УДК: 517.19

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ*

А. В. Дербушев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.03.2010 г.

Аннотация. В статье для исследования спектральных свойств оператора Дирака используется метод подобных операторов. В статье получены результаты об асимптотике спектра оператора Дирака и сходимости спектральных разложений.
Ключевые слова. Спектр оператора, оператор Дирака, асимптотика спектра, спектральные разложения, метод подобных операторов.

Abstract. In this paper the similar operators method is used for spectral analysis of Dirac nonselfadjoint operator. The asymptotic of Dirac operator spectrum and the spectral factorization convergence are obtained.
Keywords. Operator spectrum, Dirac operator, spectrum asymptotic, spectral distribution, similar operators method.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2) = L_2[0,\pi]\times L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство измеримых на $[0,\pi]$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ функций $x=(x_1,x_2):[0,\pi]\to\mathbb{C}^2$, для которых конечна величина $\left(\int_0^\pi (\left|x_1(t)\right|^2+\left|x_2(t)\right|^2)dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$. Нормированное скалярное произведение в $L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)$ определяется формулой

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x_1(\tau)\overline{y_1(\tau)}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x_2(\tau)\overline{y_2(\tau)}d\tau,$$
$$x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2)\in L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2).$$

Через $W_2^1([0,\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначим пространство Соболева $\{y\in L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2): y$ абсолютно непрерывна и $y'\in L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)\}$.

Рассматривается оператор Дирака

$$L_{dir}: D(L_{dir})\subset L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)\to L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2),$$
$$L_{dir}y = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy,\; y\in D(L_{dir}),$$

где $v(t)=\begin{pmatrix}0 & P(t)\\ Q(t) & 0\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$, $P,Q\in L_2[0,\pi]$. Область определения $D(L_{dir})$ определяется краевым условий *Дирихле*: ($y_1(0)=y_2(0)$ и $y_1(\pi)=y_2(\pi)$), где $y=(y_1,y_2)\in W_2^1([0,\pi],\mathbb{C}^2)$.

Соответствующий оператор будут обозначаться через L_{dir}. Если $v=0$ (нулевой потенциал), то используется запись L_{dir}^0. Оператор L_{dir}^0 будет называться *свободным оператором Дирака*. Он, как правило, при изучении оператора L_{dir} будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор умножения на потенциал v — возмущения.

Операторы L_{dir}^0 являются самосопряженными с дискретным спектром. Легко описываются спектры $\sigma(L_{dir}^0)$ и собственные функции для L_{dir}^0 [1]:

$\sigma(L_{dir}^0)=\mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое, соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^1+e_n^2)$, где

$$e_n^1 = \begin{pmatrix}e^{-i\lambda_n t}\\ 0\end{pmatrix},\; e_n^2 = \begin{pmatrix}0\\ e^{i\lambda_n t}\end{pmatrix},\; t\in[0,\pi]$$

и $\lambda_n = n$, $n\in\mathbb{Z}$, следовательно, соответствующее (одномерное) собственное подпространство есть

$$E_n^0 = Span\{s_n\}.$$

Определение оператора L_{dir} и соответствующие обозначения , в основном, согласованы с обозначениями в статье П. Джакова, Б. С. Митягина [1].

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Дирака использу-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-01-00276.

ется метод подобных операторов [2—4]. Суть данного метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L^0_{dir}). Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора L_{dir}.

Одним из основных результатов статьи является теорема 7 и следствие из нее, в котором установлена спектральность по Данфорду оператора L_{dir}. Отметим также теорему 5, в которой получено подобие оператора L_{dir} оператору вида $L^0_{dir} + B_0$, где B_0 — оператор Гильберта—Шмидта. Такой результат позволяет существенно упростить последующее изучение оператора L_{dir}, в том числе и традиционными методами. Кроме того, получены оценки собственных значений для оператора L_{dir} (теоремы 7). Оценки собственных значений важны, например, при оценках длин зон неустойчивости соответствующего оператора Дирака в $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ (см. [1]).

О МЕТОДЕ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $End\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Определение 1. *Два линейных оператора* $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1,2$, *называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор* $U \in End\mathcal{X}$ *такой, что* $UD(A_2) = D(A_1)$ *и* $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. *Оператор* U *называется оператором преобразования оператора* A_1 *в* A_2.

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Имеет место (непосредственно вытекающая из определения 1)

Лемма 1 ([2]). *Пусть* $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1,2$, *— два подобных оператора, и* $U \in End\mathcal{X}$ *— оператор преобразования оператора* A_1 *в оператор* A_2. *Тогда*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, *где* $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1,2$, *— спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов* A_i, $i = 1,2$, *соответственно;*

2) если оператор A_2 *допускает разложение* $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, *где* $A_{2k} = A \mid \mathcal{X}_k$, $k = 1,2$, *— сужение* A_2 *на* $\mathcal{X}_k$ *относительно прямой суммы* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ *инвариантных относительно* A_2 *подпространств* $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, *то подпространства* $\tilde{\mathcal{X}}_k = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1,2$, *инвариантны относительно оператора* A_1 *и* $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, *где* $A_{1k} = A \mid \tilde{\mathcal{X}}_k$, $k = 1,2$, *относительно разложения* $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_2$. *Кроме того, если* P *— проектор, осуществляющий разложение* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ *(т.е.* $\mathcal{X}_1 = \operatorname{Im} P$ *— образ проектора* P, $\mathcal{X}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$*), то проектор* $\tilde{P}$, *осуществляющий разложение* $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{X}}_2$, *определяется формулой*

$$\tilde{P} = UPU^{-1}. \tag{1}$$

Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A, т.е. линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|B\|_A = \inf\left\{C > 0 : \|Bx\| \le C\left(\|x\| + \|Ax\|\right), x \in D(A)\right\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Поскольку $D(A - B) = D(A)$ для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то обычно считается, что $D(B) = D(A)$.

Далее будет рассматриваться трансформатор (т.е. линейный оператор в пространстве линейных операторов; терминология М. Г. Крейна) $ad_A : D(ad_A) \subset End\mathcal{X} \to\to End\mathcal{X}$

$$ad_A X = AX - XA, \ X \in D(ad_A)$$

с областью определения $D(ad_A)$, состоящей из операторов $X \in End\mathcal{X}$, обладающих свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $AX - XA : D(A) \to \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y по непрерывности на $\mathcal{X}$ (и полагается $ad_A X = Y$).

Важнейшим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки [2—4].

Определение 2. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *— линейное подпространство из* $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ *и*

$$J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}, \ \Gamma : \mathfrak{U} \to End\mathcal{X}$$

являются трансформаторами. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A, а $\mathfrak{U}$ — *допустимым пространством возмущений*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \le C\|X\|_*$, для любого $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$);

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Более того, $\Gamma X \in D(ad_A)$, причем

$$ad_A \Gamma X = A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX \ \forall X \in \mathfrak{U}. \quad (2)$$

Кроме того, $\Gamma X \in End\mathcal{X}$ — единственное решение уравнения

$$ad_A Y = AY - YA = X - JX, \quad (3)$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \le \gamma, \ \max\left\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\right\} \le \gamma \|X\|_* \|Y\|_*;$$

5) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 1 ([2, 4]). *Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка, и B — некоторый оператор из пространства допустимых для A возмущений $\mathfrak{U}$. Тогда если выполнено неравенство*

$$\|J\|\|B\|_* \|\Gamma\| < \frac{1}{4}, \quad (4)$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - J\tilde{X}$, где оператор $\tilde{X} \in \mathfrak{U}$ является решением (нелинейного) уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \quad (5)$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$, и т.д. (оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\left\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\| \le 3\|B\|\right\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J\tilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma X \in End\mathcal{X}$.

Часто трудно построить пространство допустимых возмущений, содержащее рассматриваемое возмущение. В таком случае осуществляется построение трансформаторов J и Γ (с помощью равенств (2), (3)) на всем пространстве $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ таким образом, чтобы операторы вида $A - JX$, $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, имели несложную структуру. Затем строится пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ такое, что оно вместе с сужениями J и Γ на данном пространство (они далее обозначаются теми же символами) образует допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для A.

Так как возмущение B может не принадлежать $\mathfrak{U}$, то делается предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор вида $A - \tilde{B}$ где $\tilde{B} \in \mathfrak{U}$. Такое преобразование возможно в условиях следующего предположения.

Предположение 1. *Операторы $\Gamma B, JB, B$ удовлетворяют следующим условиям:*

(**a**) $\Gamma B \in End\mathcal{X}$ и $\|\Gamma B\| < 1$; (**b**) $(\Gamma B)D(A) \subset \subset D(A)$; (**c**) $B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{U}$; (**d**) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$; (**e**) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 2. *При выполнении предположения 1 оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - B_0$, где $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$, причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0), \quad (6)$$

где I — тождественный оператор.

Доказательство. Из условий (a) и (e) предположения 1 следует (см. [2]) непрерывная обратимость оператора $U = I + \Gamma B$ и равенство $UD(A) = D(A)$. Равенство (6) следует из условия (b) и равенства (d). Корректность определения оператора B_0 следует из условий (b), (c). Теорема доказана. □

ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМОЙ ТРОЙКИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Теперь приведенную схему предварительного преобразования подобия и построения допустимой тройки осуществим для таких абстрактных операторов, которые по своим свойствам наиболее близки к изучаемому оператору Дирака.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта—Шмидта из алгебры $End\mathcal{H}$. Символом $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта—Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2 = \sqrt{\|XX^*\|}$. Пусть $A = A^* : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\mathcal{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, вида:

$$\lambda_n = n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть P_n — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$ и, следовательно, $AP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$. Далее считается, что операторы $P_n, n \in \mathbb{Z}$, имеют ранг 1, следовательно, $P_n x = < x, e_n > e_n$, где e_n — ортонормированный базис составленный из собственных векторов e_n, т. е. $Ae_n = ne_n$. Из вида проекторов $P_n, n \in \mathbb{Z}$ следует их ортогональность. Оператор iA, согласно теореме Стоуна [4], будет являться (инфинитезимальным) генератором группы изометрий $T : \mathbb{R} \to End\mathcal{H}$, причем имеет место следующее спектральное представление операторов данной группы изометрий:

$$T(t)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int} P_n x, \ x \in \mathcal{X}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, следуя приведенной выше схеме, приступим к построению трансформаторов $J, \Gamma : \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ (Роль допустимого пространства возмущений $\mathfrak{U}$ будет играть все пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$).

Для данного будем использовать некоторые подходы из [2—4], связанные с гармоническим анализом линейных операторов.

Вначале трансформаторы определим на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. С данной целью каждому оператору $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ сопоставим периодическую периода 2π сильно непрерывную операторнозначную функцию

$$t \mapsto T(t)XT(-t) : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \ t \in \mathbb{R}.$$

Она непрерывна в равномерной операторной топологии.

Тем самым возникло изометрическое периодическое периода 2π представление:

$$\begin{gathered}\tilde{T} : \mathbb{R} \to End(End\mathcal{H}), \\ \tilde{T}(t) = T(t)XT(-t), \ t \in \mathbb{R}, \ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).\end{gathered} \quad (7)$$

Её генератором является оператор ad_A со спектром $\sigma(ad_A) = i\mathbb{Z}$ (см. [2, 3]).

Для функции вида (7) рассмотрим её ряд Фурье

$$T(t)XT(-t)x \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n x e^{int}, \ x \in \mathcal{H}, \ t \in \mathbb{R},$$

где коэффициент Фурье $X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет вид

$$X_n x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(t)XT(-t)xe^{-i2\pi nt}dt, \quad x \in \mathcal{H}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ назовем *рядом Фурье оператора* X (относительно группы операторов T), а операторы X_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициентами Фурье данного оператора.

Данный ряд сильно суммируем к X методом Чезаро, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)X_k x = Xx$, $x \in \mathcal{H}$.

Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ определим равенствами

$$(JX)x = X_0 x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(t)XT(-t)xdt, \ x \in \mathcal{H}, \quad (8)$$

$$(\Gamma X)x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)T(t)XT(-t)xdt \sim \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n} X_n x, \quad (9)$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — периодическая периода 2π функция вида $f(t) = i(t - \pi)$, $t \in [0, 2\pi)$. Так, как $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $\|X\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2 < \infty$ и, следовательно, ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{n} X_n$ является сходящимся в равномерной операторной топологии.

Лемма 2. *Трансформаторы* $J, \Gamma : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ограничены и обладают свойствами:*

1) J — проектор, $\|J\| = 1$, и он представим в виде безусловно сходящегося в сильной операторной топологии ряда

$$JX = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n X P_n = X_0, \ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \quad (10)$$

Данный ряд безусловно сходится в равномерной операторной топологии.

2) Имеет место оценка $\|\Gamma\|_2 \leq 1$.

3) $\Gamma X \in D(ad_A)$ *для любого* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *и* $ad_A \Gamma X = A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX$.

Доказательство. Докажем 1). Очевидно, что $\|J\| \leq 1$ и $\|JX\| = X$ для любого оператора $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, перестановочного с операторами $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Чтобы доказать представление (10) для J, рассмотрим операторную матрицу (X_{ij}), составленная из операторных блоков $X_{ij} = P_i X P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Так, как размерность образа $\operatorname{Im} P_k$ каждого ортопроектора P_k, $k \in \mathbb{Z}$, равна 1, т.е. $P_k x = \langle x, e_k\rangle e_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где (e_k), $k \in \mathbb{Z}$, — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то

$$\begin{gathered}X_{ij}x = (P_i X P_j)x = \langle XP_j x, e_i\rangle e_i = \\ = \langle Xe_j, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle e_i = (x_{ij})\langle x, e_j\rangle e_i, \ i, j \in \mathbb{Z},\end{gathered}$$

где (x_{ij}) — числовая матрица оператора X относительно базиса (e_k), $k \in \mathbb{Z}$.

При следующих оценках будут использоваться равенства $\|X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \|P_i X P_j\|_2^2$, $\|X\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2$.

В силу выше изложенного для доказательства представления (10) достаточно доказать, что $J(P_k X P_m) = \delta_{km} P_k X P_m$, где δ_{km} — символ Кронекера. Действительно,

$$J(P_k X P_m)x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(t)P_k X P_m T(-t)x dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt} P_k X P_m x e^{-imt} dt = \delta_{km} P_k X P_m,\ m,k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим что, из [2, 4] следует, что каждый из операторов X_n допускает представление в виде безусловно сильно сходящегося ряда (см. выше изложенное доказательство для $n = 0$)

$$X_n = \sum_{\substack{i-j=n \\ i,j\in\mathbb{Z}}} P_i X P_j,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Такие операторы являются собственными векторами трансформатора ad_A, причем $ad_A X_n == inX_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Докажем 2).

Так, как $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то ряд в (9) сходится абсолютно и из (9) следует оценка $\|\Gamma X\|_2^2 \le (1)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|X_n\|_2^2 \le 1\|X\|_2^2$.

Докажем 3). Как отмечалось, каждый коэффициент Фурье X_n, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $X \in End\mathcal{H}$ принадлежит $D(ad_A)$ и, в частности, $X_k D(A) \subset D(A)$. Тогда средние Чезаро $S_n = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)X_k$, $n \ge 1$, также обладают свойством $S_n D(A) \subset D(A)$ и сильно сходятся к оператору X. Последовательность операторов $\Gamma S_n = \sum_{\substack{k=-n \\ k\ne 0}}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)X_k$, $n \ge 1$, будет являться средними Чезаро для оператора ΓX, и, следовательно, также будет сильно сходится к оператору ΓX. Поскольку $ad_A \Gamma S_n = S_n - X_0 = S_n - JX$, $n \ge 1$, то из замкнутости оператора ad_A в сильной операторной топологии пространства $End\mathcal{H}$ следует, что $\Gamma X \in D(ad_A)$ и $ad_A \Gamma X = X - JX$. Лемма доказана. □

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, обозначаемые теми же символами, осуществляется следующим образом. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Положим

$$JX = J(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I),\ X \in End\mathcal{H}, \quad (11)$$

$$\Gamma X = \Gamma(X(A - \lambda_0 I)^{-1})(A - \lambda_0 I),\ X \in End\mathcal{H}. \quad (12)$$

Такое определение корректно, т.е. на зависит от выбора числа λ_0 из $\rho(A)$. Если оператор $\Gamma X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, $JX \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ допускает ограниченное расширение на все H, то его будем обозначать тем же символом. Если $x \in D(A)$, то из (11) и (12) следует, что операторы JX и ΓX на векторе x определяются равенствами (8) и (9) соответственно.

Теперь в качестве пространства допустимых возмущений для оператора A будет выступать идеал операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и некоторые его подпространства, которые будут строиться по рассматриваемому возмущению $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ оператора A.

Рассмотрим последовательность операторов (BP_n), $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\|B\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|BP_n\|_2^2$. Существует (см., например, лемму 48 из [1]) последовательность положительных чисел $(\alpha_n) = (\alpha_n(B))$, $n \in \mathbb{Z}$, со свойствами: 1) $(\alpha_n) = (\alpha_{-n})$ 2) $\lim_{|n|\to\infty} \alpha_n = 0$; 3) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|BP_n\|^2}{\alpha_n^2} < \infty$; 4) $\alpha_n \le 1$, $n \in \mathbb{Z}$. В качестве такой последовательности можно взять

$$\alpha_n = \|B\|_2^{-1}\left(\sum_{|k|\ge n} \|BP_k\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

По данной последовательности построим самосопряженный положительно определенный оператор $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n P_n$, являющийся функцией f от оператора A для $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$,

$$f(\lambda_n) = \alpha_n,\ n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Отметим, что $\|f(A)\| = \max_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| \le 1$.

Введем в рассмотрение банахово пространство операторов $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, представимых в виде $X = \tilde{X} f(A)$, где $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и с нормой $\|X\|_* = \|\tilde{X}\|_2$. Ясно, что $\|X\|_2 \le \|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{U}(f)$. Поскольку $B = \tilde{B} f(A)$, где $\tilde{B} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha_n} BP_n \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то и рассматриваемое возмущение принадлежит $\mathfrak{U}(f)$.

Непосредственно из определения трансформаторов $J, \Gamma \in End\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что подпространство $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является для них инвариантным, причем

$$J(\tilde{X} f(A)) = J(\tilde{X}) f(A),$$
$$\Gamma(\tilde{X} f(A)) = \Gamma(\tilde{X}) f(A),\ \tilde{X} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

Рассмотрим последовательности трансформаторов (J_m), (Γ_m), $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\} = \mathbb{Z}_+$, принадлежащие $End\mathfrak{U}(f)$ и определенные равенствами:

$$J_mX = P_{(m)}XP_{(m)} + \sum_{|k|\geq m+1} P_kXP_k = \\ = J(X - P_{(m)}XP_{(m)}) + P_{(m)}XP_{(m)}, \quad (15)$$

$$\Gamma_mX = \Gamma(X - P_{(m)}XP_{(m)}), \quad (16)$$

где $P_{(m)} = \sum_{|k|\leq m} P_k$ и $X \in \mathfrak{U}(f)$. Отметим, что $J_0 = J$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Наряду с последовательностью (α_n) рассмотрим последовательность $(\tilde{\alpha}_n) = (\tilde{\alpha}_n(B))$, определенную равенствами

$$\tilde{\alpha}_{n+1}(B) = \tilde{\alpha}_{n+1} = \max_{\substack{|i|\geq n+1 \\ |j|\leq n}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}, \ n \geq 0. \quad (17)$$

Ясно, что $\lim_{n\to\infty} \tilde{\alpha}_n = 0$.

Лемма 3. *Для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ имеет место оценка*

$$\max\left\{\left\|\Gamma_m(Xf(A))\right\|_2, \left\|\Gamma_m(f(A)X)\right\|_2\right\} \leq \\ \leq \pi\left(\alpha_{m+1} + \frac{\tilde{\alpha}_{m+1}}{2}\right)\left\|X\right\|_2. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $Q_{(m)} = I - P_{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\left\|f(A)Q_{(m)}\right\| \leq \alpha_{m+1}$, $m \geq 0$, а из формулы (16) и из свойства 2) Леммы 2 получаем

$$\left\|\Gamma_m(Xf(A))\right\|_2 = \\ = \left\|\Gamma(Xf(A)Q_{(m)}) + \Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\right\|_2 \leq \\ \leq \alpha_{m+1}\left\|X\right\|_2 + \left\|\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\right\|_2.$$

Оператор $\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})$ представим в виде

$$\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)}) = \Gamma(Q_{(m)}f(A)XP_{(m)}) + T_m, \\ T_m = \Gamma(Q_{(m)}(Xf(A) - f(A)X)P_{(m)}).$$

Из такого представления получаем оценку

$$\left\|\Gamma(Q_{(m)}Xf(A)P_{(m)})\right\|_2 \leq \alpha_{m+1}\left\|X\right\|_2 + \left\|T_m\right\|_2 \leq \\ \leq \alpha_{m+1}\left\|X\right\|_2 + \max_{\substack{|i|\geq m+1 \\ |j|\leq m}} \frac{|\alpha_i - \alpha_j|}{|i-j|}\left\|X\right\|_2 = \\ = (\alpha_{m+1} + \tilde{\alpha}_{m+1})\left\|X\right\|_2.$$

При данном использовалась операторная матрица оператора $T_m \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, которая имеет вид

$$P_iT_mP_j = \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j} P_iXP_j = \\ = \left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{i-j}\right)(P_iXP_j), \ |i| \geq m+1, |j| \leq m,$$

причем $P_iT_mP_j = 0$, если $|i| \leq m$, либо если $|j| \geq m+1$.

Аналогичным образом той же величиной оценивается норма Гильберта—Шмидта оператора $\Gamma_m(f(A)X)$, и, следовательно, верна оценка (18). Лемма доказана. □

Лемма 4. *Для любого $m \geq 0$ тройка $(\mathfrak{U}(f), J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A, причем $\left\|J_m\right\| = 1$ и постоянная $\gamma = \gamma_m$ из определения 2 допускает оценку*

$$\gamma_m \leq 2\alpha_{m+1} + \tilde{\alpha}_{m+1}. \quad (19)$$

Доказательство. Очевидно, что $\left\|J_m\right\| = 1$. Подлежащее проверке свойство 4) из определения 2 следует из леммы 3. Если $X = \tilde{X}f(A) \in \mathfrak{U}(f)$, то $\left\|\Gamma_m(\tilde{X}f(A)\right\|_2 \leq \gamma_m\left\|\tilde{X}\right\|_2 = \gamma_m\left\|X\right\|_*$, т.е. $\left\|\Gamma_m\right\| \leq \gamma_m$. Пусть $Y = \tilde{Y}f(A)$. Тогда $X\Gamma_mY = Zf(A)$, где $Z = \tilde{X}\Gamma_m(\tilde{Y}f(A)) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Из леммы 3 получаем

$$\left\|X\Gamma_mY\right\|_* = \left\|Z\right\|_2 = \left\|\tilde{X}\Gamma_m(\tilde{Y}f(A))\right\|_2 \leq \\ \leq \gamma_m\left\|\tilde{X}\right\|_2\left\|\tilde{Y}\right\|_2 = \gamma_m\left\|X\right\|_*\left\|Y\right\|_*.$$

Аналогично получается оценка $\left\|(\Gamma_mX)Y\right\|_* \leq \gamma_m\left\|X\right\|_*\left\|Y\right\|_*$. Выполнение всех остальных свойств из определения 2 следует из доказанного и леммы 2. Лемма доказана. □

Теорема 3. *Оператор $A - B$, где $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, подобен оператору вида*

$$A - P_{(m)}\tilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k|\geq m+1} P_k\tilde{X}P_k = \\ = A - J_m\tilde{X} = A - B_0, \quad (20)$$

для любого числа $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, для которого верна оценка

$$\omega(\alpha_{m+1}(B) + \frac{\tilde{\alpha}_{m+1}(B)}{2})\left\|B\right\|_* < \frac{\pi}{4}. \quad (21)$$

Оператор $\tilde{X} = \tilde{X}_0f(A)$, где $\tilde{X}_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$), — решение уравнения (5), в котором $\Gamma = \Gamma_m$, $J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m\tilde{X}$.

Доказательство. Из полученных оценок (19) и равенства $\left\|J_m\right\| = 1$ следует, что выполнено условие (4) теоремы 1, из которой следует утверждение данной теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1. Будем считать выполненным условие (19). Из теоремы 3 и леммы 1 следует, что оператор $A - B_0 = A - J_m\tilde{X}$ вида

(20) перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}$, P_k, $|k| \geq m+1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$, $|k| \geq m+1$, являются инвариантными для оператора $A - B_0$. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ следует равенство $\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$. Оператор $A - B_0$ имеет (как и оператор $A - B$) компактную резольвенту. Следовательно, если $\lambda_0 \in \sigma(A - B_0)$, то существует собственный вектор $x_0 \in D(A)$ такой, что $(A - B_0)x_0 = \lambda_0 x_0$. Следовательно, из вида оператора B_0 следуют равенства

$$\begin{gathered} A_{(m)} P_{(m)} x_0 = \lambda_0 P_{(m)} x_0, \\ A_k P_k x_0 = \lambda_0 P_k x_0, |k| \geq m+1, \end{gathered} \tag{22}$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, A_k — сужение оператора $A - B_0$ на $\mathcal{H}_k$, $|k| \geq m+1$. Ввиду того, что $I = P_{(m)} + \sum\limits_{|k| \geq m+1} P_k$ (система проекторов P_k, $|k| \geq m+1$, $P_{(m)}$, образует разложение единицы), то из (22) следует, что хотя бы один из векторов $P_k x_0$, $|k| \geq m+1$, $P_{(m)} x_0$, ненулевой. Следовательно, λ_0 — собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_k, $|k| \geq m+1$, $A_{(m)}$. Очевидно обратное включение

$$\sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq m+1} \sigma(A_k) \right) \subset \sigma(A - B_0) = \sigma(A - B).$$

Следовательно, имеет место равенства

$$\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq m+1} \sigma(A_k) \right). \tag{23}$$

Из представления операторов A_k, $|k| \geq m+1$ в виде

$$A_k = (kI - P_k \tilde{X}) \mid \mathcal{H}_k, |k| \geq m+1$$

и принадлежности оператора $\tilde{X}$ идеалу $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ следует, что $\lim\limits_{|k| \to \infty} \|P_k \tilde{X} P_k\| = 0$, таким образом получим

$$\begin{gathered} dist(\sigma(A_k), \{k\}) = \\ = \inf_{\lambda \in \sigma(A_k)} |k - \lambda| \leq \|P_k \tilde{X} P_k\|_2 \to 0, |k| \to \infty. \end{gathered}$$

Следовательно, из (23) следует

Лемма 5. *Пусть выполнено условие (21) теоремы 3. Тогда существует* $n_0 \geq m+1$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, *такое, что спектр оператора* $A - B$ *представим в виде объединения*

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(n_0)}) \cup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma(A_k) \right) = \sigma_0 \cup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma_k \right) \tag{24}$$

взаимно непересекающихся множеств σ_0, σ_k, $|k| \geq n_0 + 1$, *где* σ_0 *конечное множество и* $\sum\limits_{|k| \geq n_0+1} dist(\{k\}, \sigma_k)^2 < \infty$.

Замечание 2. Пусть выполнено условие (21) теоремы 3. Из подобия операторов $A - B$, $A - B_0$ и равенства (1) получаем, что верны следующие представления возмущенных проекторов

$$\tilde{P}_{(m)} = U^{-1} P_m U,\ \tilde{P}_k = U^{-1} P_k U,\ |k| \geq m+1, \tag{25}$$

где $\tilde{P}_{(m)}$ — проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_{(m)}$, $\tilde{P}_k$ — проектор на подпространство $U^{-1}\mathcal{H}_k$, и $U = I + \Gamma_m \tilde{X}$.

Представление (23) спектра оператора $A - B$ и представление проекторов (25) позволяют получать различные спектральные свойства оператора $A - B$ и, в частности, получать оценки его собственных значений и соответствующих проекторов.

Определение 3. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — линейный оператор, спектр которого представим в виде объединения

$$\sigma(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{J}} \sigma_k,\ \mathbb{J} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\} \tag{26}$$

взаимно непересекающихся компактных множеств σ_k, $k \in \mathbb{J}$. Пусть P_k — проектор Рисса, построенный по множеству σ_k. Оператор A называется *спектральным относительно разложения* (26) (или *обобщенным спектральным*) если ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{J}} P_k x$ безусловно сходится для любого вектора $x \in \mathcal{H}$.

Если $\sigma_k = \{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{J}$, одноточечные множества, и проекторы P_k, $k \in \mathbb{J}$ обладают свойством $AP_k = \lambda_k P_k$ для всех $k \in \mathbb{J}$, исключая конечное число, то спектральный относительно разложения (26) оператор A является *спектральным* (по Данфорду; см. [5]) *оператором*, причем A — спектральный оператор скалярного типа, если $AP_k = \lambda_k P_k$, $k \in \mathbb{J}$.

Теперь из сделанных замечаний 2, 3, теоремы 3 и леммы 5 следует

Теорема 4. *Существует число* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что спектр оператора* $A - B$, *где* $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, *представим в виде* (24). *Оператор* $A - B$ *спектрален относительно разложения* (24), *причем он спектрален по Данфорду, если* $\dim \mathcal{H}_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора

L_{dir}, свободный оператор L^0_{dir} будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом A. Таким образом, $L_{dir} = A - B$, где B — оператор умножения на потенциал v.

Всюду в дальнейшем $\mathcal{H} = L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2)$ и оно будет отождествляться с гильбертовым пространством $L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$ периодических периода π функций, определенных на $\mathbb{R}$, для которых конечна величина $\left(\int_0^\pi(|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2)dt\right)^{1/2} = \|x\|$. В $L_{2,\pi}$ определена группа $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций, т.е. $(S(t)x)(s) = x(s+t)$, $s,t \in \mathbb{R}$, $x \in L_{2,\pi}$. Функции P и Q также будем рассматривать как элементы пространства $L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Символом P_n обозначим проектор Рисса на собственное подпространство E^0_n (см. § 1), отвечающее собственному значению $\lambda_n = n \in \sigma(L^0_{dir})$. Проекторы Рисса $P_n, \in \mathbb{Z}$ ортогональны [6] Глава XV. Th2.1, Глава XVI. Th5.1] и представим в виде

$$P_n x = \langle x, s_n\rangle s_n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Группа изометрий T_{dir} будет иметь вид

$$(T_{dir}x)(s) = \\ = \left(\frac{x_1(s-t) + x_2(t-s)}{2}, \frac{x_1(-s-t) + x_2(s+t)}{2}\right), \tag{28}$$
$$s,t \in \mathbb{R},$$

где $x = (x_1, x_2) \in L_{2,\pi}$.

Для доказательства представления (28) достаточно заметить, что $T_{dir}(t)s_n = e^{int}s_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь, пользуясь формулами (8), (9), (28), выпишем представление операторов JB, ΓB. Имеют место следующие равенства.

$$((JB)x)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\mathcal{K}_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\ \ s \in [0,\pi], \tag{29}$$

$$((\Gamma B)x)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\tilde{\mathcal{K}}_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \quad x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\ \ s \in [0,\pi], \tag{30}$$

где

$$\mathcal{K}_{dir}(s,\tau) = \begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{dir}(s,\tau) = \\ = \begin{pmatrix} f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(u) = \frac{P(u) + Q(-u)}{2},\ \Phi \in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2).$$

Из приведенной формулы (30) следует (путем перемножения функций), что оператор $B\Gamma B$ являются интегральными соответственно с ядром $\tilde{\mathcal{K}}'_{dir}$ вида

$$\tilde{\mathcal{K}}'_{dir} = \begin{pmatrix} f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)P(s)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)P(s)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)Q(s)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)Q(s)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Ввиду принадлежности функций P, Q и Φ пространству $L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, непрерывности функций $\int_0^{4\pi}\left|\Phi\left(\frac{\pm s \pm \tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$, и ограниченности функции f, из приведенных формул (28)—(31) следует, что рассматриваемые интегральные операторы являются операторами Гильберта—Шмидта (элементами пространства $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = L_{2,\pi}$), в силу выполнения условий $\int_a^b\int_a^b|\tilde{\mathcal{K}}'_{dir}(t,s)|^2\,dtds < \infty$ и $\int_a^b\int_a^b|\mathcal{K}_{dir}(t,s)|^2\,dtds < \infty$, для интегральных операторов с ядром $K(t,s), t,s \in [a,b]\times[a,b]$ [7]. Таким образом, верна

Лемма 6. *Операторы* $JB, \Gamma B$, $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB$ *являются операторами Гильберта—Шмидта.*

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, введем в рассмотрение операторы (см. формулы (15), (16), где используются проекторы, определенные равенством (27))

$$J_kB = JB - J(P_{(k)}BP_{(k)}) + P_{(k)}BP_{(k)}, \tag{32}$$

$$\Gamma_kB = \Gamma B - \Gamma(P_{(k)}BP_{(k)}). \tag{33}$$

Ясно, что $J_0B = JB$, $\Gamma_0B = \Gamma B$. Из определения трансформаторов J и ΓB (из формул (8), (9),(10)) получаем следующие представления операторов J_kB и Γ_kB вида

$$J_kB = JB - P_{(k)}JBP_{(k)} + P_{(k)}BP_{(k)}, \\ \Gamma_kB = \Gamma B - (P_{(k)}\Gamma BP_{(k)}), \tag{34}$$

из которых и из леммы 6 следует, что $J_kB, \Gamma_kB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \geq 0$. Кроме того, из (34) следует, что (см. [12])

$$\lim_{|k|\to\infty}\left\|\Gamma_k B\right\|_2^2 = \lim_{|k|\to\infty}\left\|\Gamma B - P_{(k)}(\Gamma B)P_{(k)}\right\|_2^2 = \\ = \lim_{|k|\to\infty}\sum_{\max\{|i|\|j|\}\ge k+1}\left\|P_i(\Gamma_m B)P_j\right\|_2^2 = 0. \tag{35}$$

Лемма 7. *Существует $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что операторы B, $J_k B$, $\Gamma_k B$, $k \ge k_0$, удовлетворяют условиям предположения 1, где $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что $JB, \Gamma B \in = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset End\mathcal{H}$ и, таким образом, из равенства (34) получаем, что $J_k B, \Gamma_k B \in \mathfrak{U} = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя (35) приходим к выводу, что выполнены условия *a*) и *c*) предположения 1, причем условие a) для $k \ge k_0$ при некотором $k_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Установим свойства (b) и (d) для операторов $\Gamma_k B$, $J_k B$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для $\lambda_0 \in \rho(A)$ рассмотрим последовательность (B_k) операторов из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ вида

$$B_k = A_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A) = \\ = AP_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A), \ k \ge 0.$$

Из полученных формул (9), (34) следует, что матрица оператора B_k при $m \ne n$, $m \le k$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$b_{mn}^{(k)} = \lambda_m \frac{b_{mn}}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} = \\ = \frac{((\lambda_m - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_0) + \lambda_0)}{(\lambda_m - \lambda_n)(\lambda_n - \lambda_0)} b_{mn} = \\ = b_{mn}(\lambda_n - \lambda_0)^{-1} + b_{mn}(\lambda_m - \lambda_n)^{-1} + \\ + b_{mn}\lambda_0(\lambda_m - \lambda_n)^{-1}(\lambda_n - \lambda_0)^{-1},$$

где (b_{mn}) — матрица оператора B. Если $m = n$ или если $m \ge k+1$, то $b_{mn}^{(k)} = 0$. Из только что приведенного представления матрицы оператора B_k получаем, что его матрица совпадает с матрицей оператора $P_{(k)}(B - JB)(A - \lambda_0 I)^{-1} + P_{(k)}\Gamma B + \lambda_0 P_{(k)}(\Gamma B)R(\lambda_0, A) = P_{(k)}T_0$, где $T_0 = (B - JB)R(\lambda_0, A) + \Gamma B + \lambda_0(\Gamma B)R(\lambda_0, A) \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Следовательно, $B_k = P_{(k)}T_0$, $k \ge 0$. Поскольку $\lim_{k\to\infty}\left\|P_{(k)}T_0 - T_0\right\|_2 = 0,$ то последовательность B_k сходится (при $k \to \infty$) к T_0 в равномерной операторной топологии. Следовательно, ввиду замкнутости оператора A, из вида оператора B_k вытекает, что $\mathrm{Im}((\Gamma B)R(\lambda_0, A)) \subset D(A)$ и имеет место равенство

$$A(\Gamma BR(\lambda_0, A)) = T_0. \tag{36}$$

Если $x \in D(A)$, то вектор x представим в виде $x = R(\lambda_0, A)y$ для некоторых $y \in \mathcal{H}$ и, следовательно, доказано свойство $(\Gamma B)x \in D(A)$ для любого $x \in D(A)$. Далее, из (36) получаем

$$A(\Gamma B)x = (B - JB)x + (\Gamma B)(A - \lambda_0 I)x + \\ + \lambda_0(\Gamma B)x = (B - JB)x + (\Gamma B)Ax, \\ x \in D(A). \tag{37}$$

Таким образом, свойство (b) установлено для операторов $B, \Gamma B, JB$.

Теперь непосредственно из определения операторов $\Gamma_k B, J_k B, k \ge 0$, и доказанного следует, что $(\Gamma_k B)x = (\Gamma B - P_{(k)}\Gamma BP(k))x \in D(A)$ для любого $x \in D(A)$, т.е. доказано свойство (b) для операторов $\Gamma_k B, k \ge 0$.

Кроме того, из (37) следует, что

$$A(\Gamma_k B)x = A\Gamma Bx - AP_{(k)}(\Gamma B)P_{(k)} = \\ = A\Gamma Bx - P_{(k)}(A\Gamma B)P_{(k)} = (B - JB)x + \\ + (\Gamma B)Ax - P_{(k)}(B - JB)P_{(k)}x - \\ - P_{(k)}(\Gamma B)AP_{(k)}x = (B - J_k B)x + \\ + (\Gamma_k B)Ax, \ x \in D(A).$$

Таким образом, доказаны свойства (b) и (d) из предположения 1. Установим свойство (e) для $k \ge k_0$. Докажем, что $UD(A) = D(A)$ для $U = I + \Gamma_k B$. Включение $UD(A) \subset D(A)$ следует из условия (b) предположения 1. Доказывая обратное включение, рассмотрим число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $\left\|\Gamma_k B\right\| + \varepsilon < 1$. Пусть число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ таково, что $\left\|(B - J_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\right\|_2 < \varepsilon$. Из свойства предположения 1 следует равенство

$$T_\varepsilon = (A - \lambda_\varepsilon I)(\Gamma_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} = \\ = (B - J_k B)(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} + \Gamma_k B.$$

Поскольку $\left\|T_\varepsilon\right\|_2 \le \varepsilon + \left\|\Gamma_k B\right\|_2 < 1$, то

$$U^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\Gamma_k B)^j = \lim_{n\to\infty} U_n,$$

где $U_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\Gamma_k B)^j$. Тогда, снова используя свойства предположения 1, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}(A - \lambda_\varepsilon I)U_n(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\lim_{n\to\infty}(I - T_\varepsilon + \\ + T_\varepsilon^2 - \ldots + (-1)^n T_\varepsilon^n) = (I + T_\varepsilon)^{-1}.$$

Из замкнутости оператора A следует, что $U^{-1}x \in D(A)$ для любого вектора x из $D(A)$. Итак, $UD(A) = D(A)$. Лемма доказана. □

Теорема 2. *Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что*

$$\left\|\Gamma_k B\right\|_2 < 1, \tag{38}$$

(т.е. оператор $I+\Gamma_k B$ обратим), то оператор $L_{dir}=A-B$, где $A=L^0_{dir}$, B — оператор умножения на v, подобен оператору

$$\tilde{L}_{dir}=L^0_{dir}-\tilde{B},$$

где

$$\tilde{B}=J_k B+(I+\Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B-(\Gamma_k B)J_k B),$$

причем имеет место равенство

$$(A-B)(I+\Gamma_k B)=(I+\Gamma_k B)(A-\tilde{B}). \quad (39)$$

Операторы $J_k B$, $\Gamma_k B$, $B\Gamma_k B$, $(\Gamma_k B)(J_k B)$, $\tilde{B}$ являются операторами Гильберта—Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, оператор B из (39) представим в виде

$$\tilde{B}=JB+B\Gamma B-(\Gamma B)JB+C\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}), \quad (40)$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ ядерных операторов, определенных на $L_{2,\pi}$.

Доказательство. Все утверждения теоремы непосредственно следуют из лемм 6, 7 и теоремы 2. Оператор C из (40) имеет вид

$$C=-(I+\Gamma_k B)^{-1}(\Gamma_k B)(B\Gamma_k B-(\Gamma_k B)J_k B)+C_1,$$

где оператор $C_1=B\Gamma_k B-B\Gamma B-(\Gamma_k B)J_k B+ +(\Gamma B)JB+J_k B-JB$ имеет конечный ранг и следовательно принадлежит $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$.

Из данного представления следует, что оператор C, являясь суммой оператора конечного ранга и произведения двух операторов Гильберта—Шмидта, принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ (см. [7]). Теорема доказана. □

Полученный в теореме 5 результат позволяет свести изучение оператора $L_{dir}=A-B$ к изучению оператора $A-\tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$, определенный формулой (40), есть оператор Гильберта—Шмидта. Следовательно, для дальнейшего исследования применима теорема 3.

Замечание 3. Для оператора B умножения на потенциал v верны равенства

$$J_k((\Gamma_k B)J_k B)=0,\ k\in\mathbb{Z}_+. \quad (41)$$

Они следуют из определения трансформаторов J_k, Γ_k, $k\ge 0$ (см. формулы (8), (9), (15), (16), (32), (33)) и из равенств $P_i(\Gamma B)P_j=0$, $P_j(JB)=(JB)P_j=P_j(JB)P_j$, $j\ne 0$, также вытекающих из формул (8), (9). Равенства (41) позволяют пользоваться уравнениями вида (5).

В следующей теореме последовательности $(\alpha_n(\tilde{B}))$ и $(\tilde{\alpha}_n(\tilde{B}))$ определены формулами (13) и (17) соответственно для оператора $\tilde{B}\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, а функция $f:\sigma(A)\to\mathbb{C}$ построена с помощью формулы (14) по последовательности $(\alpha_n(\tilde{B}))$.

Теорема 6. *Пусть число $k\in\mathbb{Z}_+$ таково, что $\|\Gamma_k B\|_2<1$. Тогда для любого числа $m\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяющего условию*

$$4\left(\alpha_{m+1}(\tilde{B})+\frac{\tilde{\alpha}_{m+1}(\tilde{B})}{2}\right)2<1, \quad (42)$$

оператор $L_{dir}=A-B$ подобен оператору вида

$$A-B_0=A-P_{(m)}\tilde{X}P_{(m)}- -\sum_{|j|\ge m+1}P_j\tilde{X}P_j=A-J_m\tilde{X}. \quad (43)$$

Оператор $\tilde{X}=\tilde{X}_0 f(A)$, где $\tilde{X}_0\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, есть решение уравнения (5), в котором $\Gamma=\Gamma_m$, $J=J_m$ и $B=\tilde{B}$. Оператор $I+\Gamma_m\tilde{X}$ обратим и преобразование подобия оператора $A-B$ в оператор $A-B_0$ осуществляет оператор вида

$$U_{km}=(I+\Gamma_k B)(I+\Gamma_m\tilde{X})=I+V_{km}, \quad (44)$$

где $V_{km}\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Кроме того, оператор $B_0=J_m\tilde{X}$ представим в виде

$$B_0=J_m B+J_m(B\Gamma B)+T_0=JB+J(B\Gamma B)+T_1, \quad (45)$$

где T_0, T_1 — ядерные операторы из $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, причем $J_m T_j=T_j$, $j=0,1$.

Доказательство. Существование числа $k\in\mathbb{Z}_+$, для которого $\|\Gamma_k B\|_2<1$, следует из леммы 7. Следовательно, оператор $I+\Gamma_k B$ обратим. Из теоремы 5 следует, что оператор $L_{dir}=A-B$ подобен оператору вида $A-\tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$ определен равенством (40). Поскольку $\tilde{B}\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, то к оператору $A-\tilde{B}$ применима теорема 3, из которой следует подобие данного оператора (и, следовательно, оператора $A-B$) оператору вида (43), где оператор $\tilde{X}=\tilde{X}_0 f(A)$, $\tilde{X}_0\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ — решение уравнения (5). Применяя к обоим частям данного уравнения трансформатор J_m, и используя замечание 4, получаем, что

$$B_0=J_m\tilde{X}=J_m(\tilde{B}\Gamma_m\tilde{X})+J_m\tilde{B}= =J_m\tilde{B}+J_m(\tilde{B}\Gamma_m\tilde{B})+J_m(\tilde{B}\Gamma_m(\tilde{X}-\tilde{B}))= =J_m\tilde{B}+J_m(\tilde{B}\Gamma\tilde{B})+K= =J_m B+J_m(B\Gamma B)+T_0=JB+J(B\Gamma B)+T_1,$$

где $K,T_0,T_1\in\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$. Ясно, что $J_m T_j=T_j$, $j=0,1$. При получении данных равенств использовались следующие свойства: произведение двух операторов Гильберта—Шмидта является ядерным оператором, а операторы $J_m X-JX$, $\Gamma_m X-\Gamma X$, $X\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $m\ge 0$, являются операторами конечного ранга.

Ясно, что оператор преобразования оператора $L_{dir} = A - B$ в оператор $A - B_0$ совпадает с оператором U_{km} вида (44). Поскольку $\Gamma_k B, \Gamma_m \tilde{X} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, оператор V_{km} из (44) принадлежит $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Теорема доказана. $\square$

Доказанная теорема 6 позволяет установить асимптотику собственных значений оператора L_{dir}. А именно, из равенства $\sigma(L_{dir}) = \sigma(A - B_0)$, представления (45) для оператора B_0 (здесь и далее используются обозначения теоремы 6), а также из замечания 2 будет следовать, что спектр оператора L_{dir} представим в виде (см. равенства (23))

$$\sigma(L_{dir}) = \sigma(A - B_0) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{|j| \geq m+1} \sigma(A_j) \right), \quad (46)$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - B_0$ на подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, где $P_{(m)} = \sum_{|j| \leq m} P_j$, A_j — сужение оператора $A - B_0$ на подпространство $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $|j| \geq m+1$. Из представления (46) следует (ввиду конечномерности подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$), что множество $\sigma(A_{(m)}) = \sigma(m)$ конечно. Подпространства $\mathcal{H}_j$, $|j| \geq m+1$ одномерны. Из формулы (45), определяющий оператор B_0 и равенств $J_m T_j = T_j$, $j = 0,1$, отмеченных в теореме 6, следует, что подпространства $\mathcal{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $|j| \geq\geq m+1$, инвариантны относительно $A - B_0$. Таким образом, операторы $A_{(m)}$, A_j, $|j| \geq m+1$, корректно определены.

Для дальнейшего очень важными являются вычисления собственных значений операторов B_j, $|j| \geq m+1$, которые являются сужениями оператора $JB + J(B\Gamma B)$ на $\operatorname{Im} P_j$. Таким образом, $A_j = jI_j - B_j - T_{1j}$, где $T_{1j} = T_1^j \mid \operatorname{Im} P_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Для данного используем их матричное представление в базисе из $\operatorname{Im} P_j$. При вычислениях будут использоваться ряды Фурье

$$P(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j e^{i2jt}, \ Q(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q_j e^{i2jt}, \ t \in \mathbb{R},$$

функций $P, Q \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$.

Рассмотри представление матрицы (b_{nj}), $n, j \in \mathbb{Z}$, оператора B относительно ортонормированного базиса s_n, $n \in \mathbb{Z}$, в $L_{2,\pi}(\mathbb{R})$. Имеют место следующие равенства

$$b_{nj} = (Bs_n, s_j) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi P(t) e^{i(n+j)t} dt + \int_0^\pi Q(t) e^{-i(n+j)t} dt \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{cases} p_{-\frac{n+j}{2}} + q_{\frac{n+j}{2}}, \ \text{если} + j \in 2\mathbb{Z}, \\ \tilde{p}_{-\frac{n+j+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+j+1}{2}}, \ \text{если} + j \in 1 + 2\mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $\tilde{P}(t) = P(t)e^{-it}$, $\tilde{Q}(t) = Q(t)e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, и $\tilde{p}_j$, $\tilde{q}_j$, $j \in \mathbb{Z}$ — коэффициенты Фурье функций $\tilde{P}, \tilde{Q} \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ по ортонормированному базису $e_n(t) = \exp 2int$, $n \in \mathbb{Z}$.

Далее полагается

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(p_{-\frac{n}{2}} + q_{\frac{n}{2}} \right), \ n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}\left(\tilde{p}_{-\frac{n+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+1}{2}} \right), \ n \in 1 + 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, матричные элементы оператора B представимы в виде

$$b_{nj} = \theta_{n+j}, \ n, j \in \mathbb{Z}, \quad (47)$$

т.е. матрица оператора B является ганкелевой.

Далее для вычисления собственных значений оператора L_{dir} рассмотрим диагональные элементы d_n, $n \in \mathbb{Z}$, матрицы оператора $B\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Они представимы в виде

$$d_n = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq n}} \frac{\theta_{n+j}\theta_{n+j}}{j - n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq n}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j}, \ n \in \mathbb{Z}. \quad (48)$$

Теперь из представления (45) оператора B_0 и леммы 1 (см. также Теоремы 23.2 из [2]) получаем (при выполнении условий (38) и (42) на выбор чисел k и m), что верно представление

$$\sigma(L_{dir}) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right), \quad (49)$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество (с числом точек не превосходящим $2m+1$), а множества σ_n, $|n| \geq m+1$, одноточечны и состоят только из собственных значений оператора L_{dir}, $\sigma_n = \{\tilde{\lambda}_n\}$, $|n| \geq m+1$, причем имеет место свойство

$$\sum_{|n| \geq m+1} |\tilde{\beta}_n| < \infty, \quad (50)$$

где $\tilde{\beta}_n = \tilde{\lambda}_n - n + \theta_{2n} + \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j}$.

Из полученного представления следует

Теорема 7. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L_{dir} представим в виде (49), где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество, а множества σ_n, $|n| \geq m+1$, определяется равенством* $\tilde{\lambda}_n = n - \theta_{2n} - \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \frac{\theta_{j+2n}^2}{j} + \tilde{\beta}_n$.

Поскольку оператор $A - B$ подобен спектральному по Данфорду оператору $A - J_m X$ (см.

Теорема 6), то оператор $A - B$ также спектрален, следовательно, имеет место

Следствие 1. *Существует число* $m \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что оператор* L_{dir} *спектрален по Данфорду относительно разложения* (49).

Локализационные оценки теоремы 7 являются новыми. Ранее не было установлено, что $\lim\limits_{|n|\to\infty}\left|\tilde{\lambda}_n - \lambda_n\right| = 0$ для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L_{dir}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джаков П.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / П. Джаков , Б. С. Митягин // УМН. — 2006. — Т. 61. — № 4. — С. 77—182.

2. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета, 1987. — 165 с.

3. *Баскаков А. Г.* Теория о расщеплении оператора и некоторые, смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Известия АН СССР. сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 3.

4. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3—32.

5. *Данфорд Н.* Линейные операторы / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц // Спектральные операторы. — Т. III. — М.: Мир, 1974. — 661 с.

6. *Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marinus A. Kaashoek* Classes of Linear Operators Vol. 1. Birkhauser Verlag Basel Boston—Berlin. 1990. St468.

7. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

Дербушев Алексей Валерьевич — аспирант, Воронежский государственный университет
Тел. 8909-211-2957
E-mail: dav99984@mail.ru

Derbushev Alexey Valerievich — aspirant, Voronezh State University
Tel. 8909-211-2957
E-mail: dav99984@mail.ru