку $\hat{f}_\alpha(0) = \hat{e}_\alpha(0)\hat{f}(0) - \hat{e}_\alpha(0) = 0$, то по лемме 5, $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R})$. □

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАЛЕЦКОГО—КРЕЙНА

В монографии Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна [2] при исследовании решений линейных дифференциальных уравнений вводится специальный класс функций, называемых стационарными на бесконечности. Они играют важную роль при изучении стабилизации решений дифференциальных уравнений.

Далее через $C_b(\mathbb{R}_+)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ обозначаются соответственно банахово пространство непрерывных и равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ комплексных функций с нормой $\|x\|_\infty^+ = \sup\limits_{t \geq 0} |x(t)|$. Также рассматривается подпространство $C_0(\mathbb{R}_+)$ из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ вида: $\{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+) : \lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0\}$. Сформулируем определение 1 для функций из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$.

Определение 2. Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ называется **медленно меняющейся на бесконечности**, если для любого $\alpha > 0$ функция $S(\alpha)x - x$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}_+)$.

Далее банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ вложим в банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R})$ с помощью линейного оператора $J : C_{b,u}(\mathbb{R}_+) \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ вида

$$(Jx)(t) = \begin{cases} x(t) & , t \geq 0 \\ (1+t)x(0) & , t \in [-1, 0). \\ 0 & , t < -1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\|J\| = 1$.

Замечание 1. Непосредственно из определений 1 и 2 следует, что функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ является медленно меняющейся на бесконечности тогда и только тогда, когда таковой является функция $\tilde{x} = Jx \in C_{b,u}(\mathbb{R})$.

Сделанное замечание позволяет рассматривать $C_{sl}(\mathbb{R}_+)$ как подпространство из $C_{sl}(\mathbb{R})$ и, следовательно, можно использовать результаты, полученные для функций из $C_{sl}(\mathbb{R})$. В частности, справедливы леммы 1–6.

Определение 3. (Далецкий—Крейн [2]) Функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+)$ называется **стационарной на бесконечности**, если при каком-либо положительном L выполнено (а значит, и при сколь угодно большом L):

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|s-t|\leq L s,t\geq T} |x(s) - x(t)| = 0. \tag{3}$$

Замечание 2. Любая стационарная на бесконечности функция является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}_+$. Этот факт непосредственно следует из определения 3: на любом конечном промежутке $[0, T], T > 0$, она равномерно непрерывна по теореме Вейерштрасса, а на промежутке $[T, +\infty)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = L > 0$, , что для всех $s, t \geq T$, $|s - t| \leq L$, выполняется неравенство $|x(s) - x(t)| < \varepsilon$.

Замечание 3. В работе [2] доказывается, что любая стационарная на бесконечности функция x представима в виде:

$$x = x_1 + x_2, \tag{4}$$

где $x_1 \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и существует $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)$, а $x_2 \in C_b(\mathbb{R}_+)$ при достаточно больших t имеет производную $x_2'(t)$, причем $x_2' \in C_0(\mathbb{R}_+)$.

Верно и обратное свойство: если функция x представлена в виде (4), то она стационарна на бесконечности.

Теорема 1. *Определения 2 и 3 эквивалентны для функций из* $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Пусть $x \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$. В силу замечания 1, можно считать $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, т.е. $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ и для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{|t|\to\infty} |x(t+\alpha) - x(t)| = 0$. Возьмем любую $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(0) = 1$ и компактным носителем $supp\hat{f}$. Из леммы 6 $f * x - x = x_0 \in C_0(\mathbb{R})$. Тогда $f * x$ дифференцируема бесконечное число раз, причем $f * x \in C_0(\mathbb{R})$. Таким образом, x представима в виде $x = f * x - x_0$, где $f * x$ имеет производную $(f * x)' \in C_0(\mathbb{R})$, а $x_0 \in C_0(\mathbb{R})$. В силу замечания 3, функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+)$ стационарна на бесконечности.

Обратно, пусть $x \in C_b(\mathbb{R}_+)$ стационарна на бесконечности, т.е. при сколь угодно большом $L > 0$ выполняется равенство (3). Положим в этом равенстве $s = t + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда $\lim\limits_{T\to\infty} \sup\limits_{|\alpha|\leq L, t\geq T} |x(t+\alpha) - x(t)| = 0$, а это значит, что при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t+\alpha) - x(t)| = 0$, т.е. $x \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$. □

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Е. СЕНЕТА

В работе Пака [4], с. 123, при исследовании асимптотического поведения сумм тригонометрических рядов вводится специальный класс функций, называемых слабо колеблющимися функциями. Это понятие совпадает с определением Карамата [6]. Например, функции $\ln^{\nu}(x)$, $\ln\ln^{\nu}(x), \ldots$, где $\nu \in \mathbb{R}$, являются слабо колеблющимися функциями.

«Применение слабо колеблющихся функций в теории тригонометрических рядов связано с нахождением асимптотических формул в окрестности начала координат косинусов- и синус-рядов с монотонными и квазимонотонными коэффициентами и берет свое начало с работ Харди [6]» (цитата из [4]). Слабо колеблющиеся функции также находят свое применение в теории вероятности (см., например, работу Е. Сенета [7]), а также в теории целых функций [8]. Эти функции составляют часть класса регулярно растущих функций, которые впервые в 1925 году ввел в рассмотрение Р. Шмидт [9]. Карамата эти функции назвал **медленно растущими**, а Харди и Рогозинский [10] — **слабо колеблющимися**.

Обратимся к работе Е. Сенета [7], в которой автор вводит понятие медленно меняющейся на бесконечности фунции. Заметим, что определение 4 в точности совпадает с определением слабо колеблющейся функции.

Определение 4. (Е. Сенета) Положительная функция L называется **медленно меняющейся на бесконечности**, если она измерима на полуоси $[A,\infty), A > 0,$ и для произвольного $\lambda > 0$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1. \qquad (5)$$

Теорема 2. *Если функция $L \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ является медленно меняющейся на бесконечности в смысле определения 4, то функция $f(x) = \ln L(e^x)$ является медленно меняющейся на бесконечности в смысле определения 2.*

Верно и обратное. Если $f \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$, то $L(x) = e^{f(\ln x)}$ является медленно меняющейся на бесконечности в смысле определения 4.

Доказательство. Пусть L – медленно меняющаяся на бесконечности функция в смысле определения 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln L(e^x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}_+$ она обладает свойством $f(x+\alpha) - f(x) = \ln\dfrac{L(e^x e^\alpha)}{L(e^x)}$. Поскольку для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{L(e^x e^\alpha)}{L(e^x)} = 0$, то есть для любого $\alpha > 0$ $f(x+\alpha) - f(x) \in C_0(\mathbb{R}_+)$. Это значит, что $f \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть теперь $f \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим функцию $L(x) = e^{f(\ln x)}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Заметим, что $L(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$. Для любого $\lambda > 0$ справедливы равенства $\dfrac{L(\lambda x)}{L(x)} = e^{f(ln\lambda + \ln x) - f(\ln x)}$. Поскольку $f \in C_{sl}(\mathbb{R}_+)$, то для $\alpha = \ln\lambda$ выполнено $\lim\limits_{y\to\infty}\left|f(y+\alpha) - f(y)\right| = 0$, откуда следует, что для любого $\lambda > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lim\limits_{y\to\infty} e^{f(\alpha+y)-f(y)} = 1$. Таким образом, функция L является медленно меняющейся на бесконечности в смысле определения 4. □

6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Введем в рассмотрение новый класс функций.

Определение 5. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$ называется **периодической на бесконечности** с периодом $\omega \in \mathbb{R}$, если $S(\omega)x - x \in C_0(\mathbb{R})$.

Множество всех периодических на бесконечности функций с периодом $\omega \in \mathbb{R}$ обозначим через $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$.

Лемма 7. *Пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ является замкнутой подалгеброй из $C_{b,u}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть x, $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$. Тогда выполнены равенства:

$$S(\omega)(xy) - xy =$$
$$= S(\omega)y(S(\omega)x - x) + x(S(\omega)y - y),$$

из которых следует, что $S(\omega)(xy) - xy \in C_0(\mathbb{R})$.

Пусть последовательность (x_n), $n \in \mathbb{N}$, , из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Справедливо равенство $S(\omega)x_0 - x_0 = \lim\limits_{n\to\infty}(S(\omega)x_n - x_n)$, из которого, в силу замкнутости пространства $C_0(\mathbb{R})$ следует замкнутость $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$. □

Определение 6. Пусть $x \in C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$. Семейство функций (x_n), $n \in \mathbb{Z}$, определяемых равенствами

$$x_n(t) = \frac{e^{-\mathrm{int}}}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t+\tau)e^{-in\tau}d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \qquad (6)$$

называется коэффициентами Фурье функции x.

Рассмотрим периодическую на бесконечности функцию $x \in C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$. Ее среднее x_0 имеет вид:

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t+\tau)d\tau, \ t \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Заметим, что $x_0 = f_0 * x$, , где $f_0 = \frac{1}{2\pi}\chi_{[0,2\pi]}$, $\chi_{[0,2\pi]}$ — характеристическая функция отрезка $[0,2\pi]$, поэтому функция x_0 принадлежит пространству $C_{b,u}(\mathbb{R})$.

Лемма 8. *Пусть $x \in C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$. Тогда ее среднее, определяемое равенством (7), принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Покажем, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R})$, т.е. $S(\alpha)x_0 - x_0 \in C_0(\mathbb{R})$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $S(\alpha)x_0 - x_0 = (S(\alpha)f_0 - f_0) * x = (S(2\pi) - I)g_\alpha * x$, где g_α — такая функция из $L^1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которой имеет вид $\hat{g}_\alpha(\lambda) = (e^{i(\alpha-2\pi)\lambda} - 1)\hat{f}_0(\lambda)$, где $\hat{f}_0$ — преобразование Фурье функции f_0. Так как $S(2\pi)x - x \in C_0(\mathbb{R})$ и $\hat{g}_\alpha(0) = 0$, то по лемме 5 функция $g_\alpha * (S(2\pi)x - x) \in C_0(\mathbb{R})$. □

Теорема 3. *Коэффициенты Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$, функции $x \in C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$ принадлежат пространству $C_{sl}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Обозначив $y(t) = x(t)e^{-int}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, получим, что $S(2\pi)y - y \in C_0(\mathbb{R})$. Таким образом, для y справедлива доказанная лемма 8, т.е. $y_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t+\tau)e^{-in(t+\tau)}d\tau = x_n(t)$ принадлежат $C_{sl}(\mathbb{R})$, для любого $n \in \mathbb{Z}$. □

7. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВО $C_{b,u}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$

Рассмотрим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$. Обозначим класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$, через $\tilde{x}$, т.е. $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{R})$. Заметим, что $C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ является замкнутым линейным подпространством фактор-пространства $C_b(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$. Теперь результаты, полученные в леммах 5 и 6, можно сформулировать следующим образом.

Лемма 9. *Для любых функций $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widetilde{f * x} = \tilde{x}$, если $\hat{f}(0) = 1$, и $\widetilde{f * x} = \tilde{0}$, если $\hat{f}(0) = 0$.*

Фактор-пространство $C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ является $L^1(\mathbb{R})$-модулем со свёрткой функций в качестве внешнего закона композиции. Свёртка функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с классом эквивалентности $\tilde{x} \in C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ задается формулой:

$$f * \tilde{x} = \widetilde{f * x}, \qquad (8)$$

где x – представитель класса $\tilde{x}$, а $\widetilde{f * x}$ – класс эквивалентности, порожденный функцией $f * x$.

Следует отметить, что в фактор-пространстве $C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ определена и сильно непрерывна изометрическая группа операторов сдвигов $t \mapsto \tilde{S}(t)\tilde{x} : \mathbb{R} \to C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$, определяемая равенством:

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad (9)$$

где $\tilde{x} \in C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$, а $\widetilde{S(t)x}$ – класс эквивалентности, порожденный функцией $S(t)x$. В силу инвариантности оператора сдвига на пространстве $C_{sl}(\mathbb{R})$ (см. лемму 1), для $\tilde{x} \in C_{sl}(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ выполнено свойство $\tilde{S}(t)\tilde{x} - \tilde{x} = \tilde{0}$, $t \in \mathbb{R}$.

Близкая тематика затронута в работе [11], где рассматривается оператор дифференцирования $D : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$. Автор проводит факторизацию $C_b(\mathbb{R}) / C_0(\mathbb{R})$ и пытается ввести оператор дифференцирования $\tilde{D} : C_b / C_0 \to C_b / C_0$ таким образом, чтобы $\tilde{D}\tilde{x} = \tilde{x}'$. Однако такое определение некорректно. Приведем пример, иллюстрирующий, что отображение $\tilde{D}$ является многозначным линейным оператором (линейным отношением).

Пример 2. Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{\sin t^2}{1+it}$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $x \in C_0(\mathbb{R})$ и, таким образом, $\tilde{x} = \tilde{0}$. Применяя оператор $\tilde{D}$ к обеим частям последнего равенства, получим $\tilde{D}\tilde{x} = \tilde{0}$. С другой стороны, $x' \notin C_0(\mathbb{R})$, т.е. $\tilde{x}' \neq \tilde{0}$. Класс эквивалентности, порожденный x', не совпадает с классом эквивалентности $\tilde{D}\tilde{x}$, а это доказывает многозначность отображения $\tilde{D}$.

8. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ $C_{sl}(\mathbb{R})$

Рассматривается комплексное банахово пространство X, на котором задана структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, ассоциированная с сильно непрерывным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to EndX$ (символом $EndX$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X).

Определение 7. Спектром (Бёрлинга) вектора $x \in X$ называется подмножество $\Lambda(x)$

из $\mathbb{R}$ следующего вида $\Lambda(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}:$ для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(\lambda) \neq 0$ выполнено $fx \neq 0\}$.

Теорема 4. *Функция x принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\tilde{x}) \subset \{0\}$.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Если $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, то по лемме 5 для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(0) = 0$ функция $f * x \in C_0(\mathbb{R})$. Поскольку $f * \tilde{x} = \widetilde{f * x}$, то $f * \tilde{x} = \tilde{0}$, для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\hat{f}(0) = 0$, откуда (см. [13]) получаем, что $\Lambda(\tilde{x}) = \{0\}$.

Пусть теперь $x \in C_{b,u}(\mathbb{R})$, $x \neq 0$ и $\Lambda(\tilde{x}) = \{0\}$. Покажем, что $x \in C_{sl}(\mathbb{R})$. Рассмотрим $\{e_\alpha, \alpha > 0\}$ — ограниченная аппроксимативная единица в алгебре $L^1(\mathbb{R})$. Для любого $\omega \in \mathbb{R}$ выполнено $\lim e_\alpha * (S(\omega)x - x) = \lim(S(\omega)e_\alpha - e_\alpha) * x = S(\omega)x - x$. Введем функцию $f_\alpha = S(\omega)e_\alpha - e_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$. Ее преобразование Фурье $\hat{f}_\alpha(\lambda) = e^{i\lambda\omega}\hat{e}_\alpha(\lambda) - \hat{e}_\alpha(\lambda)$, причем $\hat{f}(0) = 0$, для любого $\alpha > 0$. В силу леммы 5, для каждого $\alpha > 0$ справедливо $f * x \in C_0(\mathbb{R})$, а из замкнутости пространства $C_0(\mathbb{R})$ следует, что для любого $\omega \in \mathbb{R}$ функция $S(\omega)x - x \in C_0(\mathbb{R})$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер. — М. : Физматлит, 1963. — 256 с.

2. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : «Наука», 1970. — 536 с.

3. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : Издательство иностранной литературы, 1962. — 830 с.

4. *Пак И. Н.* О суммах тригонометрических рядов / И. Н. Пак // Успехи математических наук. — 1980. — № 2. — Т. 35. — С. 91—140.

5. *Karamata M.* Sur un mode croissance reguliere theorems fundamentaux / M. Karamata // Bull. Soc. Math. de France, 1933, 61, P. 55—62.

6. *Hardy G. H.* A theorem concerning trigonometrical series / G. H. Hardy // J. London Math. Soc., 1928, 3, P. 12—13.

7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — М. : «Наука», 1985. — 142 с.

8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Гостехиздат, 1956.

9. *Schmidt M. R.* Uber divergent Folgen und linear Mittelbildurgen. — Math. Z., 1925, 22, S. 89—152.

10. *Hardy G. H.* Asymptotic fornulane for the sums of certain trigonometrical series / G. H. Hardy, W. W. Rogozinski // Quarterly J. of Math., 1945, 16, № 63-64, P. 50—58.

11. *Nguyen Van Minh.* A spectral theory of non-uniformly continuous functions and the Loomis-Arendt-Batty-Vu theory on the asymptotic behavior of solutions of evolution equations / N. Van Minh // arXivMath — 2009.

12. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж. : Изд-во ВГУ, 1987.

Воронежский государственный университет

Калужина Н. С., студентка факультета прикладной математики, информатики и механики

E-mail: kaluzhina-n-s@mail.ru

Тел.: 8-904-214-79-71, 8-904-697-08-38

Voronezh State University

Kaluzhina N. S., student of applied mathematics, information science and mechanics faculty

E-mail: kaluzhina-n-s@mail.ru

Tel.: 8-904-214-79-71, 8-904-697-08-38