УДК 514.745.4

# О ТОЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ

**В. Н. Думачев**

*Воронежский институт МВД России*

Поступила в редакцию 11.06.2010 г.

**Аннотация.** В работе рассматривается внутренняя структура когомологий комплекса де Рама. В качестве примеров изучаются фазовые потоки в $\mathbb{R}^3$ допускающие пуассонову структуру типа Намбу.

**Ключевые слова:** Когомологии де Рама, Пуассоновы структуры, Гамильтоновы векторные поля.

**Abstract.** In work the internal structure de Rham cohomology is considered. As examples the phase flows in $\mathbb{R}^3$ admitting the Nambu poisson structure are studied.

**Key words:** Poisson structure, Hamiltonian vector fields, de Rham cohomology.

**1. Введение.** Обозначая через $\Lambda^k(\mathbb{M})$ — внешнюю градуированную алгебру дифференциальных форм с комплексом Де Рама

$$0 \to \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \Lambda^1(\mathbb{M}) \to \ldots$$
$$\to \Lambda^{n-1}(\mathbb{M}) \to \Lambda^n(\mathbb{M}) \to 0$$

напомним [1], что дифференциальная форма $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{M})$ называется замкнутой если $d\omega = 0$ , и точной при $\omega = d\nu$ . Фактор-пространство замкнутых $k$-форм на многообразии $\mathbb{M}$ по точным $k$-формам называют когомологиями де Рама и обозночают $H^k(\mathbb{M})$

$$H^k(\mathbb{M}) = \frac{\ker\left(d : \Lambda^k(\mathbb{M}) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{M})\right)}{\mathrm{im}\left(d : \Lambda^{k-1}(\mathbb{M}) \to \Lambda^k(\mathbb{M})\right)}.$$

Известно, что когомологии $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ тривиальны. Это означает, что для любой $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{M})$, такой что $d\omega = 0$ существует $\nu \in \Lambda^{k-1}(\mathbb{M})$, такая что $\omega = d\nu$ . В любом случае размерность группы когомологий определяется числом Бетти:

$$b^k = \frac{\dim(\omega : d\omega = 0)}{\dim(d\nu)}.$$

Далее когомолгии $H^k(\mathbb{M})$ будут обозначаться как $H^k_k(\mathbb{M})$ . Однако, внешнее произведение точных форм тоже является точной формой. Поэтому целью настоящей работы является введение фактора точных форм по произведению точных и анализ некоторых приложений.

Свяжем с комплексом Де Рама дифференциальный модуль $\{C, d\}$ , тогда

$$Z(C) = \ker d = \{x \in C \mid dx = 0\}$$

— коциклы модуля $\{C, d\}$ (пространство замкнутых форм), $B(C) = imd = dC = \{x = dy \mid y \in C\}$ — когранимцы модуля $\{C, d\}$ (пространство точных форм).

В данных обозначениях группа $i$-х когомологий $H^i$ есть фактор $i$-х коциклов по $i$-м кограницам $H^i = Z^i \,/\, B^i$ .

**2. Когомологии в $\Lambda^2(\mathbb{M})$.** Допустим $\omega \in B^2 \subset \Lambda^2(\mathbb{M})$ . Это означает, что

$$\omega = d\nu, \text{ и } \nu \in \Lambda^1(\mathbb{M}).$$

Полученое фактор-пространство мы будем обозначать

$$H^2_2(\mathbb{M}) = Z^2 \,/\, B^2,$$

где $Z^2 = \ker(d : \Lambda^2(\mathbb{M}) \to \Lambda^3(\mathbb{M}))$, $B^2 = im(d : \Lambda^1(\mathbb{M}) \to$ $B^2 = im(d : \Lambda^1(\mathbb{M}) \to \Lambda^2(\mathbb{M}))$ . Но в $B^2$ существуют формы

$$\omega = \lambda_1 \wedge \lambda_2, \text{ и } \lambda_i \in \Lambda^1(\mathbb{M})$$

такие, что $d\lambda_i = 0$ . Допустим, что $\lambda_i \in B^1$ (т.е. $\lambda_i = d\mu_i$), тогда

$$d\omega = 0, \; \omega = d\mu_1 \wedge d\mu_2.$$

Т.е. точная $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{M})$ является произведением точных форм. Обозначим возникающее подпространство

$$B^{1,1} = \{x = dy \wedge dz \mid y, z \in C\}$$

— произведение кограниц модуля $\{C, d\}$ (пространство внешних произведений точных форм).

Соответствующая группа когомологий

$$H^2_{1,1}(\mathbb{M}) = Z^2 \,/\, B^{1,1}$$

или

$$b_{1,1}^2(\mathbb{M}) = \frac{\dim(\omega : d\omega = 0)}{\dim(d\mu_1 \wedge d\mu_2)},$$

где $B^{1,1} = \mathrm{im}(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \Lambda^1(\mathbb{M})) \oplus \mathrm{im}(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \to \Lambda^1(\mathbb{M}))$. Очевидно, что поскольку всегда $\forall \mu \in \Lambda^0(\mathbb{M})$

$$d\mu_1 \wedge d\mu_2 = d(\mu_1 \wedge d\mu_2) = d\nu,\ \ \nu \in \Lambda^1(\mathbb{M}),$$

но не всегда $d\nu = d\mu_1 \wedge d\mu_2$, то для кограниц модуля $\{C, d\}$: $B^2 = \{d\mu_1 \wedge d\mu_2, d\nu\}$ и $B^{1,1} = \{d\mu_1 \wedge d\mu_2\}$ выполняется вложение $B^{1,1} \subset B^2$, а поэтому фактор

$$B^2 \,/\, B^{1,1} \simeq H_{1,1}^2(\mathbb{M}) \,/\, H_2^2(\mathbb{M})$$

должен характеризовать наличие препятствий (топологических дефектов) для существования точных форм в $\Lambda^2(\mathbb{M})$, которые сами являются внешним произведением точных из $\Lambda^1(\mathbb{M})$.

**3. Механика Намбу и векторные гамильтонианы.** В данном разделе мы покажем, как введенные когомологмии позволяют с единой точки зрения рассмотреть теорию векторных гамильтонианов [2] и механику Намбу [3].

Классический дифференциально-геометрический подход к построению гамильтоновой механики заключается в следующем. В пространстве $\mathbb{R}^2$ вводится симплектическая форма $\Omega = dx_0 \wedge dx_1$, которая в данном случае являетя формой объема фазового пространства динамической системы

$$\dot{x}_i = a_{ik} x_k.$$

Согласно теореме Лиувилля любое гамильтоново поле сохраняет форму объема, т.е. производная Ли от 2-формы $\Omega$ по векторному полю $X_H$ есть нуль:

$$L_X \Omega = X \rfloor d\Omega + d(X \rfloor \Omega) = 0.$$

Поскольку $\Omega \in \Lambda^2$ и многообразие двумерно, то $d\Omega = 0$ и, следовательно,

$$d(X \rfloor \Omega) = 0.$$

Из леммы Пуанкаре следует, что форма $X \rfloor \Omega$ — точная, и $X \rfloor \Omega = \Theta = dH$. Мы получили скалярный гамильтониан $H \in \Lambda^0$ и гамильтоново векторное поле

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial H}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

позволяющее переписать исходную систему через скобку Пуассона

$$\dot{x}_i = \{H, x_i\} = X_H \rfloor dx_i.$$

В 1973 г. Намбу [3] предложил обобщение скобки Пуассона на нечетномерный случай. Например, для $\Omega \in \Lambda^3$ скобка Пуассона по Намбу требует введения 2-ух скалярных гамильтонианов $F$ и $G$ и имеет вид

$$\dot{x}_i = \{H, F, x_i\} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x_i}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_i}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_0} & \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_0} & \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

В 2006 г. в работе [2] при построении скобки Пуассона нечетномерной механики для $\Omega \in \Lambda^3$ было введено бивекторное поле

$$X_H^2 = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial H}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} \right).$$

со скобкой Пуассона

$$\{H, F, G\} = X_H^2 \rfloor (dF \wedge dG) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[ \frac{\partial H}{\partial x_0} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_1} \right) + \right.$$
$$+ \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial G}{\partial x_0} - \frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial G}{\partial x_2} \right) +$$
$$\left. + \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x_0}\frac{\partial G}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial G}{\partial x_0} \right) \right]$$

и гамильтоново векторное поле

$$X_h^1 = \left( \mathrm{rot}\,\mathbf{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right)\frac{\partial}{\partial x_0} +$$
$$+ \left( \frac{\partial h_0}{\partial x_2} - \frac{\partial h_2}{\partial x_0} \right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_0} - \frac{\partial h_0}{\partial x_1} \right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

со скобкой Пуассона

$$\dot{x}_i = \{\mathrm{rot}\,\mathbf{h}, x_i\} = X_h^1 \rfloor dx_i.$$

Схема введения этих полей также основана на теореме Лиувилля. Но теперь теорема Пуанкаре для выражения $d(X \rfloor \Omega) = 0$ дает два типа гамильтоновых полей:
векторное $X^1 \in \Lambda^1$

$$X^1 \rfloor \Omega = d\mathbf{h},\ \text{где}\ \mathbf{h} \in \Lambda^1$$

и бивекторное $X^2 \in \Lambda^2$

$$X^2 \rfloor \Omega = dH, \text{ где} H \in \Lambda^0.$$

**Пример 1.** Рассмотрим динамическую систему в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = -xz; \\ \dot{y} = yz; \\ \dot{z} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Согласно [2] данный фазовый поток имеет один векторный

$$\mathbf{h} = \frac{1}{4}((-x^2y + y^3 + yz^2)dx + \\ +(x^3 - y^2x + xz^2)dy - 2xyzdz)$$

и два скалярных Гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \;\; F = xy.$$

Это означает, что данная система допускает пуассонову структуру с векторным гамильтонианом

$$\dot{x}_i = \{\mathbf{h}, x_i\} = X_h \rfloor dx_i,$$

где

$$X_h = -xz\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

и пуассонову структуру Намбу [3], которая может быть записана в двух формах

$$\dot{x}_i = \{H, F, x_i\} = X_H \rfloor dF \wedge dx_i = -X_F \rfloor dH \wedge dx_i,$$

где

$$X_H = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_F = y\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

В данном случае векторный $\mathbf{h}$ и скалярные $(H, F)$ гамильтонианы связаны между собой соотношением

$$d\mathbf{h} = dH \wedge dF, \text{ то есть } d\mathbf{h} \in B^{1,1}.$$

**Пример 2.** Бездивергентная система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = -x + xz \\ \dot{z} = x - xy \end{cases}$$

имеет один векторный

$$\mathbf{h} = \left(\frac{x}{4}(z^2 + y^2) - \frac{x}{3}(z + y)\right)dx + \\ + \left(\frac{1}{3}(x^2 - yz + z^2) - \frac{1}{4}x^2y\right)dy + \left(\frac{1}{3}(y^2 - zy + x^2) - \frac{1}{4}x^2z\right)dz.$$

и два скалярных Гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$F = \left(y - \frac{y^2}{2}\right) + \left(z - \frac{z^2}{2}\right),$$

связанных между собой соотношением.

$$d\mathbf{h} = dH \wedge dF.$$

Это означает, что данная система допускает пуассонову структуру с векторным гамильтонианом [2]

$$\dot{x}_i = \{h, x_i\} = X_h \rfloor dx_i,$$

где

$$X_h = (y - z)\frac{\partial}{\partial x} + (-x + xz)\frac{\partial}{\partial y} + (x - xy)\frac{\partial}{\partial z},$$

и пуассонову структуру Намбу в двух формах

$$\dot{x}_i = \{H, F, x_i\} = X_H \rfloor dF \wedge dx_i = \\ = -X_F \rfloor dH \wedge dx_i,$$

где

$$X_H = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_F = (1 - z)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + (1 - y)\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

**Пример 3.** Фазовый поток

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -zy \end{cases}$$

имеет один векторный

$$\mathbf{h} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} z(3y^2 + 4x - 4z \\ -6xyz \\ x(3y + 4z - 4x) \end{pmatrix},$$

один скалярный Гамильтониан

$$H = x - \frac{y^2}{2} + z$$

и предгамильтонову форму

$$\Theta = -zdx + xdz$$

связанные между собой соотношениями

$$d\mathbf{h} = dH \wedge \Theta.$$

Это означает, что данная система допускает пуассонову структуру с векторным гамильтонианом

$$\dot{x}_i = \{\mathbf{h}, x_i\} = X_h \rfloor dx_i$$

где

$$X_h = xy\frac{\partial}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial}{\partial y} - yz\frac{\partial}{\partial z},$$

и скалярную пуассонову структуру форме

$$x_i = X_H \rfloor \Theta \wedge dx_i,$$

где

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x}\wedge\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\wedge\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial z}\wedge\frac{\partial}{\partial x}.$$

Таким образом

$$d\mathbf{h} \in B^2 \setminus B^{1,1}.$$

Для полноты изложения заметим, что поскольку $d\Theta \neq 0$, но $d\Theta \wedge \Theta = 0$, то уравнение Пфаффа на предгамильтонову форму $\Theta$ имеет решение с интегрирующим множителем

$$dF = \frac{\Theta}{x^2+z^2}, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{z}{x}$$

и причиной глобальной неинтегрируемости данной системы является наличие дырки $(x=0, z=0)$ в плоскости $x0z$. Очевидно, что отсутствие второго гамильтониана не позволило ввести пуассонову структуру типа Намбу со скобкой $\{H, F, G\}$.

**4. Когомологии в $\Lambda^3(\mathbb{M})$.** Далее, верхний индекс произвольной формы будет обозначать ее степень, т.е. $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{M})$. Для стандартного комплекса де Рама в $\mathbb{R}^n$ возьмем $\omega^3 \in B^3 \subset \Lambda^3(\mathbb{M})$. Это означает, что $\omega^3 = d\nu^2$ и

$$H_3^3(\mathbb{M}) = Z^3 \,/\, B^3,$$

где

$$Z^3 = \ker(d : \Lambda^3(\mathbb{M}) \to \Lambda^4(\mathbb{M})),$$
$$B^3 = \mathrm{Im}(d : \Lambda^2(\mathbb{M}) \to \Lambda^3(\mathbb{M})),$$
$$b_3^3 = \frac{\dim(\omega^3 : d\omega^3 = 0)}{\dim(d\nu^2)}.$$

Но в $B^3 \subset \Lambda^3(\mathbb{M})$ существуют формы

$$\omega^3 = \lambda_1^1 \wedge \lambda_2^1 \wedge \lambda_3^1,$$

такие, что $d\lambda^1 = 0$.

Допустим, что $\lambda^1 \in B^1$ (т.е. $\lambda^1 = d\mu^0$), тогда

$$d\omega^3 = 0, \;\; \omega^3 = d\mu_1^0 \wedge d\mu_2^0 \wedge d\mu_3^0.$$

Т.е. точная $\omega_1^3 \in \Lambda^3(\mathbb{M})$ сама является произведением точных форм. Обозначим возникающее фактор пространство так

$$H_{1,1,1}^3(\mathbb{M}) = Z^3 \,/\, B^{1,1,1},$$

где $B^{1,1,1} = \bigoplus_{k=1}^{3} \mathrm{Im}_k(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \Lambda^1(\mathbb{M}))$.

Наряду с рассмотреным случаем в $\Lambda^3(\mathbb{M})$ можно также построить формы

$$\omega^3 = \lambda^1 \wedge \lambda^2, \text{ где } \lambda^k \in \Lambda^k(\mathbb{M})$$

такие, что $d\lambda^k = 0$. Допустим, что $\lambda^k \in B^k$ (т.е. $\lambda^k = d\mu^{k-1}$), тогда

$$d\omega^3 = 0, \;\; \omega^3 = d\mu^0 \wedge d\mu^1.$$

Т.е. неточная $\omega^3$ является произведением точных форм. Обозначим возникающее фактор пространство так

$$H_{1,2}^3(\mathbb{M}) = Z^3 \,/\, B^{2,1},$$

где $B^{2,1} = im(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \Lambda^1(\mathbb{M})) \oplus \mathrm{Im}(d : \Lambda^1(\mathbb{M}) \to$ $\to \Lambda^2(\mathbb{M}))$. Очевидно, что

$$B^{1,1,1} \subset B^{2,1} \subset B^3,$$

поэтому факторы $H_{1,1,1}^3(\mathbb{M}) \,/\, H_3^3(\mathbb{M})$ и $H_{1,2}^3(\mathbb{M}) \,/\, H_3^3(\mathbb{M})$ должны характеризовать наличие препятствий для существования точных форм в $\Lambda^3(\mathbb{M})$, которые сами являются произведением точных из $\Lambda^1(\mathbb{M})$ или $\Lambda^2(\mathbb{M})$.

**5. Когомологии в $\Lambda^k(\mathbb{M})$.** Обобщая предыдущие выкладки рассмотрим комплекс де Рама в $\mathbb{M}$ и возьмем $\omega^k \in B^k \subset \Lambda^k(\mathbb{M})$. Тогда $\omega^k = d\nu^{k-1}$ и

$$H_k^k(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^k,$$

где $Z^k = \ker(d : \Lambda^k(\mathbb{M}) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{M}))$, $B^k = im(d : \Lambda^{k-1}(\mathbb{M}) \to$ $\to \Lambda^k(\mathbb{M}))$.

Но в $\Lambda^k(\mathbb{M})$ существуют формы

$$\omega^k = \bigwedge_{i=1}^{k} \lambda_i^1, \text{где } \lambda^1 \in \Lambda^1(\mathbb{M}),$$

такие, что $d\lambda^1 = 0$. Допустим, что $\lambda^1 \in B^1$ (т.е. $\lambda^1 = d\mu^0$), тогда

$$d\omega^k = 0, \;\; \omega^k = \bigwedge_{i=1}^{k} d\mu_i^0.$$

Т.е. точная $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{M})$ сама является внешним произведением точных форм. Обозначим возникающее фактор пространство как

$$H_{1,1,\dots,1}^k(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{1,1,\dots,1},$$

где $B^{1,1,\dots,1} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{im}_i(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to \Lambda^1(\mathbb{M}))$.

Продолжая аналогично можно получить: для $\omega^k = d\mu^1 \wedge \wedge_{i=1}^{k-2} d\mu_i^0$

$$H_{2,1,1,\dots,1}^k(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{2,1,1,\dots,1},$$

где $B^{2,1,1,\dots,1} = \mathrm{im}(d : \Lambda^1(\mathbb{M}) \to \Lambda^2(\mathbb{M})) \bigoplus_{i=1}^{k-2} \mathrm{im}_i(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to$

$\to \Lambda^1(\mathbb{M}))$;

для $\boldsymbol{\omega}^k = d\boldsymbol{\mu}^2 \wedge \wedge_{i=1}^{k-3} d\boldsymbol{\mu}_i^0$

$$H^k_{3,1,1,\dots,1}(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{3,1,1,\dots,1},$$

где $B^{3,1,1,\dots,1} = \operatorname{im}(d : \Lambda^2(\mathbb{M}) \to \Lambda^3(\mathbb{M})) \bigoplus_{i=1}^{k-3} \operatorname{im}_i(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to$ $\to \Lambda^1(\mathbb{M}))$;

для $\boldsymbol{\omega}^k = d\boldsymbol{\mu}^3 \wedge \wedge_{i=1}^{k-4} d\boldsymbol{\mu}_i^0$

$$H^k_{4,1,1,\dots,1}(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{4,1,1,\dots,1},$$

где $B^{4,1,1,\dots,1} = \operatorname{im}(d : \Lambda^3(\mathbb{M}) \to \Lambda^4(\mathbb{M})) \bigoplus_{i=1}^{k-4} \operatorname{Im}_i(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to$ $\to \Lambda^1(\mathbb{M}))$;

… … …

для $\boldsymbol{\omega}^k = d\boldsymbol{\mu}^1 \wedge d\boldsymbol{\mu}^1 \wedge \wedge_{i=1}^{k-4} d\boldsymbol{\mu}_i^0$

$$H^k_{2,2,1,\dots,1}(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{2,2,1,\dots,1},$$

где $B^{2,2,1,\dots,1} = \bigoplus_{i=1}^{2} \operatorname{Im}_i(d : \Lambda^1(\mathbb{M}) \to \Lambda^2(\mathbb{M})) \bigoplus_{i=1}^{k-4} \operatorname{Im}_i(d : \Lambda^0(\mathbb{M}) \to$ $\to \Lambda^1(\mathbb{M}))$;

… … …

и т.д.

Для упрощения записи мы введем мульти-индекс

$$\# m = \{m_1, m_2, \dots, m_i\},$$
$$m_1 + m_2 + \dots + m_i = k,$$
$$m_1 \ge m_2 \ge \dots \ge m_i \ge 0,$$

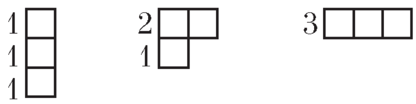
который формируется по правилу построения диаграмм Юнга. Тогда

$$H^k_{\# m}(\mathbb{M}) = Z^k \,/\, B^{\# m},$$

где $B^{\# m} = \bigoplus_{\# m} im_{\# m}(d : \Lambda^{\# m}(\mathbb{M}) \to \Lambda^{\# m+1}(\mathbb{M}))$,

$$b^k_{\# m} = \frac{\dim(\boldsymbol{\omega}^k : d\boldsymbol{\omega}^k = 0)}{\dim\left(\overset{\# m}{\wedge} d\boldsymbol{\mu}^{\# m}\right)}.$$

Так, для $k = 3$ мы получим



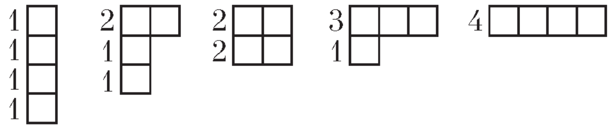
т.е.

$$\#m = \{1,1,1\} \text{ или } H^k_{\#m}(\mathbb{M}) = H^3_{1,1,1}(\mathbb{M}),$$
$$\#m = \{2,1\} \text{ или } H^k_{\#m}(\mathbb{M}) = H^3_{2,1}(\mathbb{M}),$$
$$\#m = \{3\} \text{ или } H^k_{\#m}(\mathbb{M}) = H^3_{3}(\mathbb{M}).$$

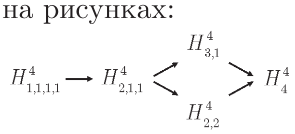
Тогда фильтрованный комплекс когомологий можно изобразить следующим образом

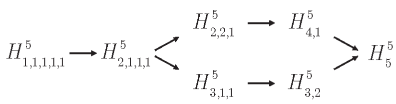
$$H^3_{1,1,1} \to H^3_{2,1} \to H^3_{3}.$$

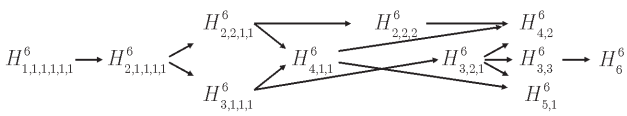
При $k = 4$ мы получим



т.е. $\#m = \{1,1,1,1\}$, $\#m = \{2,1,1\}$, $\#m = \{2,2\}$, $\#m = \{3,1\}$ или $\#m = \{4\}$. Заметим, что при $k \ge 4$ структура когомологий $H^k_{\#m}(\mathbb{M})$ не является линейной и для некоторых небольших $k$ показана на рисунках:







Это означает, что в общем случае последовательности когомологий не являются фильтрованными, а потому ввести когомологии когомологий не представляется возможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ботт Р.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии / Р. Ботт , Л. В. Ту. — М. : Наука, 1989. — 336 с.

2. *Думачев В. Н.* О фазовых потоках в $J^n(\boldsymbol{\pi})$. / В. Н. Думачев // Нелинейная динамика, 2006, Т. 2. № 3. — С. 287—292.

3. *Nambu Y.* Generalized Hamiltonian dynamics / Y. Nambu // Physical Review D., 1973, Vol. 7, №. 8. — pp. 2405—2412.

*Думачев Владислав Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Воронежского института МВД России.*

*E-mail: dumv@comch.ru*

*Dumachev Vladislav Nikolaevich — PhD(mathematics), Associated professor of the char of mathematics of the Voronezh institute of the ministry of the Interior of Russia.*

*E-mail: dumv@comch.ru*