УДК 517.518

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЮЩЕГО ЯВЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

С. П. Зубова, Е. В. Клочкова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.06.2010 г.

Аннотация. Исследуется линейная стационарная система управления с малым параметром при производной вектора состояний. Без ограничений на спектры матричных коэффициентов системы доказывается наличие явления погранслоя при управлении, построенном специальным образом.
Ключевые слова: управляемость, сингулярное возмущение, явление погранслоя.

Abstract. In this paper we investigate the linear stationary control system with small parameter at the derivative of the state vector. Without restrictions on the spectrum of the matrix coefficients of the system we prove the presence of the phenomenon of the boundary layer.
Keywords: controllability, singular perturbation, phenomenon of the boundary layer.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует большое число задач “на возмущение”, когда вместе с возмущенной задачей исследуется в известном смысле близкая к ней невозмущенная задача. Если возмущенная задача содержит малый параметр, то важно знать поведение решения задачи при стремлении параметра к нулю.

Пусть ε — малый параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $x(t,\varepsilon)$ — решение допредельной задачи, $\overline{x}(t)$ — решение предельной ($\varepsilon = 0$) задачи, $t \in [0,T]$.

При $\varepsilon \to 0$ возможны следующие ситуации

а) $x(t,\varepsilon) \Rightarrow \overline{x}(t),\ t \in [0,T]$;

б) $x(t,\varepsilon) \not\Rightarrow\ x(t)$;

в) $x(t,\varepsilon) \Rightarrow \overline{x}(t)$ на некотором подмножестве J множества $[0,T]$ и

$x(t,\varepsilon) \not\Rightarrow\ \overline{x}(t),\ t \in [0,T]$.

Символ $\not\Rightarrow$ означает: либо не стремится, либо стремится, но неравномерно.

Особенно интересен случай в), который происходит в так называемых *сингулярно возмущенных* задачах. В этом случае наблюдается *явление погранслоя,* когда происходит резкое изменение решения $x(t,\varepsilon)$ на множестве $[0,T] \setminus J$, называемом *погранслоем.*

Для исследования решения сингулярно возмущенных задач применялось много различных методов, самое большое распространение в последнее время получил, пожалуй, метод Вишика—Люстерника—Васильевой [1], [2]. Решение $x(t,\varepsilon)$ ищется в виде асимптотического разложения по степеням ε, содержащего в виде слагаемых функции погранслоя (функции, резко меняющие свое значение в погранслое) и решение предельного уравнения.

Как правило, явление погранслоя наблюдается в задаче лишь при выполнении некоторых свойств коэффициентов задачи, так называемых *условий регулярности* вырождения. В нелинейных задачах это условия на производные некоторых коэффициентов, в линейных — на спектры некоторых операторов.

В [3] рассмотрена сингулярно возмущенная линейная стационарная система управления при $t \in [0,T]$. Для управления системой получены условия регулярности вырождения задачи вблизи правого конца отрезка $[0,T]$, отдельно вблизи левого конца в виде ограничений на спектр некоторой матрицы.

В данной работе для той же системы строится управление, под воздействием которого наблюдается явление погранслоя сразу вблизи обоих концов отрезка $[0,T]$ и без каких-либо условий на спектры матричных коэффициентов (требуется лишь управляемость системы).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Динамическая система называется *полностью управляемой*, если под воздействием некоторого управляющего фактора (*управле-*

ния) она может быть переведена из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние за конечный промежуток времени.

Рассматривается полностью управляемая динамическая система, описываемая уравнением

$$\varepsilon \frac{\mathrm{dx}(\mathrm{t},\varepsilon)}{\mathrm{dt}} = Ax(t,\varepsilon) + Bu(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

где $x(t,\varepsilon) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t,\varepsilon) \in \mathfrak{R}^k$; A, B — постоянные матрицы соответствующих размеров, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Для произвольных x_0^{00}, $x_1^{00} \in \mathfrak{R}^n$ существует *управляющая* вектор-функция (*управление*) $u(t,\varepsilon)$, при подстановке которой в уравнение (1) решение $x(t,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$x(0,\varepsilon) = x_0^{00},\ \ x(T,\varepsilon) = x_1^{00}, \qquad (2)$$

с произвольными значениями x_0^{00}, $x_1^{00} \in \mathfrak{R}^n$.

Вектор-функция $x(t,\varepsilon)$ называется *вектором состояний* системы, *состоянием*, *траекторией*, *движением* системы.

Уравнение (1) называется *допредельным* ($\varepsilon \neq 0$).

Наряду с (1) рассматривается *предельное* ($\varepsilon = 0$) уравнение

$$0 = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t). \qquad (3)$$

Управляющую функцию системы (3) будем обозначать $\bar{u}(t)$, соответствующее ей состояние $\bar{x}(t)$.

Предельное уравнение (3) может быть полностью управляемым в том и только том случае, когда B — обратимая матрица, или $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$. Действительно, если B — обратима, то в качестве $\bar{u}(t)$ можно взять $\bar{u}(t) = -B^{-1}A\frac{x_1^{00} - x_0^{00}}{T}t - B^{-1}Ax_0^{00}$. Тогда $\bar{x}(t) = \frac{x_1^{00} - x_0^{00}}{T}t + x_0^{00}$.

Если же B — необратимая матрица, то уравнение (3)

$$B\bar{u}(t) = -A\bar{x}(t)$$

корректно, лишь если $A\bar{x}(t)$ принадлежит множеству значений B, в частности, $A\bar{x}(0) \in \operatorname{Im} B$, $\forall \bar{x}(0) \in \mathfrak{R}^k$, то есть $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$. И если $\operatorname{Im} A \not\subset \operatorname{Im} B$, то предельная система не является полностью управляемой, то есть не существует $\bar{x}(t)$, удовлетворяющей условиям (2) с произвольными значениями x_0^{00}, x_1^{00}.

Например, система

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + u, \\ \varepsilon \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$$

полностью управляема, а предельная система

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{u}, \\ 0 = \bar{x}_1 \end{cases}$$

имеет решение лишь если $\bar{x}_1(0) = 0$, $\bar{x}_1(T) = 0$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\operatorname{Im} A \not\subset \operatorname{Im} B$.

Заметим, если матрица B — обратима, то существует $u(t,\varepsilon) = \varepsilon B^{-1}\frac{x_1^{00} - x_0^{00}}{T} - B^{-1}A(\frac{x_1^{00} - x_0^{00}}{T}t + x_0^{00})$, при котором $x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t) = \frac{x_1^{00} - x_0^{00}}{T}t + x_0^{00}$. При этом $u(t,\varepsilon) \rightrightarrows \bar{u}(t)$ на $[0,T]$.

Мы будем рассматривать случай необратимой матрицы B и $B \neq A$. Наша цель — построение вектор-функции $u(t,\varepsilon)$, при подстановке которой в уравнение (1) решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t) + \upsilon(t,\varepsilon). \qquad (4)$$

Здесь $\upsilon(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t = 0$, $t = T$, то есть при $\varepsilon \to 0$ $\upsilon(t,\varepsilon) \rightrightarrows 0$, $t \in [t_0,t_1]$ $\forall t_0,t_1 \in (0,T)$ и $\upsilon(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows 0$, $t \in [0,T]$; $\bar{x}(t)$ — решение предельного уравнения (3), удовлетворяющее "части" краевых условий (2) (какой именно см. в п. 5). Наличие такой функции $\upsilon(t,\varepsilon)$ в (4) означает наличие явления погранслоя в задаче (1), (2).

При достижении цели функция управления $u(t,\varepsilon)$ также будет иметь вид

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + w(t,\varepsilon), \qquad (5)$$

где $w(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t = 0$, $t = T$.

3. МЕТОД

Для построения $u(t,\varepsilon)$ будем пользоваться методом, разработанном в [4], то есть методом каскадной декомпозиции уравнения, основанном на следующих свойствах.

Свойство 1. С помощью $G \in L(\mathfrak{R}^h, \mathfrak{R}^m)$ осуществляется разложение в прямые суммы

$$\mathfrak{R}^h = CoimG \dotplus KerG,\ \mathfrak{R}^m = \operatorname{Im} G \dotplus Co\ker G, \qquad (6)$$

где $KerG$ — ядро G, $\operatorname{Im} G$ — образ G, $CoimG$ — прямое дополнение к $KerG$ в $\mathfrak{R}^h$ (кообраз

G), $Co\ker G$ — прямое дополнение к $\operatorname{Im} G$ в $\Re^m$ (коядро G).

Причем, разложение (6) таково, что сужение $\tilde{G}$ отображения G на $CoimG$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между $CoimG$ и $\operatorname{Im} G$. Матрицу, обратную к матрице $\tilde{G}$, называют *полуобратной* и обозначают G^-.

Отображения и их матрицы будем обозначать одинаково; через $P(G)$ обозначим проектор на $KerG$, через $Q(G)$ — проектор на $Co\ker G$, отвечающие разложению (6); через I — единичную матрицу (тождественное отображение) в соответствующем пространстве. Имеем: $I - P(G)$ — проектор на $CoimG$, $I - Q(G)$ — проектор на $\operatorname{Im} G$.

Свойство 2. Уравнение

$$Gv = w\,,\ v \in \Re^h\,,\ w \in \Re^m$$

эквивалентно системе

$$Q(G)w = 0$$

$$v = G^- w + P(G)v$$

с произвольным элементом $P(G)v \in KerG$.

Свойство 3. (см.[4]). Система (1) является полностью управляемой в том и только том случае, когда $\exists p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p — сюрьективно.

Введем обозначения

$$A_0 = A,\ \ B_0 = B\,,$$

$$A_j = Q(B_{j-1})A_{j-1}Q(B_{j-1}), \qquad (7)$$

$$B_j = Q(B_{j-1})A_{j-1}(I - Q(B_{j-1})), \qquad (8)$$

$$B_j \in L(\operatorname{Im} B_{j-1}, Co\ker B_{j-1})\,,$$
$$A_j \in L(Co\ker B_{j-1}, Co\ker B_{j-1})\,,$$

$P(B_j)$ — проектор на $KerB_j$, $Q(B_j)$ — проектор на $Co\ker B_j$, $\operatorname{Im} B_{j-1} = CoimB_{j-2} \dotplus KerB_{j-2}$, $Co\ker B_{j-1} = \operatorname{Im} B_{j-2} \dotplus Co\ker B_{j-2}$.

При этом уравнение (1) эквивалентно системе

$$u^j(t,\varepsilon) = B_j^-(\varepsilon \frac{dx^j(t,\varepsilon)}{dt} - A_j x^j(t,\varepsilon)) + \alpha_j(t,\varepsilon), \quad (9)$$

$$x^j(t,\varepsilon) = x^{j+1}(t,\varepsilon) + u^{j+1}(t,\varepsilon),\ \ j = \overline{0, p-1}\,, \quad (10)$$

$$\varepsilon \frac{\mathrm{dx^p(t,\varepsilon)}}{\mathrm{dt}} = A_p x^p(t,\varepsilon) + B_p u^p(t,\varepsilon), \qquad (11)$$

где

$$x^j(t,\varepsilon) = Q(B_{j-1})x^{j-1}(t,\varepsilon), \qquad (12)$$

$$u^j(t,\varepsilon) = (I - Q(B_{j-1}))x^{j-1}(t,\varepsilon), \qquad (13)$$

$$x^0(t) = x(t),\ \ u^0(t) = u(t)\,.$$

Метод состоит в построении функции $x^p(t,\varepsilon)$, удовлетворяющей определенным краевым условиям (см. следующий пункт) и восстановлении последовательно из соотношений (9) — (11) вектор-функций $u^p(t)$, $x^{p-1}(t)$, $u^{p-1}(t)$, … $x^1(t)$, $u^1(t)$, $x(t)$, $u(t)$.

4. ПОЛУЧЕНИЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ $x_p(t,\varepsilon)$

Обозначим $t_0 = 0,\ t_1 = T$. В силу свойства (2) уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из соотношения (9) с $j = 0$ и уравнения

$$\varepsilon Q(B)\frac{dx}{dt} = Q(B)Ax(t)\,.$$

С помощью обозначения (12) с $j = 1$ его можно записать:

$$\varepsilon \frac{\mathrm{dx^1(t,\varepsilon)}}{\mathrm{dt}} = Q(B)Ax(t,\varepsilon)\,. \qquad (14)$$

Из (14) и условий (2) получаем

$$x^1(t_i,\varepsilon) = Q(B)x(t_i,\varepsilon) = Q(B)x_i^{00} = des. = x_i^{10}\,,\ \ i = 0,1\,,$$

$$\frac{\mathrm{dx^1}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon}Q(B)Ax(t_i,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}Q(B)Ax_i^{00} = des. = \frac{1}{\varepsilon}x_i^{11}$$

(символ “=des.=” означает “обозначим”).

Итак,

$$\frac{\mathrm{d^j x^1}(t)}{\mathrm{dt^j}}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^j}x_i^{1j}, \quad j = 0,1;\ \ i = 0,1\,. \quad (15)$$

Уравнение (14) можно записать, используя обозначения (7), (8), в виде

$$\varepsilon \frac{dx^1(t)}{dt} = A_1 x^1(t) + B_1 u^1(t)\,,$$

которое в силу свойства 2 эквивалентно системе, состоящей из соотношения (9) с $j = 1$ и уравнения

$$\varepsilon Q(B_1)\frac{dx^1(t)}{dt} = Q(B_1)A_1 x^1(t)\,,$$

то есть уравнения

$$\varepsilon \frac{dx^2(t)}{dt} = Q(B_1)A_1 x^1(t)\,.$$

Отсюда и из (15) получаются краевые условия для $x^2(t,\varepsilon)$:

$$x^2(t_i,\varepsilon) = Q(B_1)x^1(t_i,\varepsilon) = Q(B_1)x_i^{10} = des. = x_i^{20},\ \ i = 0,1\,,$$

$$\frac{\mathrm{dx^2(t,\varepsilon)}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon}Q(B_1)A_1 x^1(t_i,\varepsilon) = des. = \frac{1}{\varepsilon}x_i^{21}\,,$$

$$\frac{d^2x^2(t,\varepsilon)}{dt^2}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon}Q(B_1)A_1\frac{dx^1(t,\varepsilon)}{dt}\Big|_{t_i} = des. = \frac{1}{\varepsilon^2}x_i^{22},\ \ i=0,1\,,$$

то есть

$$\frac{d^jx^2}{dt^j}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^j}x_i^{2j}\,,\ \ j=0,\,1,\,2;\ \ i=0,\,1\,.$$

И так далее. Таким же образом получаются краевые условия для $x^p(t)$:

$$\frac{d^jx^p(t,\varepsilon)}{dt^j}\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^j}x_i^{pj},\ \ i=0,1,\ \ j=\overline{0,p}\,. \qquad (16)$$

Таким образом, уравнение (1) с условиями (2) эквивалентно системе (9) — (11) с условиями (16). При этом

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= x^1(t,\varepsilon)+u^1(t,\varepsilon) = \\ &= x^2(t,\varepsilon)+u^2(t,\varepsilon)+u^1(t,\varepsilon) = \ldots = \\ &= x^p(t,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{p}u^s(t,\varepsilon) = \qquad (17)\\ &= x^p(t,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{p}(I-P(B_s))u^s(t,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{p}P(B_s)u^s(t,\varepsilon) = \\ &= x^p(t,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{p}(I-P(B_s))u^s(t,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{p}\alpha_s(t,\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь $x^p(t,\varepsilon)$ и $\alpha_s(t,\varepsilon)$ — произвольные достаточно гладкие вектор-функции из соответствующих подпространств, удовлетворяющие краевым условиям (16) и

$$\frac{d^s}{dt^s}\alpha_j(t,\varepsilon)\Big|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^s}P(B_j)(I-Q(B_{j-1}))x_i^{j-1,s-1},$$

$$s=\overline{0,j-1},\ \ j=\overline{1,p}\,. \qquad (18)$$

5. РЕШЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Перейдем к исследованию предельного уравнения (3). Оно эквивалентно системе

$$\bar{u}(t) = -B^-A\bar{x}(t)+\beta(t),\ \ \forall\beta(t)\in\Re^k, \qquad (19)$$

$$Q(B)A\bar{x}(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]. \qquad (20)$$

При этом $\bar{x}(t) = Q(B)\bar{x}(t)+(I-Q(B))\bar{x}(t)$.

Тогда уравнение (20) имеет вид

$$A_1\bar{x}^1(t)+B_1\bar{u}^1(t)=0, \qquad (21)$$

где

$$\bar{x}^1(t) = Q(B)\bar{x}(t),$$

$$\bar{u}^1(t) = (I-Q(B))\bar{x}(t).$$

В свою очередь, уравнение (21) расщепляется на два соотношения и так далее, то есть уравнение (3) эквивалентно системе

$$\bar{u}^j(t) = -B_j^-A_j\bar{x}^j(t)+\beta_j(t),\ \ \forall\beta_j(t)\in KerB_j\,, \qquad (22)$$

$$\bar{x}^j(t) = \bar{x}^{j+1}(t)+\bar{u}^{j+1}(t),\ \ j=\overline{0,p-1}\,, \qquad (23)$$

$$A_p\bar{x}^p(t)+B_p\bar{u}^p(t)=0, \qquad (24)$$

$$\bar{u}^0(t)=\bar{u}(t)\,,\ \ \bar{x}^0(t)=\bar{x}(t)\,;$$

A_p, B_p определяются формулами (7), (8).

Получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}^1(t)+\bar{u}^1(t) = \bar{x}^2(t)+\bar{u}^2(t)+\bar{u}^1(t) = \ldots \\ &= \bar{x}^p(t)+\sum_{s=1}^{p}\bar{u}^s(t) = \\ &= \bar{x}^p(t)+\sum_{s=1}^{p}(I-P(B_s))\bar{u}^s(t)+\sum_{s=1}^{p}P(B_s)\bar{u}^s(t) = \\ &= \bar{x}^p(t)+\sum_{s=1}^{p}(I-P(B_s))\bar{u}^s(t)+\sum_{s=1}^{p}\beta_s(t). \end{aligned} \qquad (25)$$

Часть функций, входящих в (25) можно взять равными соответствующим функциям, входящим в представление (17), но, поскольку решение $x(t)$ предельного уравнения (3) не может зависить от ε, то приравнивать можно лишь те слагаемые в (17), которые не зависят от ε. А это лишь $\beta_s(t)$, и каждая функция $\beta_s(t)$ может удовлетворить условиям

$$\beta_s(t) = P(B_s)(I-Q(B_{s-1}))x_i^{s-1,0},\ \ s=\overline{1,p},\ \ i=0,1.$$

Итак, решение $\bar{x}(t)$ предельного уравнения (3) с любой возможной вектор-функцией $\underline{u}(t)$ может удовлетворить лишь «части» условий (2):

$$\begin{aligned} &P(B_s)(I-Q(B_{s-1}))\bar{x}^{s-1}(t_i) = \\ &= P(B_s)(I-Q(B_{s-1}))x^{s-1}(t_i,\varepsilon) = \\ &= P(B_s)(I-Q(B_{s-1}))x_i^{s-1,0},\ s=\overline{1,p}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Поэтому система (1) является сингулярно возмущенной.

6. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения поставленной задачи используем следующую лемму.

Лемма. *Для любых значений* $y_i^j\in\Re^h,\ j=\overline{0,r-1},\ i=0,1$ *существует функция погранслоя* $\upsilon(t,\varepsilon)$ *вблизи точек* $t=t_0$ *и* $t=t_1$, *удовлетворяющая условиям*

$$\frac{d^j}{dt^j}\upsilon(t,\varepsilon)\big|_{t_i}=\frac{1}{\varepsilon^j}y_i^j. \qquad (27)$$

Доказательство. Для простоты возьмем $t_0=0, t_1=T$. Построим функцию $\upsilon(t,\varepsilon)$, например, в виде

$$\upsilon(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s(\varepsilon)e^{-\frac{st}{\varepsilon}}+\sum_{s=1}^{r}\beta_s(\varepsilon)e^{\frac{st}{\varepsilon}} \qquad (28)$$

где

$$\alpha_s=(\alpha_{s1},\alpha_{s2},...,\alpha_{sh}),\ \beta_s=(\beta_{s1},\beta_{s2},...,\beta_{sh}).$$

Условия (27) для компонент $\upsilon_1(t,\varepsilon),...,\upsilon_h(t,\varepsilon)$ вектор-функции $\upsilon(t,\varepsilon)$ приобретают вид

$$\frac{d^j}{dt^j}\upsilon_k(t,\varepsilon)\big|_{t_i}=\frac{1}{\varepsilon^j}y_{ik}^j, k=\overline{1,h}, \qquad (29)$$

где y_{ik}^j — к-тая компонента элемента y_i^j. Подставив выражение (28) в условия (29), получаем для каждого k системы

$$\sum_{s=1}^{r}\alpha_{sk}+\sum_{s=1}^{r}\beta_{sk}=y_{0k}^0,$$

$$\sum_{s=1}^{r}(-s)\alpha_{sk}+\sum_{s=1}^{r}s\beta_{sk}=y_{0k}^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{s=1}^{r}(-s)^{r-1}\alpha_{sk}+\sum_{s=1}^{r}s^{r-1}\beta_{sk}=y_{0k}^{r-1},$$

$$\sum_{s=1}^{r}\alpha_{sk}e^{-\frac{sT}{\varepsilon}}+\sum_{s=1}^{r}\beta_{sk}e^{\frac{sT}{\varepsilon}}=y_{1k}^0,$$

$$\sum_{s=1}^{r}(-s)\alpha_{sk}e^{-\frac{sT}{\varepsilon}}+\sum_{s=1}^{r}s\beta_{sk}e^{\frac{sT}{\varepsilon}}=y_{1k}^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{s=1}^{r}(-s)^{r-1}\alpha_{sk}e^{-\frac{sT}{\varepsilon}}+\sum_{s=1}^{r}s^{r-1}\beta_{sk}e^{\frac{sT}{\varepsilon}}=y_{1k}^{r-1},\ \ k=\overline{1,h}.$$

Первые r строк главного определителя Δ этих систем совпадают с r строками определителя Вронского для функций $e^{-\frac{t}{\varepsilon}},e^{-\frac{2t}{\varepsilon}},e^{-\frac{3t}{\varepsilon}},...,e^{\frac{t}{\varepsilon}},e^{\frac{2t}{\varepsilon}},...,e^{\frac{rt}{\varepsilon}}$ в точке $t=0$, и последние r строк с r строками такого же определителя в точке $t=T$. Такие определители отличны от нуля, и для системы (29) имеем:

$$\Delta=ce^{(1+2+...+k)\frac{T}{\varepsilon}}=ce^{\frac{k(k+1)}{2}\frac{T}{\varepsilon}},$$

где c — некоторая скалярная постоянная, не зависящая от ε.

Определители $\Delta_{sk}, s=\overline{1,r}$ для нахождения коэффициентов α_{sk} имеют тот же порядок по ε, что и Δ, поскольку они отличаются от Δ s-тым столбцом, а в этих столбцах стоят либо числа, либо, $e^{-\frac{st}{\varepsilon}}$ то есть

$$\Delta_{sk}=c_{sk}e^{\frac{k(k+1)}{2}\frac{T}{\varepsilon}}+o(e^{\frac{k(k+1)}{2}\frac{T}{\varepsilon}}),$$

где c_{sk} — скалярные постоянные, не зависящие от ε, о — есть о-малое в окрестности точки $\varepsilon=0$. Поскольку

$$\alpha_{sk}=\frac{\Delta_{sk}}{\Delta}, \qquad (30)$$

то

$$c_s'\le\|\alpha_s\|\le c_s, s=\overline{1,r}, \qquad (31)$$

с постоянными c_s' и c_s не зависящими от ε.

Определитель $\Delta_{r+1,k}$ получается из Δ заменой столбца, содержащего $e^{\frac{T}{\varepsilon}}$, на столбец свободных членов, следовательно,

$$\Delta_{r+1,k}=c_{r+1,k}e^{(\frac{k(k+1)}{2}-1)\frac{T}{\varepsilon}}+o(e^{(\frac{k(k+1)}{2}-1)\frac{T}{\varepsilon}}),$$

где $c_{r+1,k}$ — постоянные, не зависящие от ε. Тогда

$$\beta_{1k}=\frac{\Delta_{r+1,k}}{\Delta}=c_{1k}e^{-\frac{T}{\varepsilon}}+o(e^{-\frac{T}{\varepsilon}}). \qquad (32)$$

В $\Delta_{r+2,k}$ отсутствуют функции $e^{\frac{2T}{\varepsilon}}$, поэтому

$$ё\Delta_{r+2,k}=c_{r+2,k}e^{(\frac{k(k+1)}{2}-2)\frac{T}{\varepsilon}}+o(e^{(\frac{k(k+1)}{2}-2)\frac{T}{\varepsilon}}),\ \ \varepsilon\to0$$

и

$$\beta_{2k}=\frac{\Delta_{r+2,k}}{\Delta}=c_{2k}e^{-\frac{2T}{\varepsilon}}+o(e^{-\frac{2T}{\varepsilon}}), \qquad (33)$$

с постоянными c_{2k}, не зависящими от ε. Аналогично

$$\beta_{sk}=c_{sk}e^{-\frac{sT}{\varepsilon}}+o(e^{-\frac{sT}{\varepsilon}}),\ \ s=\overline{3,r}. \qquad (34)$$

Подставив выражения (30), (32)—(34) в (28) получаем:

$$\upsilon(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s(\varepsilon)e^{-\frac{st}{\varepsilon}}+\sum_{s=1}^{r}c_se^{\frac{s(t-T)}{\varepsilon}}+\omega(t,\varepsilon). \qquad (35)$$

Здесь $\alpha_s(\varepsilon)$ — равномерно ограниченные по ε элементы из $\Re^h$, $c_s\in\Re^h$ — постоянные, $\omega(t,\varepsilon)$ — бесконечно малая в окрестности $\varepsilon=0$ вектор-функция из $\Re^h$. Вектор-функция $\upsilon(t,\varepsilon)$ является функцией погранслоя вблизи точек $t=0$ и $t=T$.

Замечание. Если условия (27) заменить условиями

$$\frac{d^j}{dt^j}\upsilon(t,\varepsilon)\,|_{t_i} = y_i^j,\ \ j=\overline{0,r-1},\ \ i=0,1,$$

и строить $\upsilon(t,\varepsilon)$ в виде (28), то системы для определения α_{sk} и β_{sk} будут отличаться от системы (29) лишь столбцом свободных членов: вместо y_{0k}^j будут стоять $\varepsilon^j y_{0k}^j$, вместо y_{1k}^j — выражения $\varepsilon^j y_{1k}^j$, $j=\overline{0,r-1}$. Поэтому в выражении (35) некоторые слагаемые (а может быть и все) могут замениться бесконечно малыми вектор-функциями в окрестности $\varepsilon = 0$. То есть $\upsilon(t,\varepsilon)$ либо останется функцией погранслоя вблизи точек $t=0$ и $t=T$, либо будет функцией погранслоя в окрестности одной точки $t=0$ или $t=T$, или станет бесконечно малой.

Если же условия для $\upsilon(t,\varepsilon)$ имеют вид

$$\frac{d^j}{dt^j}\upsilon(t,\varepsilon)\,|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^j}y_i^j + z_i^j,\ \ j=\overline{0,r-1},\ i=0,1, \tag{36}$$

$y_i^j, z_i^j \in \Re^h$, то $\upsilon(t,\varepsilon)$, строящаяся в виде (28), будет иметь окончательный вид (35).

7. РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Возьмем произвольную непрерывно дифференцируемую $(p+1)$ раз вектор-функцию $\overline{x}^p \in Co\ker B_{p-1}$. В качестве $\beta_s(t)$ возьмем произвольные достаточно гладкие вектор-функции из $KerB_s$, удовлетворяющие условиям

$$\beta_s(t_i) = P(B_s)(I - Q(B_{s-1}))x_i^{s-1,0},\ \ i=0,1,\ \ s=\overline{1,p}.$$

Благодаря сюрьективности матрицы B_p найдем $\overline{u}^p(t)$ из уравнения (24) (формула (22) с $j=p$). По формуле (23) с $j=p-1$ определим $\overline{x}^{p-1}(t)$, затем по формуле (22) с $j=p-1$ — функцию $\overline{u}^{p-1}(t)$. И так далее. Наконец, построим $x(t)=\overline{x}_{-1}(t)+\overline{u}_{-1}(t)$.

Итак, построена вектор-функция $\overline{x}(t)$, являющаяся решением уравнения (3) при $\overline{u}(t)$, построенной по формуле (19) с произвольной вектор-функцией $\beta(t)\in KerB$.

Перейдем к построению функции состояния $x(t,\varepsilon)$ и функции управления $u(t,\varepsilon)$ системы (1) с условиями (2). Построим $x^p(t,\varepsilon)$ в виде

$$x^p(t,\varepsilon) = \overline{x}^p(t) + \upsilon_p(t,\varepsilon), \tag{37}$$

где $\overline{x}^p(t)$ — построенная в п.5 вектор-функция, $\upsilon_p(t,\varepsilon)$ — функция вида (25). Для $\upsilon_p(t,\varepsilon)$ получаем из (16) условия:

$$\frac{d^j}{dt^j}\upsilon_p(t,\varepsilon)\,|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^j}x_i^{pj} - \frac{d^j}{dt^j}\overline{x}^p(t)\,|_{t_i},$$

то есть условия вида (36). Вследствие замечания к лемме, полученная функция $\upsilon_p(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t=0$ и $t=T$. Затем находим $u^p(t,\varepsilon)$ по формуле (9) с $j=p$. Для этого элемент $\alpha_p(t,\varepsilon)$ возьмем в виде $\alpha_p(t,\varepsilon)=\beta_p(t)+\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon)$. Для $\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon)$ получаем с помощью (18) краевые условия

$$\frac{d^s}{dt^s}\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon)\,|_{t_i} = \frac{1}{\varepsilon^s}(I-Q(B_{p-1}))x_i^{p-1,s-1} - \frac{d^s}{dt^s}\beta_p(t)\,|_{t_i},$$
$$s=\overline{0,p-1}.$$

Построенная в виде (28) функция $\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon)$ будет функцией погранслоя и, следовательно, $u^p(t,\varepsilon)$ имеет вид:

$$u^p(t,\varepsilon) = -B_p^+A_p\overline{x}^p(t) + P(B_p)\beta_p(t) +$$
$$+\varepsilon B_p^+\frac{d\overline{x}^p(t)}{dt} + \varepsilon B_p^+\frac{d\upsilon_p(t,\varepsilon)}{dt} - B_p^+A_p\upsilon_p(t,\varepsilon) +$$
$$+\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon).$$

И поскольку $\varepsilon B_p^+\dfrac{d\overline{x}^p(t)}{dt}$ — бесконечно мало, а функции $\varepsilon B_p^+\dfrac{d\upsilon_p}{dt}$, $B_p^+A_p\upsilon_p(t,\varepsilon)$ и $\tilde{\upsilon}_p(t,\varepsilon)$ — есть функции погранслоя вида (28), то

$$u^p(t,\varepsilon) = \overline{u}^p(t) + \omega_p(t,\varepsilon), \tag{38}$$

с функцией погранслоя $\omega_p(t,\varepsilon)$ вблизи точек $t=0$ и $t=T$.

Далее по формуле (9) с $j=p-1$ находится функция $x^{p-1}(t,\varepsilon)$. Вследствие выражений (37), (38) и (26) получаем

$$x^{p-1}(t,\varepsilon) = \overline{x}^p(t) + \upsilon_p(t,\varepsilon) + \overline{u}^p(t) + \omega_p(t,\varepsilon),$$

то есть

$$x^{p-1}(t,\varepsilon) = \overline{x}^{p-1}(t) + \upsilon_{p-1}(t,\varepsilon)$$

с функцией погранслоя $\upsilon_{p-1}(t,\varepsilon)$.

Для дальнейших построений вектор-функций $u^{p-1}(t,\varepsilon)$, $x^{p-2}(t,\varepsilon)$, ... , $x(t,\varepsilon)$ следует в качестве элементов $\alpha_j(t,\varepsilon)$ брать $\beta_j(t)+\tilde{\upsilon}_j(t,\varepsilon)$, $j=\overline{2,p-1}$, для $\tilde{\upsilon}_j(t,\varepsilon)$ находить краевые условия и строить $\tilde{\upsilon}_j(t,\varepsilon)$ в виде (28). Функцию $\beta_1(t)$ возьмем равной $\alpha_1(t,\varepsilon)$. Окончательно получим

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t) + \upsilon(t,\varepsilon),$$
$$u(t,\varepsilon) = \overline{u}(t) + \omega(t,\varepsilon)$$

с функциями погранслоя $\upsilon(t,\varepsilon)$, $\omega(t,\varepsilon)$. То есть в задаче (1), (2) наблюдается явление погранслоя.

8. ВЫВОД

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для каждой непрерывной управляющей функции* $\overline{u}(t)$ *предельной системы* (3) *существует управляющая функция* $u(t,\mu)$ *системы* (1) *с условиями* (2), *под воздействием которой функция состояния* $x(t,\mu)$ *системы* (1), (2) *имеет вид*

$$x(t,\mu) = \overline{x}(t) + \upsilon(t,\mu),$$

где $\overline{x}(t)$ *— состояние предельной системы* (3), *соответствующее управляющей функции* $\overline{u}(t)$. *При этом*

$$u(t,\mu) = \overline{u}(t) + \omega(t,\mu)$$

и $\upsilon(t,\mu), \omega(t,\mu)$ *— функции погранслоя вблизи точек* $t = 0$ *и* $t = T$.

9. ПРИМЕР

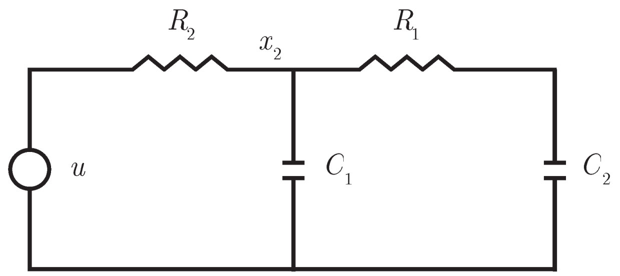

Рис.1.

Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис.1. Здесь R_1, R_2 — сопротивления цепи, C_1, C_2 — ёмкости конденсаторов, $x_1(t), x_2(t)$ — напряжения на ёмкостях, $u(t)$ — входное напряжение (управляющая функция).

Изображенная на рис. 1 схема моделируется уравнениями

$$\begin{cases} R_1C_1\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t), \\ R_2C_2\dot{x}_2(t) = \dfrac{R_2}{R_1}x_1(t) - (1 + \dfrac{R_2}{R_1})x_2(t) + u(t). \end{cases} \quad (39)$$

Пусть C_1 и C_2 малы: $C_1 = \varepsilon$, $C_2 = k\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, k — некоторый коэффициент.

Получим систему

$$\begin{cases} \varepsilon R_1\dot{x}_1(t,\varepsilon) = -x_1(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon), \\ \varepsilon kR_2\dot{x}_2(t,\varepsilon) = \dfrac{R_2}{R_1}x_1(t,\varepsilon) - (1 + \dfrac{R_2}{R_1})x_2(t,\varepsilon) + u(t,\varepsilon). \end{cases} \quad (40)$$

Пусть заданы условия

$$\begin{aligned} x_1(0,\varepsilon) &= x_1^0, \\ x_1(T,\varepsilon) &= x_1^T, \\ x_2(0,\varepsilon) &= x_2^0, \\ x_2(T,\varepsilon) &= x_2^T. \end{aligned} \quad (41)$$

Требуется исследовать поведение $x_i(t,\varepsilon)$ данной системы при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим предельную систему

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1(t) = \overline{x}_2(t), \\ R_2\overline{x}_1(t) - (R_1 + R_2)\overline{x}_2(t) + R_1\overline{u}(t) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

с условиями $\overline{x}_1(0) = x_1^0$, $\overline{x}_1(T) = x_1^T$.

Система (42) получается из системы (40) при $\varepsilon = 0$.

Так как $\dot{\overline{x}}_1(t) = \overline{x}_2(t)$, то из второго уравнения системы (42) находим $\overline{u}(t) = \overline{x}_2(t) = \dot{\overline{x}}_1(t)$. В качестве $\overline{x}_1(t)$ можно взять произвольную функцию, удовлетворяющую первым двум условиям в (41). Возьмем $x_1(t,\varepsilon) = x_1(t) = \overline{x}_1(t)$. Функцию $x_2(t,\varepsilon)$ будем искать в виде

$$x_2(t,\varepsilon) = \overline{x}_2(t) + v(t,\varepsilon), \quad (43)$$

где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$.

Найдем условия, которым удовлетворяет функция $v(t,\varepsilon)$.

Так как $v(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon) - \overline{x}_2(t)$, то

$$\begin{aligned} v(0,\varepsilon) &= x_2(0,\varepsilon) - \overline{x}_2(0) = x_2^0 - x_1^0, \\ v(T,\varepsilon) &= x_2(T,\varepsilon) - \overline{x}_2(T) = x_2^T - x_1^T. \end{aligned} \quad (44)$$

Будем искать функцию $v(t,\varepsilon)$, удовлетворяющую условию (44), в виде:

$$v(t,\varepsilon) = c_1e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + c_2e^{\frac{t}{\varepsilon}}. \quad (45)$$

Найдем коэффициенты c_1, c_2. Для этого составим и решим систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_2^0 - x_1^0, \\ c_1e^{-\frac{T}{\varepsilon}} + c_2e^{\frac{T}{\varepsilon}} = x_2^T - x_1^T. \end{cases}$$

Получим

$$v(t,\varepsilon) = (x_2^0 - x_1^0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (x_2^T - x_1^T)e^{\frac{t-T}{\varepsilon}}. \quad (46)$$

Таким образом, функция $x_2(t,\varepsilon)$ будет построена.

Из второго уравнения системы (40) найдем $u(t,\varepsilon)$

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon kR_2\dot{x}_2(t,\varepsilon) - \frac{R_2}{R_1}x_1(t,\varepsilon) + (1 + \frac{R_2}{R_1})x_2(t,\varepsilon). \quad (47)$$

Подставим в (47) $x_1(t) = \bar{x}_1(t)$ и выражение (43). Получим

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon k R_2(\dot{\bar{x}}_2(t) - \frac{1}{\varepsilon}(x_2^0 - x_1^0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(x_2^T - x_1^T)e^{\frac{t-T}{\varepsilon}}) - \frac{R_2}{R_1}\bar{x}_1(t) + (1+\frac{R_2}{R_1})(\bar{x}_2(t) +$$

$$+(x_2^0 - x_1^0)e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + (x_2^T - x_1^T)e^{\frac{t-T}{\varepsilon}}) =$$

$$= \varepsilon k R_2 \dot{\bar{x}}_2(t) - (kR_2(x_2^0 - x_1^0) - (1+\frac{R_2}{R_1})(x_2^0 - x_1^0))e^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$

$$+(kR_2(x_2^T - x_1^T) + (1+\frac{R_2}{R_1})(x_2^T - x_1^T))e^{\frac{t-T}{\varepsilon}} -$$

$$-\frac{R_2}{R_1}\bar{x}_1(t) + (1+\frac{R_2}{R_1})\bar{x}_2(t).$$

Отсюда $u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + \omega(t,\varepsilon)$, где $\omega(t,\varepsilon)$ — функция, равная

$$\omega(t,\varepsilon) = \varepsilon k R_2 \dot{\bar{x}}_2(t) - (kR_2(x_2^0 - x_1^0) -$$

$$-(1+\frac{R_2}{R_1})(x_2^0 - x_1^0))e^{-\frac{t}{\varepsilon}} +$$

$$+(kR_2 + (1+\frac{R_2}{R_1}))(x_2^T - x_1^T)e^{\frac{t-T}{\varepsilon}},$$

и $\omega(t,\varepsilon) \rightrightarrows 0, \varepsilon \to 0, t \in [t_0, t_1], \forall t_0, t_1 \in (0,T)$ и $\omega(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows 0,\ \varepsilon \to 0,\ t \in [0,\ T]$, то есть $\omega(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t = 0,\ t = T$.

Таким образом, если управлять системой (40), (41) с помощью $u(t,\varepsilon) = \varepsilon k R_2 \dot{x}_2 - \frac{R_2}{R_1}x_1 + +(1+\frac{R_2}{R_1})x_2$, где $x_1(t)$ — любая функция, удовлетворяющая первым двум условиям в (41), а $x_2(t,\varepsilon)$ определяется формулой (43), то состояние (x_1, x_2) исходной системы стремится к состоянию $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ предельной системы равномерно на $[t_0, t_1]$ $\forall t_0, t_1 \in (0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ и неравномерно на $[0,T]$.

Задача является сингулярно возмущенной и в ней наблюдается явление погранслоя вблизи точек $t = 0,\ t = T$ без каких-либо условий на $R_1,\ R_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М. И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И.Вишик, Л. А. Люстерник // УМН. 1957, т. XII, вып. 5 (77), с. 3 — 122.

2. *Васильева А. Б.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.

3. *Раецкая Е. В.* Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем // Диссертация канд. физ.мат. наук, Воронеж, 2004. — 149 с.

4. *Зубова С. П.* О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика. — 2008. — 11. — С. 41 — 47.

Зубова Светлана Петровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского государственного университета

Тел.:(4732) 666–076

E-mail: spzubova@mail.ru

Клочкова Евгения Валентиновна — аспирантка кафедры математического анализа Воронежского государственного университета

Тел.:(4732) 426-567

E-mail: evgenia.klochkova@yandex.ru

Zubova Svetlana P. — the candidate of physical and mathematical sciences, Assistant professor, the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University.

Tel. :(4732) 666-076

E-mail: spzubova@mail.ru

Klochkova Evgeniya V. — Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University

Tel.:(4732) 426-567

E-mail: evgenia.klochkova@yandex.ru