УДК 62-50

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.2010 г.

Аннотация. Предлагается новый метод синтеза конечномерного робастного регулятора для объекта с распределенным запаздыванием. Для синтеза регулятора применяется метод синтеза модальных систем управления в частотной области. Конечномерный регулятор получается с помощью аппроксимации объекта с запаздыванием отрезком ряда Бурмана-Лагранжа.
Ключевые слова: конечномерный регулятор, робастный регулятор, объект с распределенным запаздыванием, модальное управление, устойчивость, аппроксимация.

Abstract. A new method is proposed to construct a finite-dimensional robust controller for a plant with distributed time-delay. The controller is obtained by using a method to synthesis of modal control systems in frequency domain. The finite-dimensional controller makes use of the Burman-Lagrange approximation of the time-delay plant.
Keywords: finite-dimensional controller, robust controller, plant with distributed time-delay, modal control, stability, approximation.

ВВЕДЕНИЕ

В теории автоматического управления сохраняется постоянный интерес к системам с запаздыванием. Это объясняется тем, что в большинстве производственных процессов имеются запаздывания, которыми нельзя пренебречь. Основная трудность при анализе и синтезе систем с запаздыванием состоит в том, что объект с запаздыванием является бесконечномерным.

Простейший и достаточно широко распространенный на практике путь решения задач синтеза систем автоматического управления объектами с запаздыванием связан с изначальным приближенным представлением объекта известными методами «подходящей» моделью объекта с сосредоточенными параметрами и последующим применением хорошо разработанного аппарата теории управления сосредоточенными системами. К недостаткам такого подхода относятся, прежде всего, возможная потеря сущностных физических свойств объекта управления, порождаемых пространственной распределенностью параметров, а также ряд проблем технического характера, таких, как высокая размерность вектора переменных состояния сосредоточенной модели, неустойчивость процесса аппроксимации относительно погрешностей промежуточных вычислений и др.

В данной статье рассматривается частотный метод построения робастного конечномерного регулятора для устойчивого объекта с распределенным запаздыванием. Данный метод является обобщением на широкий класс объектов с распределенным запаздыванием метода синтеза модальных регуляторов для объектов с чистым запаздыванием, предложенного в [1].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел, а через $\mathcal{H}_n$ — множество многочленов Гурвица из $\mathcal{R}_n$.

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного объекта управления с распределенным запаздыванием

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}}, \tag{1}$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-07-00072 а).

где $A(p) \in \mathcal{H}_m$, $B(p) \in \mathcal{R}_l$, $m \ge l$; $\alpha(p) \in \mathcal{H}_k$, $\beta(p) \in \mathcal{R}_q$; требуется найти передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)},$$
$$S(p) \in \mathcal{R}_s,\ R(p) \in \mathcal{R}_r, \qquad (2)$$
$$s \le r < +\infty,$$

обеспечивающего устойчивость и заданные показатели качества переходного процесса замкнутой системы управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.

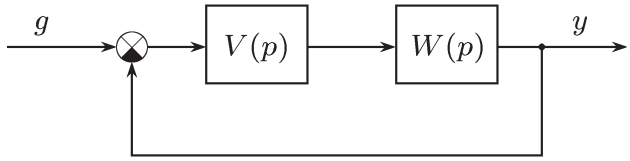

Рис. 1

Таким образом, для бесконечномерного объекта, которым является объект с распределенным запаздыванием, требуется синтезировать конечномерный регулятор.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи найдем конечномерный робастный регулятор с передаточной функцией (2). Обозначим

$$\varphi(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}.$$

По структурной схеме, изображенной на рис. 1, находим передаточную функцию замкнутой системы управления

$$\Phi(p) = \frac{V(p)W(p)}{1 + V(p)W(p)} = \frac{S(p)B(p)e^{\varphi(p)}}{R(p)A(p) + S(p)B(p)e^{\varphi(p)}}. \qquad (3)$$

Далее рассмотрим наиболее эффективный способ конечномерной дробно-рациональной аппроксимации бесконечномерных передаточных функций объектов с запаздыванием, основанный на рядах Бурмана—Лагранжа. Ряды Бурмана—Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора. Ряды Бурмана—Лагранжа [2, 3] получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $w(p)$:

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n(p) = \sum_{n=0}^{N} d_n w^n(p) + \Delta_N(p). \qquad (4)$$

Формула для коэффициентов ряда Бурмана—Лагранжа [2, 3] имеет следующий вид:

$$d_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)}{w^{n+1}(z)}dz = \frac{1}{n!}\lim_{p\to a}\frac{d^n}{dp^n}\left\{\frac{\Psi(p)w'(p)(p-a)^{n+1}}{w^{n+1}(p)}\right\}, \qquad (5)$$
$$n = 0,1,2,\ldots.$$

Формула (5) получена при предположении, что $\Psi(p)$ и $w(p)$ правильны в некоторой точке a, причем $w(p)$ имеет в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\bar{D} = D \cup C$ и чтобы $w(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Отметим, что если $w(a) \ne 0$, то функцию $\Psi(p)$ можно раскладывать в ряд по степеням функции $w_1(p) = w(p) - a$.

Выражение для остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа имеет вид [3]

$$\Delta_N(p) = \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n w^n(p) = \frac{w^{N+1}(p)}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)dz}{w^{N+1}(z)(w(z)-w(p))}. \qquad (6)$$

Следует обратить внимание на следующий важный факт. Для сохранения устойчивости системы управления с конечномерным регулятором необходимо потребовать, чтобы исходная функция $e^{\varphi(p)}$ и аппроксимирующая дробно-рациональная функция имели равное число полюсов на мнимой оси и в правой полуплоскости комплексной плоскости. Так как функция $e^{\varphi(p)}$ по условию является аналитической на мнимой оси и в правой полуплоскости комплексной плоскости, то аппроксимирующая функция не должна иметь полюсов в указанной области. Обеспечение этого условия накладывает довольно жесткие ограничения на выбор аппроксимирующей функции. Аппроксимация с помощью отрезка ряда Бурмана—Лагранжа решает данную задачу.

Воспользуемся разложением Бурмана—Лагранжа для экспоненциальной функции и представим отрезок ряда Бурмана—Лагранжа в виде дробно-рациональной функции

$$e^{\varphi(p)} = \frac{M(p)}{L(p)} + \Delta_N(p), \qquad (7)$$

где $\Delta_N(p)$ определяется по формуле (6). С учетом этого обозначения формула (3) примет вид

$$\Phi(p) = \\ = \frac{S(p)B(p)\Big(M(p) + L(p)\Delta_N(p)\Big)}{R(p)A(p)L(p) + S(p)B(p)\Big(M(p) + L(p)\Delta_N(p)\Big)}. \qquad (8)$$

Очевидно, что исходный объект с распределенным запаздыванием (1) можно рассматривать как параметрически возмущенный объект, т. е.

$$W(p) = \frac{B(p)M(p)}{A(p)L(p)} + \frac{B(p)}{A(p)}\Delta_N(p) = \\ = W_0(p) + \Delta(p),$$

где

$$W_0(p) = \frac{B(p)M(p)}{A(p)L(p)}, \\ \Delta(p) = \frac{B(p)}{A(p)}\Delta_N(p). \qquad (9)$$

Таким образом, задача синтеза конечномерного регулятора для объекта с распределенным запаздыванием сводится к задаче синтеза робастного конечномерного регулятора для объекта с сосредоточенными параметрами.

3. СИНТЕЗ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Из формулы (8) сразу следует, что характеристический многочлен $D_\Delta(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$D_\Delta(p) = R(p)A(p)L(p) + \\ + S(p)B(p)\Big(M(p) + L(p)\Delta_N(p)\Big). \qquad (10)$$

Покажем, что существует такой многочлен

$$D(p) = R(p)A(p)L(p) + S(p)B(p)M(p), \\ D(p) \in \mathcal{H}_n,$$

что многочлен $D_\Delta(p)$ также будет устойчивым при некоторых ограничениях на $\Delta_N(p)$.

В [4, 5] показано, что для произвольного заданного характеристического многочлена $D(p) \in \mathcal{H}_n$ замкнутой системы управления с передаточной функцией

$$\Phi_0(p) = \frac{V(p)W_0(p)}{1 + V(p)W_0(p)}$$

искомые многочлены $S(p)$ и $R(p)$ могут быть найдены из полиномиального уравнения

$$B(p)S(p) + A(p)R(p) = D(p). \qquad (11)$$

Условия разрешимости этого уравнения задаются следующей теоремой [4, 5].

Теорема 1 *Если многочлены $A(p) \in \mathcal{R}_m$ и $B(p) \in \mathcal{R}_l$ взаимно простые, то для любого полинома $D(p) \in \mathcal{R}_n$, $n \geq m + l$, существует единственная пара многочленов $S(p) \in \mathcal{R}_{m-1}$ и $R(p) \in \mathcal{R}_{n-m}$, являющаяся решением полиномиального уравнения* (11).

В дальнейшем будем предполагать, что взаимно простыми многочленами являются $A(p)$ и $B(p)$, а также $M(p)$ и $L(p)$.

Далее исследуем вопрос о физической реализуемости синтезированного модального регулятора. Имеет место следующая теорема [4, 5].

Теорема 2 *Передаточная функция регулятора* (2) *всегда реализуема, если выполняется неравенство*

$$n \geq m + \max\{m - 1, l\}. \qquad (12)$$

Для синтеза конечномерного регулятора, учитывая что $L(p)$ и $A(p)$ — многочлены Гурвица, положим

$$D(p) = A(p)L(p)D_1(p), \\ S(p) = A(p)L(p)S_1(p). \qquad (13)$$

Тогда уравнение (11) примет вид

$$B(p)M(p)S_1(p) + R(p) = D_1(p).$$

Отсюда находим

$$S_1(p) = 1, \\ R(p) = D_1(p) - B(p)M(p). \qquad (14)$$

Принимая во внимание формулу (2), получаем

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{A(p)L(p)}{D_1(p) - B(p)M(p)}. \qquad (15)$$

Докажем теперь, что характеристический многочлен (10) будет устойчивым при некотором $D(p)$. С этой целью воспользуемся критерием Найквиста [6]. Так как замкнутая система управления с объектом (9) и регулятором (15) является устойчивой по построению, то согласно критерию Найквиста устойчивость системы с конечномерным регулятором (15) и объектом (1) будет обеспечена, если будет верным неравенство

$$\left|1+V(j\omega)W_0(j\omega)\right| >$$
$$> \left|V(j\omega)W(j\omega)-V(j\omega)W_0(j\omega)\right|,$$
$$\omega \geq 0.$$

Нетрудно проверить, что это неравенство может быть представлено в следующем виде:

$$\left|D(j\omega)\right| > \left|B(j\omega)S(j\omega)\right|\left|\Delta_N(j\omega)\right|,$$
$$\omega \geq 0,$$

или, что то же самое,

$$\left|D_1(j\omega)\right| > \left|B(j\omega)\right|\left|\Delta_N(j\omega)\right|, \quad \omega \geq 0. \tag{16}$$

Положим

$$w(p) = \frac{p}{p+\lambda}, \quad \lambda = \text{const} > 0. \tag{17}$$

Очевидно, что функция (17) полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым к аналитическим функциям $w(p)$ в разложении (4).

Учитывая формулы (17) и (7) нетрудно получить следующую оценку:

$$\left|\Delta_N(p)\right| \leq \left|e^{\varphi(p)}\right| + \sum_{i=0}^{N}\left|d_i\right|.$$

Тогда, при $p = j\omega$, $j^2 = -1$, $\omega \geq 0$, имеем

$$\left|\Delta_N(j\omega)\right| \leq e^{\operatorname{Re}\varphi(j\omega)} + \sum_{i=0}^{N}\left|d_i\right|. \tag{18}$$

Будем предполагать, что функция $\operatorname{Re}\varphi(j\omega)$ ограничена для всех $\omega \geq 0$, т. е.

$$\exists \nu > 0 \forall \omega \geq 0 \ \left(\left|\operatorname{Re}\varphi(j\omega)\right| < \nu\right).$$

При этих предположениях из неравенства (22) следует оценка

$$\left|\Delta_N(j\omega)\right| \leq e^{\nu} + \sum_{i=0}^{N}\left|d_i\right| = \rho_N. \tag{19}$$

Пусть

$$B(p) = b_0(p+\mu_1)(p+\mu_2)\ldots(p+\mu_l),$$
$$b_0 \neq 0,\ \mu_i \neq 0,\ \forall i = \overline{1,l}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left|B(j\omega)\right| = \left|b_0\right|\prod_{i=1}^{l}\left|j\omega+\mu_i\right| \leq \left|b_0\right|(\omega+\mu)^l, \tag{20}$$

где

$$\mu = \max_{i=\overline{1,l}}\left|\mu_i\right|.$$

В качестве многочлена $D_1(p)$ выберем

$$D_1(p) = (p+\gamma)^{n_1}, \quad \gamma = \text{const} > 0. \tag{21}$$

Очевидно, что неравенство (16) в силу соотношений (19), (20) и (21) принимает следующий вид:

$$(\omega^2+\gamma^2)^{\frac{n_1}{2}} > \rho_N b_0(\omega+\mu)^l,$$
$$\omega \geq 0.$$

Отсюда сразу следует, что для всех $\omega \geq \Omega > 0$ при

$$n_1 \geq 2\left[\frac{\ln \rho_N b_0(\omega+\mu)^l}{\ln(\omega^2+\gamma^2)}\right]+1$$

неравенство (16) выполняется. Здесь $[m]$ — целая часть числа m.

В силу равномерной сходимости ряда Бурмана-Лагранжа в круге $\left|p\right| \leq \Omega$ (Ω — радиус круга аналитичности функции $e^{\varphi(p)}$) существует такое N, что при заданном $\lambda > 0$ остаточный член $\Delta_N(p)$ может быть сколь угодно малым при $p = j\omega$, $0 \leq \omega \leq \Omega$.

Таким образом, показано, что за счет соответствующего выбора функции $w(p)$, порядка аппроксимации N и многочлена $D_1(p)$ условие (16) всегда будет выполнено. Тем самым будет обеспечена устойчивость системы управления с конечномерным регулятором и объектом с распределенным запаздыванием. Это и означает устойчивость возмущенного многочлена $D_\Delta(p)$.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления с распределенным запаздыванием

$$W(p) = e^{\frac{1}{p+1}}. \tag{22}$$

Здесь

$$A(p) = B(p) = 1,$$
$$\beta(p) = 1,$$
$$\alpha(p) = p+1.$$

В формуле (17) положим $\lambda = 1$. Тогда разложение Бурмана—Лагранжа примет вид

$$e^{\frac{1}{p+1}} = e - e\frac{p}{p+1} +$$
$$+e\frac{p^2}{(p+1)^2} - \frac{2}{3}\frac{p^3}{(p+1)^3} + \Delta_3(p).$$

Для синтеза конечномерного робастного регулятора ограничимся двумя членами разложения, т. е. $N = 1$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$W_0(p) = \frac{e}{p+1}.$$

Пусть

$$D_1(p) = p + 2,8.$$

Тогда искомая передаточная функция регулятора определяется формулой

$$V(p) = \frac{p+1}{p+2,8-e}. \qquad (23)$$

Амплитудно-фазовые частотные характеристики разомкнутых систем $Z_1(j\omega) = V(j\omega)W_0(j\omega)$ (кривая 1) и $Z_2(j\omega) = V(j\omega)W(j\omega)$ (кривая 2) представлены на рис. 2. Очевидно, что годографы находятся правее критической точки с координатами $(-1, j0)$ Поэтому соответствующие замкнутые системы являются устойчивыми.

Переходный процесс для замкнутой системы регулирования с конечномерным регулятором (23) и бесконечномерным объектом с распределенным запаздыванием (22) представлен на рис. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый частотный метод синтеза конечномерного робастного регулятора для объекта с распределенным запаздыванием. Регулятор строится на основе метода синтеза

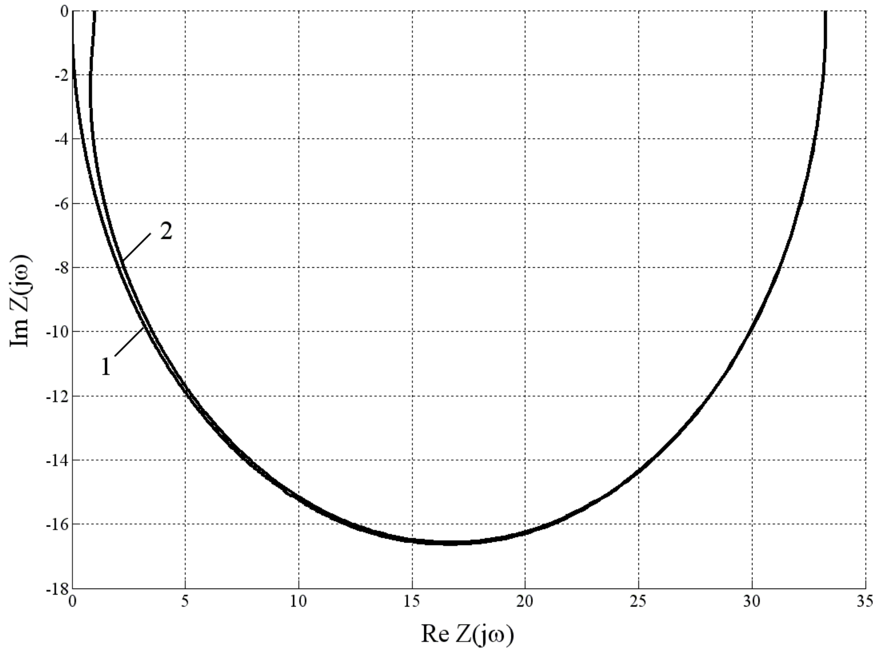

Рис. 2

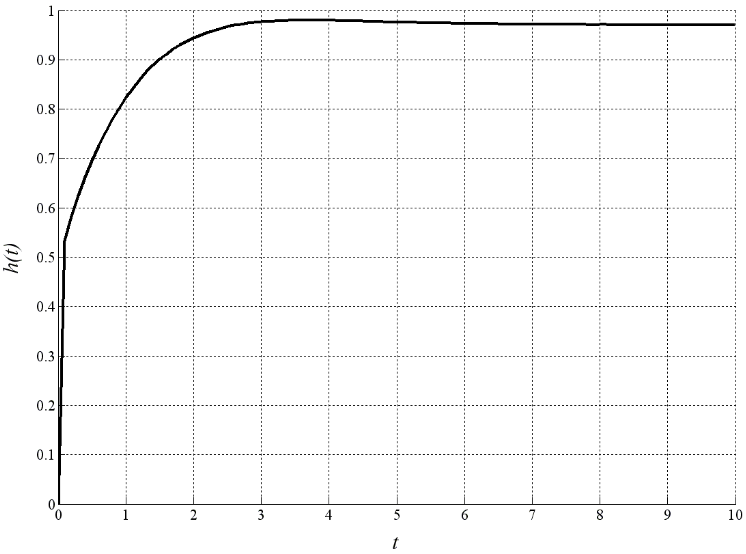

Рис. 3.

модальных регуляторов. Конечномерный регулятор получается с помощью дробно-рациональной аппроксимации объекта с распределенным запаздыванием. В качестве дробно-рациональной аппроксимации применяется отрезок ряда Бурмана-Лагранжа. Метод может быть обобщен на более широкий класс объектов с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И., Малютина В. С.* Об одном методе построения конечномерных регуляторов для объектов с запаздыванием // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. — 2009. — 2. — С. 51—55.

2. *Девятов Б. Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1964. — 324 с.

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

4. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — 4. — С. 17—20.

5. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез модальных систем управления // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. — 2004. — 1. — С. 103—109.

6. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 304 с.

Лозгачев Геннадий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Дылевский Александр Вячеславович — доктор технических наук, доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Малютина Виктория Сергеевна — аспирантка кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Lozgachev Gennadiy I. — Doctor of engineering sciences, Full professor, Head of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Dylevskii Alexander V. — Doctor of engineering sciences, Assistant professor, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Malyutina Victoria S. — Post-graduate student, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Тел./Tel.: (4732) 20-87-15

E-mail: dylevski@yandex.ru