УДК 517.518

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМЫ

С. П. Зубова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.03.2010

Аннотация. Выводится критерий полной управляемости стационарной динамической системы, описываемой линейным алгебро-дифференциальным соотношением, коэффициенты которого — прямоугольные матрицы.
Ключевые слова. Дескрипторная система, полная управляемость, прямоугольные матрицы, критерий.

Abstract. The criterian of full controllability for a nonvariable dinamic systems,that described with linear differential-algebraic correlation with rectangular-matrix coefficients, are derived.
Key words. Descriptor system, full controllability, rectangular matrix, criterial.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается динамическая система, описываемая дифференциальным соотношением

$$A\dot{x} = Bx(t) + Du(t)\,, \tag{1}$$

где

$$A, B \in L(R^k, R^n)\,,\ D \in L(R^s, R^n)\,,$$
$$t \in \left[0, T\right],\ x(t) \in R^k\,,\ u(t) \in R^s\,.$$

Система является дескрипторной, поскольку матрица при производной необратима.

Динамическая система называется полностью управляемой, если существует управление, под воздействием которого система переводится из произвольного начального состояния в любое конечное состояние за произвольный промежуток времени.

Система (1) является полностью управляемой в том случае, когда существует вектор - функция $u(t)$ (функция управления, управление) такая, что при подстановке её в (1) решение $x(t)$ дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условиям

$$x(0) = x^0\,,\quad x(T) = x^T \tag{2}$$

с произвольными значениями x^0, $x^T \in R^k$, $T > 0$. Вектор-функция $x(t)$ называется функцией состояния системы, состоянием.

В работах [1], [2] рассматривался случай квадратных матриц A, B и обратимости матрицы $A - \lambda B$ при некотором значении $\lambda \in C$.

В работе [3] для прямоугольных матриц A и B был получен критерий существования $x(t)$ и $u(t)$, удовлетворяющих (1), (2) в виде, содержащем проекторы на различные подпространства (приводится ниже).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В настоящей работе выводится критерий, формулирующийся следующим образом.

Система (1), (2) *является полностью управляемой в том и только том случае, когда выполняются условия:*

(k_1) *существуют* $\varepsilon \in C \setminus \{0\}$ *и* $\upsilon \in R^n$ *такие, что при каждом* ε *и* υ *уравнение*

$$(A - \varepsilon B)y = \upsilon \tag{3}$$

имеет единственное решение $y \in R^k$;

(k_2) уравнение

$$Ay + Dz = B\upsilon \tag{4}$$

имеет решение (y, z) для любых $\upsilon \in R^k$;

(k_3) *существует решение* (y, z) *уравнения*

$$(B - \lambda A)y + Dz = A\upsilon \tag{5}$$

для любых $\lambda \in C$ и $\upsilon \in R^k$.

Доказательство. Условие (k_1) эквивалентно тому, что дифференциальное уравнение (1) имеет единственное решение $x(t)$, принадлежащее некоторому подпространству в R^k, для каждого допустимого $u(t)$ (см.[4]), то есть траектория динамической системы под воздействием конкретного управления проходит через заданные точки $(0, x^0)$, (T, x^T).

Пример 1, подтверждающий необходимость условия (k_1). Пусть $n = k = 2$,

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Условия (k_2) и (k_3) выполняются, а условие (k_1) — нет. Действительно, уравнение (3) – это система

$$\begin{cases}y_1=\upsilon_1,\\-\varepsilon y_1=\upsilon_2,\end{cases}$$

имеющая неединственное решение (υ_1,y_2) с $\upsilon_2=-\varepsilon\upsilon_1$ и любым $y_2\in R^1$. Система (1) при таких A, B, D не является полностью управляемой. В самом деле, система (1), (2) – это система

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=u_1,\\0=x_1+u_2,\end{cases}$$

$$x_1(0)=x_1{}^0,x_1(T)=x_1{}^T,x_2(0)=x_2{}^0,x_2(T)=x_2{}^T.$$

В качестве управляющей функции $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ можно взять:

$$u_1(t)=\frac{x_1{}^T-x_1{}^0}{T},\ u_2(t)=-\frac{x_1{}^T-x_1{}^0}{T}t-x_1{}^0.$$

Под воздействием такого управления $x_1(t)=\dfrac{x_1{}^T-x_1{}^0}{T}t+x_1{}^0.$

Но $x_2(t)$ не участвует в системе (1), и хотя существуют $x_1(t)$, $x_2(t)$, удовлетворяющие условиям (1) и (2), но $x_2(t)$ не обязано быть таковым.

Для доказательства теоремы введём обозначения:

Q_D и P_D — проекторы на $Co\ker D$ и $KerD$ соответственно, отвечающие разложениям

$$R^s=CoimD\dot{+}KerD,\ R^n=\operatorname{Im}D\dot{+}Co\ker D;$$

I – единичная матрица в соответствующем пространстве; $C=Q_DA$,

Q_C и P_C – проекторы на $Co\ker C$ и $KerC$, соответственно, отвечающие разложениям

$$R^k=CoimC\dot{+}KerC,$$

$$Co\ker D=\operatorname{Im}C\dot{+}Co\ker C;$$

C^+ — обратная к сужению $\tilde{C}$ матрицы C на $CoimC$, то есть $C^+=\tilde{C}^{-1}(I-Q_C)$.

Воспользуемся результатом работы [3]: *существуют функции $u(t)$ и $x(t)$ такие, что выполняются равенства* (1) *и* (2), *в том и только том случае, когда*

$$(j_1)\quad Q_CQ_DB=0; \tag{6}$$

(j_2) система

$$\begin{gathered}\frac{d(I-P_C)x}{dt}=C^+Q_DB(I-P_C)\cdot\\ \cdot((I-P_C)x(t))+C^+Q_DBP_C(P_Cx(t))\end{gathered} \tag{7}$$

с управляющей функцией $P_Cx(t)$, функцией состояния $(I-P_C)x(t)$ и условиями

$$\begin{gathered}(I-P_C)x(0)=(I-P_C)x^0,\\(I-P_C)x(T)=(I-P_C)x^T,\end{gathered} \tag{8}$$

$$P_Cx(0)=P_Cx^0,\ P_Cx(T)=P_Cx^T \tag{9}$$

является полностью условно управляемой, то есть существует функция $P_Cx(t)$, удовлетворяющая условиям (9) *и такая, что при подстановке её в уравнение* (7), *полученное уравнение имеет решение $(I-P_C)x(t)$, удовлетворяющее условиям* (8).

Докажем справедливость следующих результатов.

Лемма 1. *Условие* (6) *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (k_2).*

Действительно, равенство (6) эквивалентно системе

$$\begin{cases}Q_DAy=Q_DB\upsilon,\\z=D^+B\upsilon-D^+Ay+P_Dz,\end{cases} \tag{10}$$

где P_Dz – произвольный элемент из $KerD$.

Первое соотношение в этой системе – это уравнение

$$Cy=Q_DB\upsilon.$$

Оно эквивалентно соотношениям

$$Q_CQ_DB\upsilon=0, \tag{11}$$

$$y=C^+Q_DB\upsilon+P_Cy, \tag{12}$$

где P_Cy — произвольный элемент из $KerC$.

Таким образом, существует решение (y,z) уравнения (4), определяемое формулами (12), (10), при любом $\upsilon\in R^k$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (11) при любом $\upsilon\in R^k$, то есть когда $Q_CQ_DB=0$.

Лемма 2. *При выполнении условия (k_2) (или (j_1)) условия (k_3) и (j_2) эквивалентны.*

В самом деле, уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases}(Q_DB-\lambda Q_DA)y=Q_DA\upsilon\\z=D^+A\upsilon-D^+(B-\lambda A)y+P_Dz,\end{cases}$$

где P_Dz – произвольный элемент из $KerD$.

Первое соотношение этой системы – это уравнение

$$(Q_DB-\lambda C)y=C\upsilon.$$

В свою очередь оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} Q_C Q_D B y = 0, \\ C^+ Q_D B y - \lambda (I - P_C) y = (I - P_C)\upsilon. \end{cases}$$

Первое соотношение последней системы выполняется в силу условия (k_2) и леммы 1, а последнее соотношение эквивалентно следующему равенству:

$$\begin{gathered} (C^+ Q_D B(I - P_C) - \lambda I)((I - P_C)y) + \\ + C^+ Q_D B P_C (P_C y) = (I - P_C)\upsilon. \end{gathered}$$

Требование (k_3) означает, что это уравнение имеет решение $((I - P_C)y, P_C y)$ при любых $\lambda \in C$ и $\upsilon \in R^k$, то есть

$$rank(C^+ Q_D B(I - P_C) - \lambda I \quad C^+ Q_D B P_C) = \\ = \dim CoimC.$$

Выполнение этого условия в силу известного критерия влечёт полную управляемость системы (7) с условиями (8), а в силу результатов работы [3] и полную управляемость системы (7) с условиями (8), (9) (полная условная управляемость). Таким образом, условие (k_3) при выполнении условия (k_2) эквивалентно условию (j_2).

Доказательство теоремы.

А. Пусть выполнены условия (k_1), (k_2), (k_3).

Из выполнения (k_2) и (k_3) следует выполнение (j_1) и (j_2), что даёт существование функций $u(t)$ и $x(t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2). Условие (k_1) гарантирует единственность $x(t)$ для каждого найденного $u(t)$, следовательно, состояние динамической системы под воздействием управления перейдёт из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. То есть система (1), (2) в этом случае полностью управляема.

Б. Пусть система (1), (2) является полностью управляемой. Существование функций $u(t)$ и $x(t)$, удовлетворяющих (1) ,(2) влечёт выполение условий (j_1), (j_2) (см. [3]). В силу леммы 2 теперь выполняются условия (k_2) и (k_3).

Если бы условие (k_1) не было выполнено, то решение $x(t)$ уравнения

(1) с условием $x(0) = x^0$ имело бы вид

$$x(t) = e^{tT_{p-1}} x^0 + \int_0^t e^{(t-s)T_{p-1}} ((A_0^{\ +} - \\ - \sum_{j=1}^{p-1} A_j^+ K_j) Du(s) + P_p y(s)) ds, \qquad (13)$$

где

$$A_0 = A, \quad A_j = S_{j-1} P_{j-1}, \quad S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1},$$

$$T_j = (I - A_j^+ S_{j-1}) T_{j-1}, \quad S_0 = Q_0 B, \quad A_j^+ = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j);$$

P_j и Q_j — проекторы на $KerA_j$ и $Co\ker A_j$, соответственно, отвечающие разложениям

$$KerA_{j-1} = CoimA_j \dotplus KerA_j,$$

$$Co\ker A_{j-1} = \operatorname{Im} A_j \dotplus Co\ker A_j.$$

Далее: $K_0 = Q_0$, $K_1(\cdot) = S_0 A_0^+(\cdot) + \frac{d}{dt} Q_0 K_0(\cdot)$,

$$K_j(\cdot) = S_{j-1}(A_0^+ - \sum_{i=1}^{j-1} A_i^+ K_i)(\cdot) + \frac{d}{dt} Q_{j-1} K_{j-1}(\cdot),$$

$j = 2, 3, \ldots$, число p таково, что A_p имеет ядро, но не имеет коядра, $P_0 y(t)$ — произвольная функция из $KerA$ (см. [4]).

В подпространстве $KerA_p$ формула (13) имеет вид

$$P_P x(t) = P_P x^0 + \int_0^T P_p y(s)) ds.$$

При $t = T$ последнее соотношение таково:

$$P_P (x^T - x^0) = \int_0^T P_p y(s)) ds,$$

и для произвольных $P_0 y(t)$, x^T и x^0 оно невыполнимо. Следовательно, условие (k_1) выполнено.

Таким образом, если система (1), (2) полностью управляема, то выполняются условия (k_1), (k_2), (k_3). Тем самым теорема доказана.

Замечание. В частном случае регулярности пары (A, B) условие (k_1) выполняется автоматически, условия (k_2) и условие

$$rank(A \quad D) = n$$

эквивалентны, таким образом, доказанная теорема обобщает результат [2].

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пример 2. Пусть n=2, k=4,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I. При $a = 0$, $b = 0$ не выполняется условие (k_2). Уравнение (4) в этом случае – это система

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = 2\upsilon_1 + 4\upsilon_2, \\ y_2 + z_1 = \upsilon_1 + 3\upsilon_2, \\ z_2 = 3\upsilon_1 + 2\upsilon_2, \\ z_2 = 2\upsilon_1 + \upsilon_2. \end{cases}$$

Из последних двух соотношений этой системы следует, что система имеет решение (y_1, y_2, z_1, z_2) не при любых (υ_1, υ_2), а лишь для $\upsilon_1 + \upsilon_2 = 0$. Следовательно, система (1), (2) с такими A, B, D не является полностью управляемой.

Действительно, система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + u_1, \\ 0 = 3x_1 + 2x_2 + u_2, \\ 0 = 2x_1 + x_2 + u_2 \end{cases}$$

с условиями

$$x_1(0) = x_1^0,\ x_1(T) = x_1^T,$$

$$x_2(0) = x_2^0,\ x_2(T) = x_2^T \qquad (14)$$

не является полностью управляемой, так как последние два соотношения дают: $x_1(t) + x_2(t) = 0$, что возможно не для произвольных $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_1(T)$, $x_2(T)$.

II. При $a = 1$, $b = 0$ не выполняется условие (k_3). Действительно, уравнение (5) имеет вид

$$\begin{cases} (2-\lambda)y_1 + 4y_2 + z_1 = \upsilon_1, \\ y_1 + (3-\lambda)y_2 + z_1 = \upsilon_2, \\ (3-\lambda)y_1 + 2y_2 + z_2 = \upsilon_1, \\ 2y_1 + y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$$

и эта система с $\lambda \neq 1$ имеет решение $y_1 = \dfrac{\upsilon_1}{1-\lambda}$, $y_2 = 0$, $z_1 = -\dfrac{\upsilon_1}{1-\lambda}$, $z_2 = -\dfrac{2\upsilon_1}{1-\lambda}$ лишь при $\upsilon_2 = 0$, а с $\lambda = 1$ лишь при $\upsilon_1 + \upsilon_2 = 0$. Следовательно, в этом случае система (1), (2) не является полностью управляемой.

В самом деле, система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + u_1, \\ \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u_2, \\ 0 = 2x_1 + x_2 + u_2 \end{cases}$$

с условиями (14) не управляемая, так как $u_2 = -2x_1 - x_2$, $u_1 = -x_1 - 3x_2$ (из первого и третьего соотношений системы), тогда $\dfrac{dx_2}{dt} = 0$, и $x_2 = const$ не может удовлетворять условиям $x_2(0) = x_2^0$, $x_2(T) = x_2^T$ с произвольными x_2^0, x_2^T.

III. Пусть $a = 1$, $b = 1$. Проверим выполнение условия (k_1). Уравнение (3) имеет вид

$$\begin{cases} (1-2\varepsilon)y_1 - 4\varepsilon y_2 = \upsilon_1, \\ -\varepsilon y_1 + (1-3\varepsilon)y_2 = \upsilon_2, \\ (1-3\varepsilon)y_1 - 2\varepsilon y_2 = \upsilon_3, \\ -2\varepsilon y_1 + (1-\varepsilon)y_2 = \upsilon_4. \end{cases}$$

Любые два уравнения этой системы определяют единственное решение (y_1, y_2), а остальные соотношения дают связь между υ_i, $i = \overline{1,4}$.

Уравнение (4) условия (k_2) – это система

$$\begin{cases} y_1 + z_1 = 2\upsilon_1 + 4\upsilon_2, \\ y_2 + z_1 = \upsilon_1 + 3\upsilon_2, \\ y_1 + z_2 = 3\upsilon_1 + 2\upsilon_2, \\ y_2 + z_2 = 2\upsilon_1 + \upsilon_2, \end{cases}$$

имеющая решение $y_1 = -z_1 + 2\upsilon_1 + 4\upsilon_2$, $y_2 = -z_1 + \upsilon_1 + 3\upsilon_2$, $z_2 = z_1 + \upsilon_1 - 2\upsilon_2$ с произвольным z_1 для любых υ_1, υ_2. Условие (k_2) выполнено.

Уравнение (5) условия (k_3) имеет вид

$$\begin{cases} (2-\lambda)y_1 + 4y_2 + z_1 = \upsilon_1, \\ y_1 + (3-\lambda)y_2 + z_1 = \upsilon_2, \\ (3-\lambda)y_1 + 2y_2 + z_2 = \upsilon_1, \\ 2y_1 + (1-\lambda)y_2 + z_2 = \upsilon_2. \end{cases}$$

При $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1$ эта система имеет решение $y_1 = \dfrac{\upsilon_1}{1-\lambda} - \dfrac{\upsilon_2}{1-\lambda}, y_2 = 0, z_1 = -\dfrac{\upsilon_1}{1-\lambda} + \dfrac{(2-\lambda)\upsilon_2}{1-\lambda}$, $z_2 = -\dfrac{2\upsilon_1}{1-\lambda} + \dfrac{(3-\lambda)\upsilon_2}{1-\lambda}$ с любыми $\upsilon_1, \upsilon_2 \in R^2$.

При $\lambda = 0$, имеем: $y_1 = -y_2 + \upsilon_1 - \upsilon_2$, $z_1 = -2y_2 - \upsilon_1 + 2\upsilon_2$, $z_2 = y_2 - 2\upsilon_1 + 3\upsilon_2$ с произвольными $y_2, \upsilon_1, \upsilon_2$.

Если $\lambda = 1$, то $y_1 = \dfrac{\upsilon_2}{2} - \dfrac{z_2}{2}$, $y_2 = \dfrac{\upsilon_1}{2} - \dfrac{\upsilon_2}{2}$, $z_1 = -\upsilon_1 + \dfrac{3\upsilon_2}{2} + \dfrac{z_2}{2}$ с любыми $z_2, \upsilon_1, \upsilon_2$.

В силу доказанной теоремы система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + u_1, \\ \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u_2 \end{cases} \qquad (15)$$

с условиями (14) является полностью управляемой.

Методом, разработанным в работе [5], строится управляющая вектор-функция

$$u_1(t) = -\frac{3}{2}x_1{}^0 - \frac{7}{2}x_2{}^0 - \frac{1}{T}\delta - \frac{3}{T^2}\alpha +$$
$$+t(\beta + \frac{5}{T}\delta + \frac{3}{T^2}(5\alpha + \gamma) + \frac{6}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^2(-\frac{1}{T}\delta - \frac{3}{2T^2}(2\alpha + 5\gamma) - \frac{15}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^3(\frac{1}{T^2}\gamma + \frac{2}{T^3}\alpha),$$

$$u_2(t) = -\frac{5}{2}x_1{}^0 - \frac{3}{2}x_2{}^0 - \frac{1}{T}\delta - \frac{3}{T^2}\alpha +$$
$$+t(-\frac{\beta}{2} + \frac{4}{T}\delta + \frac{3}{T^2}(4\alpha + \gamma) + \frac{6}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^2(\frac{1}{2T}\delta + \frac{3}{T^2}(\alpha - 2\gamma) - \frac{12}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^3(-\frac{1}{2T^2}\gamma - \frac{1}{T^3}\alpha),$$

где

$$\alpha = x_1{}^0 - x_2{}^0 - x_1{}^T + x_2{}^T, \ \beta = x_1{}^0 + x_2{}^0,$$
$$\gamma = x_1{}^0 + x_2{}^0 + x_1{}^T + x_2{}^T,$$
$$\delta = 2x_1{}^0 + 2x_2{}^0 + x_1{}^T + x_2{}^T.$$

При этой вектор - функции $u(t)$ решение системы (15), (14) единственно и равно

$$x_1(t) = x_1{}^0 + t(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{T}\delta - \frac{3}{T^2}\alpha) +$$
$$+t^2(-\frac{1}{2T}\delta - \frac{3}{2T^2}(\alpha - \gamma) + \frac{3}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^3(\frac{1}{2T^2}\gamma + \frac{1}{T^3}\alpha),$$

$$x_2(t) = x_2{}^0 + t(-\frac{\beta}{2} - \frac{1}{T}\delta - \frac{3}{T^2}\alpha) +$$
$$+t^2(\frac{1}{2T}\delta + \frac{3}{2T^2}(\alpha + \gamma) + \frac{3}{T^3}\alpha) +$$
$$+t^3(-\frac{1}{2T^2}\gamma - \frac{1}{T^3}\alpha).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чистяков В.Ф.* Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова //Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 3. — С. 62—75.

2. *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sci / L. Dai // Berlin, Germany: Heidelberg N.Y: Springer-Verlag, 1989. — P. 1362—1392.

3. *Раецкая Е.В.* О полной условной управляемости одной дескрипторной системы / Е. В. Раецкая // Математические методы и приложения. Труды XI математических чтений МГСУ. — Москва, 2004. — С. 45—47.

4. *Зубова С.П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной / С. П. Зубова // Доклады РАН. — Т. 428. — № 4. — 2009. — С.444—446.

5. *Зубова С.П.* Полиномиальное решение линейной стационарной системы управления при наличии контрольных точек и ограничений на управление / С. П. Зубова, Лё Хай Чунг // ISJ Spektral and Evolution Problems. — Simferopol, 2008. — V. 18. — P. 71—75.

Зубова Светлана Петровна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета

Тел.: (4732) 66–60–76, 208–690

E-mail: spzubova@mail.ru

Zubova Svetlana Petrovna — Ph.D, assistant professor, chair of mathematical analysis, Voronezh State University

Tel.: (4732) 66–60–76, 208–690

E-mail: spzubova@mail.ru