УДК 517.925.52

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ ГЛАДКОСТИ ПРАВОЙ ЧАСТИ

А. Н. Гудович, М. И. Каменский, Е. В. Хроликова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2010 г.

Аннотация. Рассмотрена задача существования и единственности почти периодических решений для дифференциальных уравнений с негладкой, удовлетворяющей условию Липшица почти периодической правой частью. Найдены условия, при которых принцип усреднения Боголюбова-Крылова для уравнений такого типа остается верным.
Ключевые слова. Принцип усреднения, почти периодические решения, функция Грина, обобщенный якобиан Кларка.

Abstract. The aim of this paper is to study the existence and behavior of almost periodic solutions of differential equations with nonsmooth Lipshitz continuous nonlinearity. We give sufficient conditions for the existence and uniqueness of such solutions. Moreover, we prove that under these conditions the averaging theorem of Krylov-Bogolyubov holds true even without smoothness requirement.
Key words. Averaging method, almost periodic solutions, Green function, Clarke's generalized Jacobian.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях техники и физики много внимания уделяется вопросам нелинейных колебаний в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. При этом одним из наиболее эффективных методов исследования дифференциальных уравнений с возмущенной правой частью является принцип усреднения, который был обоснован в классических работах Н. Н. Боголюбова [1] и Н. М. Крылова [2]. Особый интерес представляет задача о существовании почти периодических решений дифференциальных уравнения с малым параметром и почти периодической правой частью. Данной тематике посвящено много работ (см., например, [1], [3], [4], [5], [6]). Но во всех известных формулировках принципа усреднения для таких уравнений присутствует одно достаточно ограничительное условие — гладкость правой части.

В настоящей работе вышеупомянутый принцип обоснован для дифференциальных уравнений с негладкой почти периодической правой частью, удовлетворяющей условию Липшица. В отличие от рассматриваемого в классических работах случая, где требования накладываются в том числе и на дифференциал правой части уравнения, в данной статье условия накладываются лишь на обобщенный дифференциал Кларка правой части, который, как известно, всегда существует для липшицевых функций. Для доказательства существования и единственности почти периодического решения применяется обобщенный принцип сжимающих отображений, изложенный в статье А. И. Перова [7]. Доказательство непрерывности решений по параметру базируется на свойстве почти периодичности правой части дифференциального уравнения.

Статья организована следующим образом. В первой части приводятся основные обозначения, понятия и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Во второй части статьи дается формулировка основного результата — Теорема 5. В третьей части излагается доказательство Теоремы 5.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

В статье приняты следующие обозначения: $Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ — квадратная матрица размера

$n \times n$; I — единичная матрица; вектор-строка и вектор-столбец с координатами $q_1,\ldots,q_n$ записываются соответственно $(q_1,\ldots,q_n)$ и $col(q_1,\ldots,q_n)$. Через $\operatorname{spr} Q$ обозначен спектральный радиус матрицы Q. Для n-мерных векторов x и y пишем $x \le y$ (соответственно, $x < y$), если $x_i \le y_i$ (соответственно, $x_i < y_i$) при всех $i = 1,\ldots,n$. Матрицу Q, обладающую свойством $q_{ij} \ge 0 (i,j = 1,\ldots,n)$, будем называть неотрицательной и писать $Q \ge 0$. Через $\operatorname{co} A$ обозначается выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathfrak{R}$ — метрическое пространство. Через $B(x,r) \subset \mathfrak{R}$ обозначен замкнутый шар с центром в точке x радиуса r.

Определение 1. (почти периодичность по Г. Бору) [8, с. 9]. Пусть $\mathfrak{R}$ — метрическое пространство с метрикой $\rho[x,y]$. Непрерывную функцию $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в $\mathfrak{R}$ называют *почти периодической*, если каждому $\eta > 0$ соответствует такое $l = l(\eta) > 0$, что в любом промежутке $[t_0, t_0 + l(\eta)]$ найдется по крайней мере одно число t^*, при котором

$$\rho[x(t), x(t+t^*)] < \eta \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (1)$$

Определение 2. [8, с. 13]. Пусть E — банахово пространство. Непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \times E \to \mathfrak{R}$ называют *равномерно почти периодической*, если каждому $\eta > 0$ и каждому $r > 0$ соответствует такое $l = l(\eta, r) > 0$, что в любом промежутке $[t_0, t_0 + l(\eta, r)]$ найдется по крайней мере одно t^*, при котором

$$\rho[f(t,x), f(t+t^*,x)] < \eta \ \left(-\infty < t < \infty, \|x\| < r\right). \quad (2)$$

Замечание 1. [8, с. 13]. В случае, когда $E = \mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$, равномерная почти периодичность равносильна тому, что $f(t,x)$ почти периодична по t при каждом фиксированном x и равномерно непрерывна по x на каждом шаре $\|x\| < r$. В частности, почти периодическая по t функция $f(t,x)$ равномерно почти периодична, если она удовлетворяет условию Липшица по переменной x.

Теорема 1. [9, с. 379]. Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ почти периодическая по первой переменной функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечное среднее значение:

$$M(f,x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s,x)\,ds. \quad (3)$$

Определение 3. [7]. Множество X называется *обобщенным метрическим пространством*, если каждой паре точек $x, y \in X$ поставлен в соответствие вектор-столбец $\rho[x,y] = col(\rho_1[x,y],\ldots,\rho_n[x,y])$ из вещественного n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, причем выполнены следующие условия:

1. $\rho[x,y] \ge 0$,
2. $\rho[x,y] = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $\rho[x,y] = \rho[y,x]$,
4. $\rho[x,y] \le \rho[x,z] + \rho[z,y]$ (обобщенное неравенство треугольника).

При выполнении вышеуказанных требований векторная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^n$ называется обобщенной метрикой. При $n = 1$ получается обычное метрическое пространство. Аналогично случаю стандартного метрического пространства в обобщенном метрическом пространстве могут быть введены понятия сходимости и полноты.

Дадим определение пространства почти периодических функций. Обозначим через $C(\mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций со значениями в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Через $C^m(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$, для которых $f', \ldots, f^{(m)}) \in C(\mathbb{R}^n)$. Подпространство пространства $C(\mathbb{R}^n)$, состоящее из почти периодических функций, называется пространством почти периодических функций и обозначается через $B(\mathbb{R}^n)$. Аналогично через $B^m(\mathbb{R}^n)$ обозначается подпространство пространства $C^m(\mathbb{R}^n)$, состоящее из почти периодических функций f, у которых $f', \ldots, f^{(m)} \in B(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $x(t) = col(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $y = col(y_1(t),\ldots,y_n(t))$, т.е. $x, y \in C(\mathbb{R}^n)$. Под векторной нормой будем понимать норму

$$\|x\|_{C,n} = col\left(\|x_1\|_{C(\mathbb{R})}, \ldots, \|x_n\|_{C(\mathbb{R})}\right), \quad (4)$$

где $\|x_i\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} | x_i(t) | \, (i = 1,\ldots,n)$. Определим норму (соответственно, векторную норму) в пространстве почти периодических функций $B(\mathbb{R})$ (соответственно, $B(\mathbb{R}^n)$) с помощью равенства $\|x\|_{B(\mathbb{R})} = \|x\|_{C(\mathbb{R})}$ (соответственно, $\|x\|_{B,n} = \|x\|_{C,n}$). Заметим, что пространство почти периодических функций $B(\mathbb{R})$ является банаховым относительно введенной нормы. Следовательно, пространство $B(\mathbb{R}^n)$ полно относительно нормы $\|x\|_{B,n}$.

Определение 4. Пусть x — функция из $C^m(\mathbb{R})$, $A_i(t)$ $(i = 1,\ldots,m)$ — квадратные матрицы порядка n с почти периодическими элементами. Рассмотрим дифференциальное выражение:

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x. \qquad (5)$$

Дифференциальное выражение (5) определяет дифференциальный оператор L (почти периодический оператор), который можно рассматривать в различных пространствах функций.

Определение 5. [8, с. 15]. Оператор L называется *регулярным*, если уравнение

$$Lx = f(t) \qquad (6)$$

имеет единственное решение $x \in C^m(\mathbb{R}^n)$ при любой правой части $f \in C(\mathbb{R}^n)$, причем $x \in B^m(\mathbb{R}^n)$, если $f \in B(\mathbb{R}^n)$.

Определение 6. [8, с. 36]. Пусть почти периодический оператор (5) регулярен. *Функцией Грина* оператора (5) называется матрица-функция $G(t,s)$ $(-\infty < t, s < \infty)$, обладающая следующими свойствами.

1. При $t \neq s$ справедливо тождество:

$$\frac{\partial^m G(t,s)}{\partial t^m} + A_1(t)\frac{\partial^{m-1}G(t,s)}{\partial t^{m-1}} + \ldots + \\ + A_m(t)G(t,s) \equiv 0. \qquad (7)$$

2. Матрицы-функции

$$G(t,s),\ \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}, \ldots,\ \frac{\partial^{m-2}G(t,s)}{\partial t^{m-2}} \qquad (8)$$

непрерывны по совокупности переменных $t, s \in (-\infty, \infty)$, производная $\frac{\partial^{m-1}G(t,s)}{\partial t^{m-1}}$ непрерывна по совокупности переменных при $t \neq s$ и

$$\frac{\partial^{m-1}G(t+0,t)}{\partial t^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1}G(t-0,t)}{\partial t^{m-1}} = I. \qquad (9)$$

3. Справедливы оценки:

$$\left|G(t,s)\right|, \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^{m-1}G(t,s)}{\partial t^{m-1}}\right| \le Pe^{-\gamma|t-s|} \\ (-\infty < t, s < \infty \neq s),\ 345\ P, \gamma > 0. \qquad (10)$$

Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально липшицева. Через Ω_f обозначим множество точек, в которых f не дифференцируема. Если в точке $y \in \mathbb{R}^n$ функция f дифференцируема, то через $Jf(y)$ будем обозначать матрицу соответствующего якобиана.

Определение 7. [10, с. 69]. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально липшицева. *Обобщенный якобиан Кларка* $\partial f(x)$ функции f в точке x определяется следующим образом:

$$\partial f(x) = \mathrm{co}\Big\{\lim_{k\to\infty} Jf(x_k) : \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n, \\ x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x, x_k \notin \Omega_f\Big\}. \qquad (11)$$

Теорема 2. [10, с. 71]. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — локально липшицево отображение. Тогда $f(x_1) - f(x_2) \in \mathrm{co}\,\partial f([x_1, x_2])(x_1 - x_2)$. Здесь через $[x_1, x_2]$ обозначен отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2.

Замечание 2. Пусть функция $F : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ липшицева по третьей переменной. В статье через $\partial F(\varepsilon, \tau, y)$ обозначен обобщенный якобиан Кларка по переменной y при фиксированных ε и τ.

Элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $\partial F(\varepsilon, \tau, y)$ обозначен через $\frac{\partial F_i(\varepsilon, \tau, y)}{\partial y_j}$.

Пусть $\mathfrak{U} = \{\partial F(\varepsilon, \tau, y) : \varepsilon \in (0,1), \tau \in (-\infty, \infty), y \in \mathbb{R}^n\}$. Обозначим:

$$m_{ii} = \inf_{\mathfrak{U}} \frac{\partial F_i(\varepsilon, \tau, y)}{\partial y_i},$$

$$M_{ii} = \sup_{\mathfrak{U}} \frac{\partial F_i(\varepsilon, \tau, y)}{\partial y_i}\ \ (i = 1, \ldots, n); \qquad (12)$$

$$|M_{ij}| = \sup_{\mathfrak{U}} \left|\frac{\partial F_i(\varepsilon, \tau, y)}{\partial y_j}\right|\ \ (i, j = 1, \ldots, n; i \neq j).$$

Определение 8 [7]. Пусть X — обобщенное метрическое пространство. Говорят, что отображение $F : X \to X$ есть *обобщенное сжимающее отображение*, если выполнено условие:

$$\rho[Fx, Fy] \le Q\rho[x, y],\ (x, y \in X), \qquad (13)$$

где $Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^n$ — некоторая вещественная квадратная неотрицательная $n \times n$ матрица, спектральный радиус которой меньше единицы, т.е.

$$Q \ge 0,\ \ \mathrm{spr}\,Q < 1. \qquad (14)$$

Теорема 3 (обобщенный принцип сжимающих отображений) [7]. Пусть F обобщенное сжимающее отображение полного обобщенного метрического пространства X в себя. Тогда оно имеет единственную неподвижную точку x^*, т.е. уравнение $x = Fx$ имеет единственное решение.

Пусть $Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^n$ — квадратная матрица. Введем сокращенные обозначения для определителей, составленных из элементов данной матрицы:

$$Q\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} q_{i_1k_1} & q_{i_1k_2} & \cdots & q_{i_1k_p} \\ q_{i_2k_1} & q_{i_2k_2} & \cdots & q_{i_2k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i_pk_1} & q_{i_pk_2} & \cdots & q_{i_pk_p} \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Определение 9 [11, с. 14]. Определитель матрицы (15) называется *минором p -го* порядка матрицы Q, если $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$ и $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_p \le n$.

Миноры

$$Q\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}, \tag{16}$$

у которых $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \ldots, i_p = k_p$, называются *главными.*

Теорема 4 (Мецлер) [12, с. 335, упр. 1]. Пусть $V = [v_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ — неотрицательная матрица. Необходимым и достаточным условием того, чтобы все собственные числа матрицы V лежали внутри единичного круга, т.е. $\operatorname{spr} V < 1$, является положительность всех главных миноров матрицы $I - V$.

Лемма 1 (Котелянский) [11, с. 369]. Если в вещественной матрице $G = [g_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ все недиагональные элементы отрицательны или равны нулю $g_{ij} \le 0 \quad (i \ne j; i, j = 1, \ldots, n)$, а последовательные главные миноры положительны, т.е.

$$\begin{gathered} g_{11} = G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \\ G\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0, \ldots, G\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} > 0, \end{gathered} \tag{17}$$

то все главные миноры матрицы G положительны.

Замечание 3 [7]. Из теоремы Мецлера и леммы Котелянского вытекает, что спектральный радиус неотрицательной матрицы $V = [v_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ меньше единицы тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\begin{gathered} 1 - v_{11} > 0, \begin{vmatrix} 1 - v_{11} & -v_{12} \\ -v_{21} & 1 - v_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \\ \begin{vmatrix} 1 - v_{11} & -v_{12} & \ldots & -v_{1n} \\ -v_{21} & 1 - v_{22} & \ldots & -v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_{n1} & -v_{n2} & \ldots & 1 - v_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Замечание 4. Как показано в [13], в случае, когда матрица V имеет вид $\mathbf{\Gamma}^{-1} M$, где $\mathbf{\Gamma}$ — диагональная матрица с положительными компонентами, а M — квадратная матрица с неотрицательными компонентами, условие (18) эквивалентно тому, что собственные значения $-\mathbf{\Gamma} + M$ лежат в левой полуплоскости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим задачу о почти периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения следующего типа:

$$x'(t) = \varepsilon f(t, x). \tag{19}$$

Предполагается, что правая часть системы (19) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных, является почти периодической по t при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ и липшицевой по x при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим:

$$F^0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt. \tag{20}$$

Наряду с уравнением (19) рассмотрим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F^0(x). \tag{21}$$

Положим $\tau = \varepsilon t$, $y(\tau) = x\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)$, тогда уравнения (19) и (21) примут вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right), \tag{22}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = F^0(y). \tag{23}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1), \tau \in (-\infty, \infty), y \in \mathbb{R}^n$. Положим:

$$\begin{gathered} F(\varepsilon, \tau, y) = f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right), \\ F(0, y) = F^0(y). \end{gathered} \tag{24}$$

В новых обозначениях получим:

$$y' = F(\varepsilon, \tau, y), \tag{25}$$

$$y' = F(0, y). \tag{26}$$

Предположим, что правая часть уравнения (25) удовлетворяет следующему условию:

i) $m_{ii}, M_{ii}, |M_{ij}|$ конечны при всех $i, j = 1, \ldots, n$, причем $M_{ii} \ne 0$.

Определим вспомогательную матрицу Q следующим образом:

A) Если все $M_{ii}, i = 1, \ldots, n,$ одного знака, то положим:

A1)

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{M_{11}} & -\frac{|M_{12}|}{M_{11}} & \cdots & -\frac{|M_{1n}|}{M_{11}} \\ -\frac{|M_{21}|}{M_{22}} & \frac{m_{22}}{M_{22}} & \cdots & -\frac{|M_{2n}|}{M_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{|M_{n1}|}{M_{nn}} & -\frac{|M_{n2}|}{M_{nn}} & \cdots & \frac{m_{nn}}{M_{nn}} \end{pmatrix} \quad (27)$$

для случая $M_{ii} > 0$;

A2)

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{M_{11}}{m_{11}} & \frac{|M_{12}|}{m_{11}} & \cdots & \frac{|M_{1n}|}{m_{11}} \\ \frac{|M_{21}|}{m_{22}} & \frac{M_{22}}{m_{22}} & \cdots & \frac{|M_{2n}|}{m_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|M_{n1}|}{m_{nn}} & \frac{|M_{n2}|}{m_{nn}} & \cdots & \frac{M_{nn}}{m_{nn}} \end{pmatrix} \quad (28)$$

для случая $M_{ii} < 0$.

B) Если среди M_{ii} встречаются числа разных знаков, то без ограничения общности можно считать, что существует $p \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le n-1$, такое, что $M_{ii} > 0$ при $i = 1,\ldots,p$ и $M_{ii} < 0$ при $i = p+1,\ldots,n$. В самом деле, в противном случае достаточно лишь поменять порядок следования соответствующих компонент вектор-функций F и y в уравнении (25). В этом случае положим

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{M_{11}} & \cdots & -\frac{|M_{1p}|}{M_{11}} & -\frac{|M_{1p+1}|}{M_{11}} & \cdots & -\frac{|M_{1n}|}{M_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{|M_{p1}|}{M_{pp}} & \cdots & \frac{m_{pp}}{M_{pp}} & -\frac{|M_{pp+1}|}{M_{pp}} & \cdots & -\frac{|M_{pn}|}{M_{pp}} \\ \frac{|M_{p+11}|}{m_{p+1p+1}} & \cdots & \frac{|M_{p+1p}|}{m_{p+1p+1}} & \frac{M_{p+1p+1}}{m_{p+1p+1}} & \cdots & \frac{|M_{p+1n}|}{m_{p+1p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|M_{n1}|}{m_{nn}} & \cdots & \frac{|M_{np}|}{m_{nn}} & \frac{|M_{np+1}|}{m_{nn}} & \cdots & \frac{M_{nn}}{m_{nn}} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Теорема 5. Пусть выполнено условие **i)** и пусть все последовательные главные миноры соответствующей матрицы Q положительны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ уравнение (22) (или, что то же самое, (25)) имеет единственное почти периодическое решение $y^{\varepsilon}(\tau)$, причем $\|y^{\varepsilon}(\tau) - y^{*}\|_{B,n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где y^{*} — стационарное решение усредненной задачи (23) (или, что то же самое, (26)).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Доказательство будет проводиться для общего случая **B)**. Напомним, что здесь $M_{ii} > 0$ при $i = 1,\ldots,p$ и $M_{ii} < 0$ при $i = p+1,\ldots,n$. Для случая **A)** рассуждения аналогичны. Доказательство проведем в два этапа. Сначала, опираясь на обобщенный принцип сжимающих отображений (см. Теорему 3), докажем существование и единственность соответствующего почти периодического решения уравнения (25). На втором этапе покажем сходимость к стационарному решению задачи.

I. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\Gamma = [\Gamma_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ — диагональная матрица следующего вида:

$$\Gamma_{ii} = \begin{cases} -M_{ii}, \text{ при } i = 1,\ldots,p; \\ -m_{ii}, \text{ при } i = p+1,\ldots,n. \end{cases} \quad (30)$$

Прибавляя к левой и правой части уравнения (25) $\Gamma y(\tau)$, получим следующее эквивалентное уравнение:

$$y' + \Gamma y(\tau) = F(\varepsilon,\tau,y) + \Gamma y(\tau). \quad (31)$$

Заметим, что решение полученного неоднородного уравнения (31) с помощью функции Грина $G_{\Gamma}(\tau,s)$, соответствующей дифференциальному оператору $y' + \Gamma y(\tau)$, можно записать следующим образом (см., например, [8, с. 37]):

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\Gamma}(\tau,s)[F(\varepsilon,s,y(s)) + \Gamma y(s)]ds. \quad (32)$$

Рассмотрим оператор $H : B(\mathbb{R}^n) \to B(\mathbb{R}^n)$, определенный следующим образом:

$$Hy(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\Gamma}(\tau,s)[F(\varepsilon,s,y(s)) + \Gamma y(s)]ds.$$

Покажем, что H — обобщенное сжимающее отображение относительно обобщенной метрики $\rho[x,y] = \|x-y\|_{B,n}$. Рассмотрим разность:

$$Hy^1(\tau) - Hy^2(\tau) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\Gamma}(\tau,s)[F(\varepsilon,s,y^1(s)) - \\ -F(\varepsilon,s,y^2(s)) + \Gamma(y^1(s) - y^2(s))]ds. \quad (33)$$

Заметим, что из Теоремы 2 вытекает следующее:

$$F(\varepsilon,s,y^1(s)) - F(\varepsilon,s,y^2(s)) \in \\ \in \operatorname{co}\partial F(\varepsilon,s,[y^1(s),y^2(s)])(y^1(s) - y^2(s)),$$

т.е.

$$F(\varepsilon,s,y^1(s))-F(\varepsilon,s,y^2(s))= \\ =Z(\varepsilon,s,\xi(s))(y^1(s)-y^2(s)), \quad (34)$$

где

$$\xi(s)\in[y^1(s),y^2(s)],$$

$$Z(\varepsilon,s,\xi(s)):=[z_{ij}(\varepsilon,s,\xi(s))]_{i,j=1}^n,$$

$$z_{ij}(\varepsilon,s,\xi(s))\in co\left\{\frac{\partial F_i(\varepsilon,s,[y^1(s),y^2(s)])}{\partial y_j}\right\}.$$

Заметим также, что функция Грина дифференциального оператора $Ly=\frac{dy}{d\tau}+\Gamma y(\tau)$ с диагональной матрицей Γ записывается следующим образом (см. [8, с. 43—44]):

1) если $\Gamma_{ii}<0$, тогда

$$G_{\Gamma_{ii}}(\tau,s)=\begin{cases}0, & \tau\ge s\\ -e^{-\int_s^\tau \Gamma_{ii}d\zeta}, & \tau<s\end{cases}= \\ =\begin{cases}0, & \tau\ge s\\ -e^{M_{ii}(\tau-s)}, & \tau<s,\end{cases} \quad (35)$$

2) если $\Gamma_{ii}>0$, тогда

$$G_{\Gamma_{ii}}(\tau,s)=\begin{cases}e^{-\int_s^\tau \Gamma_{ii}d\zeta}, & \tau\ge s\\ 0, & \tau<s\end{cases}=\begin{cases}e^{m_{ii}(\tau-s)}, & \tau\ge s\\ 0, & \tau<s.\end{cases} \quad (36)$$

В общем случае функция Грина представляет собой диагональную матрицу следующего вида:

Г1) если $\tau\ge s$, то диагональные элементы $G_{\Gamma_{ii}}(\tau,s)$ матрицы $G_\Gamma(\tau,s)$ равны 0 при $i=1,\dots,p$ и $e^{m_{ii}(\tau-s)}$ при $i=p+1,\dots,n$;

Г2) если $\tau<s$, то $G_{\Gamma_{ii}}(\tau,s)=-e^{M_{ii}(\tau-s)}$ и $G_{\Gamma_{ii}}(\tau,s)=0$ при $i=1,\dots,p$ и $i=p+1,\dots,n$, соответственно.

Учитывая равенство (34), выражение, стоящее в правой части равенства (33), можно переписать следующим образом:

$$Hy^1(\tau)-Hy^2(\tau)= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}G_\Gamma(\tau,s)(Z(\varepsilon,s,\xi(s))+\Gamma)(y^1(s)-y^2(s))ds. \quad (37)$$

После перемножения матриц $G_\Gamma(\tau,s)$ и $Z(\varepsilon,s,\xi(s))+\Gamma$ и применения полученного результата к вектору $y^1(s)-y^2(s)$ интеграл в правой части выражения (37) можно записать в виде вектор-столбца $w(\tau)=(w_1(\tau),w_2(\tau),\dots,w_n(\tau))$, где

1) при $i=1,\dots,p$

$$w_i(\tau)=\int_\tau^{+\infty}-e^{M_{ii}(\tau-s)}\times \\ \times\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n z_{ij}(\varepsilon,s,\xi(s))(y_j^1(s)-y_j^2(s))+\right. \\ \left.+(z_{ii}(\varepsilon,s,\xi(s))-M_{ii})(y_i^1(s)-y_i^2(s))\right]ds; \quad (38)$$

2) при $i=p+1,\dots,n$

$$w_i(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}e^{m_{ii}(\tau-s)}\times \\ \times\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n z_{ij}(\varepsilon,s,\xi(s))(y_j^1(s)-y_j^2(s))+\right. \\ \left.+(z_{ii}(\varepsilon,s,\xi(s))-m_{ii})(y_i^1(s)-y_i^2(s))\right]ds. \quad (39)$$

Таким образом, из соотношений (37), (38), (39) следует, что

$$Hy^1(\tau)-Hy^2(\tau)=col(w_1(\tau),\dots,w_n(\tau)) \quad (40)$$

и

$$\left\|Hy^1-Hy^2\right\|_{B,n}= \\ =col\left(\left\|w_1\right\|_{C(\mathbb{R})},\dots,\left\|w_n\right\|_{C(\mathbb{R})}\right). \quad (41)$$

Оценим $\left\|w_i\right\|_{C(\mathbb{R})}$, $i=1,\dots,n$. Из (38), (39) следует, что

1) при $i=1,\dots,p$

$$\left|w_i(\tau)\right|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\int_\tau^{+\infty}e^{M_{ii}(\tau-s)}\left|z_{ij}(\varepsilon,s,\xi)\right|\left\|y_j^1-y_j^2\right\|_{C(\mathbb{R})}ds+ \\ +\int_\tau^{+\infty}e^{M_{ii}(\tau-s)}\left|z_{ii}(\varepsilon,s,\xi)-M_{ii}\right|\left\|y_i^1-y_i^2\right\|_{C(\mathbb{R})}ds. \quad (42)$$

Теперь заметим, что т.к.

$$Z(\varepsilon,s,\xi(s))\in \mathrm{co}\,\partial F(\varepsilon,s,[y^1(s)-y^2(s)]),$$

то

$$z_{ij}(\varepsilon,s,\xi(s))=\sum_{u=1}^{h(s)}\lambda_u a_{ij}^u(\varepsilon,s,\xi(s)),$$

где $a_{ij}^u(\varepsilon,s,\xi(s))\in\frac{\partial F_i(\varepsilon,s,[y^1(s)-y^2(s)])}{\partial y_j}$ и $\sum_{u=1}^{h(s)}\lambda_u=1$. Из определения m_{ii},M_{ii},M_{ij} (см. (12)) следует, что:

$$\left|z_{ij}(\varepsilon,s,\xi)\right|\le\left|M_{ij}\right|, \quad (43)$$

$$\left|z_{ii}(\varepsilon,s,\xi)-M_{ii}\right|\le M_{ii}-m_{ii}. \quad (44)$$

Поэтому

$$\left|w_i(\tau)\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{\left|M_{ij}\right|}{M_{ii}} \left\|y_j^1 - y_j^2\right\|_{C(\mathbb{R})} + \\ + \frac{M_{ii} - m_{ii}}{M_{ii}} \left\|y_i^1 - y_i^2\right\|_{C(\mathbb{R})}. \qquad (45)$$

2) Для $i = p+1,\ldots,n$ получим:

$$\left|w_i(\tau)\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \int_{-\infty}^{\tau} e^{m_{ii}(\tau-s)} \left|z_{ij}(\varepsilon,s,\xi)\right| \left\|y_j^1 - y_j^2\right\|_{C(\mathbb{R})} ds + \\ + \int_{-\infty}^{\tau} e^{m_{ii}(\tau-s)} \left|z_{ii}(\varepsilon,s,\xi) - m_{ii}\right| \left\|y_i^1 - y_i^2\right\|_{C(\mathbb{R})} ds. \qquad (46)$$

Из (12) следует оценка

$$\left|z_{ii}(\varepsilon,s,\xi) - m_{ii}\right| \le M_{ii} - m_{ii}. \qquad (47)$$

Тогда соотношение (46) можно переписать следующим образом:

$$\left|w_i(\tau)\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{\left|M_{ij}\right|}{-m_{ii}} \left\|y_j^1 - y_j^2\right\|_{C(\mathbb{R})} + \\ + \frac{M_{ii} - m_{ii}}{-m_{ii}} \left\|y_i^1 - y_i^2\right\|_{C(\mathbb{R})}. \qquad (48)$$

Из неравенств (29), (45) и (48) следует:

$$\left\|Hy^1 - Hy^2\right\|_{B,n} \le (I-Q)col \times \\ \times\left(\left\|y_1^1 - y_1^2\right\|_{C(\mathbb{R})}, \left\|y_2^1 - y_2^2\right\|_{C(\mathbb{R})}, \ldots, \left\|y_n^1 - y_n^2\right\|_{C(\mathbb{R})}\right). \qquad (49)$$

Обозначим

$$I - Q = V. \qquad (50)$$

Тогда $\left\|Hy^1 - Hy^2\right\|_{B,n} \le V\left\|y^1 - y^2\right\|_{B,n}$.

Заметим, что так как $M_{ii} > 0$ при $i = 1,\ldots,p$ и $m_{ii} < 0$ при $i = p+1,\ldots,n$, то все элементы матрицы V положительны. Так как $I - V = Q$, а матрица Q удовлетворяет условию Леммы 1, то все главные миноры матрицы $I - V$ положительны. Тогда из Теоремы 4 следует, что $\operatorname{spr} V < 1$. Следовательно, H — обобщенное сжимающее отображение. Применяя Теорему 3, получаем, что H имеет единственную неподвижную точку $y^\varepsilon \in B(\mathbb{R}^n)$, т.е. уравнение (25) имеет единственное решение при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

II. Теперь покажем, что $\left\|y^\varepsilon - y^*\right\|_{B,n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Выпишем общий вид решений (25)

$$y^\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\Gamma(\tau,s)[F(\varepsilon,s,y^\varepsilon(s))\Gamma y^\varepsilon(s)]ds = Hy^\varepsilon(\tau). \quad (51)$$

Так как y^* — стационарное решение усредненной задачи (26) и $F(0,y^*) = 0$, то y^* удовлетворяет следующему стационарному уравнению:

$$y^* = \int_{-\infty}^{\infty} G_\Gamma(\tau,s)\Gamma y^* ds. \qquad (52)$$

Рассмотрим разность решений (51) и (52):

$$y^\varepsilon(\tau) - y^* = col(y_1^\varepsilon(\tau) - y_1^*, \ldots, y_n^\varepsilon(\tau) - y_n^*) = \\ = Hy^\varepsilon(\tau) - Hy^* + \int_{-\infty}^{\infty} G_\Gamma(\tau,s)F(\varepsilon,s,y^*)ds. \qquad (53)$$

Рассмотрим вектор-столбец $col(|\, y_1^\varepsilon(\tau) - y_1^* \,|, \ldots, |\, y_n^\varepsilon(\tau) - y_n^* \,|)$ и выпишем для него покомпонентную оценку, учитывая соотношение (49) и общий вид функции Грина **Г1)**, **Г2)**:

$$col\left(\left|y_1^\varepsilon(\tau) - y_1^*\right|, \ldots, \left|y_n^\varepsilon(\tau) - y_n^*\right|\right) \le \\ \le Vcol\left(\left\|y_1^\varepsilon - y_1^*\right\|_{C(\mathbb{R})}, \ldots, \left\|y_n^\varepsilon - y_n^*\right\|_{C(\mathbb{R})}\right) + \\ + col\left(\left|\int_{\tau}^{+\infty} -e^{M_{11}(\tau-s)} F_1(\varepsilon,s,y^*)ds\right|, \ldots, \right. \\ \left|\int_{\tau}^{+\infty} -e^{M_{pp}(\tau-s)} F_p(\varepsilon,s,y^*)ds\right|, \\ \left|\int_{-\infty}^{\tau} e^{m_{p+1p+1}(\tau-s)} F_{p+1}(\varepsilon,s,y^*)ds\right|, \ldots, \\ \left.\left|\int_{-\infty}^{\tau} e^{m_{nn}(\tau-s)} F_n(\varepsilon,s,y^*)ds\right|\right). \qquad (54)$$

Оценим второе слагаемое в соотношении (54). Для удобства оценку i-ых компонент проведем отдельно для каждого случая: $1 \le i \le p$ и $p+1 \le i \le n$. Зафиксируем $\eta > 0$.

Так как $F_i(\varepsilon,s,y^*) = f_i\left(\dfrac{s}{\varepsilon}, y^*\right)$, а функции f_i почти периодичны, то существует константа $c > 0$ такая, что $\left|F_i(\varepsilon,s,y^*)\right| \le c$ при любых $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $i = 1,\ldots,n$.

Пусть $1 \le i \le p$. Тогда

$$\left|\int_{\tau}^{+\infty} -e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right| \le \\ \le \left|\int_{\tau}^{T_\tau} e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right| + \\ + \left|\int_{T_\tau}^{+\infty} e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right|, \qquad (55)$$

где значение $T_\tau > \tau$ выбрано из условия

$$e^{M_{ii}(\tau - T_\tau)} < \frac{M_{ii}}{2c}\eta. \tag{56}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (55):

$$\left|\int_{T_\tau}^{+\infty} e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right| \le \le c\int_{T_\tau}^{+\infty} e^{M_{ii}(\tau-s)}ds = \frac{c}{M_{ii}} e^{M_{ii}(\tau-T_\tau)} \le \frac{\eta}{2}. \tag{57}$$

Далее, оценим первое слагаемое правой части неравенства (55):

$$I := \left|\int_{\tau}^{T_\tau} e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right|. \tag{58}$$

Разобьем отрезок $[\tau, T_\tau]$ на N равных частей с шагом $\Delta = \dfrac{T_\tau - \tau}{N}$ и рассмотрим интеграл (58) на этом разбиении. Число N выбирается таким образом, чтобы $\left|1 - e^{-M_{ii}\Delta}\right| \le \dfrac{\eta}{4c(T_\tau - \tau)}$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \left|\sum_{p=0}^{N-1}\int_{s_p}^{s_{p+1}} e^{M_{ii}(\tau-s)} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right| \le \\ &\le \sum_{p=0}^{N-1} e^{M_{ii}(\tau-s_p)} \left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right| + \\ &+\sum_{p=0}^{N-1}\int_{s_p}^{s_{p+1}} e^{M_{ii}(\tau-s_p)}\left|1 - e^{M_{ii}(s_p - s)}\right|\left|F_i(\varepsilon, s, y^*)\right|ds. \end{aligned} \tag{59}$$

Заметим, что так как $\tau < s_p$, то

$$\sum_{p=0}^{N-1} e^{M_{ii}(\tau-s_p)} \left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right| \le \sum_{p=0}^{N-1}\left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right|.$$

Обозначим

$$I_2 = \sum_{p=0}^{N-1}\left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right|. \tag{60}$$

Тогда оценка (59) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} I &\le \sum_{p=0}^{N-1}\int_{s_p}^{s_{p+1}}\left(1 - e^{-M_{ii}\Delta}\right)c\,ds + I_2 \le \\ &\le cN\Delta\left(1 - e^{-M_{ii}\Delta}\right) + I_2 \le \\ &\le c(T_\tau - \tau)\frac{\eta}{4c(T_\tau - \tau)} + I_2 = \frac{\eta}{4} + I_2 \end{aligned} \tag{61}$$

В I_2 оценим отдельно каждое слагаемое суммы:

$$\begin{aligned} &\left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} F_i(\varepsilon, s, y^*)ds\right| = \left|\int_{s_p}^{s_{p+1}} f_i\left(\frac{s}{\varepsilon}, y^*\right)ds\right| = \\ &= \left|\varepsilon\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta\right| \le \\ &\le \varepsilon\left|\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta - \int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta\right| + \\ &+\left|\varepsilon\int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta\right|. \end{aligned} \tag{62}$$

Оценим первое слагаемое в выражении (62). Для этого заметим, что из почти периодичности функции $f_i(\theta, y^*)$ следует, что по заданному η_1 найдется такое $l = l(\eta_1)$, что в любом промежутке $[t_0, t_0 + l(\eta_1)]$ найдется хотя бы одно число t^*, при котором $\left|f_i(\theta, y^*) - f_i(\theta + t^*, y^*)\right| \le \eta_1$ при $\theta \in (-\infty, \infty)$. Положим $t_0 = \dfrac{s_p}{\varepsilon}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left|\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta - \int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta\right| \le \\ &\le \varepsilon\left|\int_{t^*}^{t^*+\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta - \int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta\right| + \\ &+\varepsilon\left|\int_{t^*+\frac{\Delta}{\varepsilon}}^{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}} f_i(\theta, y^*)d\theta + \int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{t^*} f_i(\theta, y^*)d\theta\right|. \end{aligned} \tag{63}$$

В первом интеграле из правой части неравенства (63) сделаем замену: $\omega = \theta - t^*$. Получим:

$$\varepsilon\left|\int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}}[f_i(\omega+t^*,y^*)-f_i(\omega,y^*)]d\omega\right|+$$
$$+\varepsilon\left|\int_{t^*+\frac{\Delta}{\varepsilon}}^{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}}f_i(\theta,y^*)d\theta+\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{t^*}f_i(\theta,y^*)d\theta\right|\le$$
$$\le\eta_1\Delta+\varepsilon\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}+\frac{\Delta}{\varepsilon}}^{t^*+\frac{\Delta}{\varepsilon}}\left|f_i(\theta,y^*)\right|d\theta+ \tag{64}$$
$$+\varepsilon\int_{\frac{s_p}{\varepsilon}}^{t^*}\left|f_i(\theta,y^*)\right|d\theta\le\eta_1\Delta+2\varepsilon cl(\eta_1).$$

Далее, оценим второе слагаемое в правой части выражения (62). Заметим, что Δ фиксировано, так как фиксировано N. В силу того, что y^* является стационарным решением уравнения (26), выполнено равенство $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_i(\theta,y^*)d\theta=0,$ следовательно, найдется такое $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\Delta)$, что при любых $\varepsilon<\varepsilon_0$ будет выполнено неравенство $\left|\frac{1}{\frac{\Delta}{\varepsilon}}\int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}}f_i(\theta,y^*)d\theta\right|<\eta_1$. Таким образом, при $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\left|\varepsilon\int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}}f_i(\theta,y^*)d\theta\right|=\left|\frac{\Delta}{\frac{\Delta}{\varepsilon}}\int_0^{\frac{\Delta}{\varepsilon}}f_i(\theta,y^*)d\theta\right|\le\Delta\eta_1. \tag{65}$$

Полагая $\eta_1=\frac{\eta}{16(T_\tau-\tau)}$, $\varepsilon_1=min\{\varepsilon_0,\frac{\eta}{16Ncl(\eta_1)}\}$, при $\varepsilon<\varepsilon_1$ и учитывая оценки (64) и (65), получим:

$$\left|\int_{s_p}^{s_{p+1}}F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right|\le2\eta_1\Delta+2\varepsilon cl(\eta_1)\le\frac{\Delta\eta}{8(T_\tau-\tau)}+\frac{\eta}{8N}. \tag{66}$$

Тогда I_2 оценивается следующим образом:

$$I_2=\sum_{p=0}^{N-1}\left|\int_{s_p}^{s_{p+1}}F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right|\le\sum_{p=0}^{N-1}\frac{\eta}{4N}=\frac{\eta}{4}. \tag{67}$$

В итоге, учитывая оценки (57), (61) и (67), получим:

$$\left|\int_\tau^{+\infty}e^{M_{ii}(\tau-s)}F_i(\varepsilon,s,y^*)ds\right|\le$$
$$\le\frac{\eta}{2}+\frac{\eta}{4}+\frac{\eta}{4}=\eta,\ (i=1,\ldots,p) \tag{68}$$

при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить такую же оценку для i-х компонент второго слагаемого в соотношении (54) при $i=p+1,\ldots,n$. Тогда неравенство (54) примет вид:

$$col\left(\left|y_1^\varepsilon(\tau)-y_1^*\right|,\ldots,\left|y_n^\varepsilon(\tau)-y_n^*\right|\right)\le$$
$$\le Vcol\left(\left\|y_1^\varepsilon-y_1^*\right\|_{C(\mathbb{R})},\ldots,\left\|y_n^\varepsilon-y_n^*\right\|_{C(\mathbb{R})}\right)+ \tag{69}$$
$$+col(\eta,\ldots\eta).$$

Из (69) следует $\left\|y^\varepsilon-y^*\right\|_{B,n}\le V\left\|y^\varepsilon-y^*\right\|_{B,n}+$ $+col(\eta,\ldots\eta)$. Таким образом,

$$(I-V)\left\|y^\varepsilon-y^*\right\|_{B,n}\le col(\eta,\ldots\eta). \tag{70}$$

Как показано в [7], так как $V\ge0,\operatorname{spr}V<1$, матрица $I-V$ имеет обратную, причем, согласно разложению $(I-V)^{-1}=I+V+\ldots+V^k+\ldots\ge0$ [14, с. 173], обратная матрица неотрицательна.

Умножив обе части неравенства (70) на неотрицательную матрицу $(I-V)^{-1}$, получим

$$\left\|y^\varepsilon-y^*\right\|_{B,n}\le(I-V)^{-1}col(\eta,\ldots\eta),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_1),$$

откуда следует

$$\left\|y^\varepsilon-y^*\right\|_{B,n}\to0\ \text{ при }\ \varepsilon\to0.$$

Последнее утверждение завершает доказательство теоремы.

Работа поддержана РФФИ гранты 09-01-92003-ННС_а, 10-01-93112-НЦНПЛ_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике / Н. Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945.

2. *Крылов Н. М.* Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — репринт. изд. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 352 с.

3. *Ахмеров Р. Р.* О методе усреднения для уравнений нейтрального типа: диссертация... канд. физ.-мат. наук / Р. Р. Ахмеров; науч. рук. П. Е. Соболевский; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж: Б.и., 1975. — 107 с. — На правах рукописи. — Автореферат. — 15 с.

4. *Бирюк Г. И.* Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем

нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром / Г. И. Бирюк // ДАН СССР. — 1954. — Т. 96. — №1. — С. 5—7

5. *Бурд В.Ш.* Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений / В. Ш. Бурд [и др.] // ДАН СССР. — 1969. — Т. 187. — №6. — С. 1219—1221.

6. *Burd V. Sh.* Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval: Theory and Applications. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics / V. Sh. Burd. — Chapman & Hall, 2007. — Vol. 255.

7. *Перов А. И.* Обобщённый принцип сжимающих отображений / А. И. Перов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. — 2005. — № 1. — С. 196—207.

8. *Красносельский М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 352 с.

9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

10. *Кларк. Ф.* Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк ; пер. с англ. Ю. С. Ледяева. — М. : Наука, 1988. — 280 с.

11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М. : Наука, 1969. — 368 с.

13. *Kamenskii M.* An averaging method for singulary perturbed system of semilinear differential inclusions with C_0-semigroups / M. Kamenskii, P. Nistri // Set-Valued Analysis. — 2003. — Vol. 11. — № 4. — pp. 345—357

14. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1978. — 280 с.

Гудович Анастасия Николаевна — кандидат ф.-м.н., доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет

Тел.: (4732)208771

E-mail: agudovich@gmail.com

Каменский Михаил Игоревич — д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет

Тел.: (4732)208771

E-mail: Mikhailkamenski@mail.ru

Хроликова Елена Владимировна — аспирантка, Воронежский государственный университет

Тел.: (4732)208771

E-mail: uralochka_87@mail.ru

Gudovich Anastasiya Nikolaevna — PhD, Assistant professor, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University

Tel. (4732)208771

E-mail: agudovich@gmail.com

Kamenskii Mikhail Igorevich — Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Chair of the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University

Tel.: (4732) 208771

E-mail: Mikhailkamenski@mail.ru

Khrolikova Elena Vladimirovna — Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University

Tel.: (4732)208771

E-mail: uralochka_87@mail.ru