УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

А. В. Глушко, Е. А. Логинова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.08.2010 г.

Аннотация. Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение температуры в неоднородном материале (FGM) с трещиной. Изучается двумерный случай. Неоднородность материала описывается функцией $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности направлен перпендикулярно трещине. Задача сведена к обобщенной задаче Коши, построены стационарные тепловые потенциалы и решение, изучены их свойства. Получены асимптотики решения по расстоянию до концов трещины.
Ключевые слова: Задача трансмиссии, стационарные тепловые потенциалы, неоднородная плоскость с разрезом (трещиной) по отрезку, асимптотики решения по расстоянию до концов трещины, постановка краевых условий.

Annotation. The problem considered describes the steady-state temperature distribution in heterogeneous material (FGM) with a crack. Two-dimensional case is studied. The heterogeneity of the material described by the function $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$ that corresponds to the situation of the vector direction of change of inhomogeneity is perpendicular to crack. The problem is reduced to the generalized Cauchy problem, stationary heat potentials and solutions are built, properties are investigated. Asymptotic solutions are obtained for the distance to the ends of the crack.
Key words: The problem of transmission, fixed thermal potentials, the non-homogeneous plane with a crack on the segment, the asymptotic solution for the distance to the ends of the crack, setting the boundary conditions.

Уравнения стационарного распределения тепла в экспоненциально неоднородной плоскости имеет вид *

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \quad (1)$$

Искомая функция $u(x_1, x_2)$ — это температура в точке материала с координатами (x_1, x_2). Областью, в которой рассматривается уравнение (1), является плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \{x \mid x_2 = \pm 0;\ x_1 \in [-1;1]\}$, описывающим трещину по отрезку $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Граничные условия заданы следующим образом

$$\begin{gathered} u(x_1, +0) - u(x_1, -0) = q_0(x_1); \\ \frac{\partial u(x_1, +0)}{\partial x_2} + \frac{k}{2}u(x_1, +0) - \frac{\partial u(x_1, -0)}{\partial x_2} - \\ -\frac{k}{2}u(x_1, -0) = q_1(x_1);\ x_1 \in [-1;1]. \end{gathered} \quad (2)$$

Первое из условий (2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а второе — разность между тепловыми потоками через эти берега. Таким образом, рассматриваемая задача в некотором смысле подобна задаче трансмиссии, несмотря на «вырожденный» характер границы.

Задача (1)—(2) будет сведена нами к обобщенной задаче Коши в пространстве $\mathbb{R}^2$, для чего введена специализированная дельта-функция, описывающая границу области. Из общей теории ясно, что вид функциональных коэффициентов при введенной дельта-функции и ее нормальной производной определяет характер краевых условий, которые следует ставить в данной задаче. Задание краевых условий должно полностью определять данные коэффициенты (так называемые «скачки»), при этом, естественно, количество условий должно быть минимально возможным. Примененный подход позволил доказать корректность поставленной таким образом задачи, изучить ее разрешимость, выделить класс единственности решения, показать, в каком смысле и при каких ограничениях выполнены краевые условия. Основным результатом работы является построение асимптотических представлений температурного поля и теплового потока вблизи концов трещины.

Приведём историческую справку. Последнее время композиционные материалы находят широкое применение в инженерии, благодаря чему анализ трещин на границе становится одной из передовых отраслей механики разрушений. Так в 1985 году Erdogan решает задачу разрушения третьего рода для связных неоднородных материалов. В 1991 году он проводит анализ границы между FGM и однородной полуплоскостью с разрезом, ортогональным границе. В дальнейшем Chen и Erdogan [1] рассмотрели задачу о трещине на границе неоднородного слоя, связанного с однородной основой. Choi [2,3] изучал, как влияет механическая и тепловая нагрузка на коллинеарные трещины многослойной полуплоскости со ступенчатой границей. Guo [4, 5] исследовал задачу о стационарной и кратковременной нагрузке в функционально-градуированной системе покрытие-основа с внутренним или граничным разрезом, ортогональным границе. Erdogan [6] изучал сингулярный характер поля напряжений на конце трещины в связных неоднородных полуплоскостях, имеющих модуль сдвига с непрерывной производной. Hu [7] исследовал сингулярный характер напряжения и электрического поля смещения на конце трещины в двух связных функционально-градиентных пьезоэлектрических полупространствах. Zhou [8] изучал поведение трещины на границе двух полуплоскостей ортотропных функционально-градуированных материалов. Он также исследовал поведение трещины между двумя полуплоскостями функционально-градуированных материалов под случайным воздействием растяжения. Ou [9, 10] рассматривал задачу разрушения третьего рода в двух связных функционально-градуированных пьезоэлектрических полуплоскостях с трещиной, ортогональной границе. Затем Yong и Zhou [11] изучили задачу разрушения третьего рода в функционально-градуированной системе покрытие-основа с внутренней трещиной, перпендикулярной границе и показали влияние неоднородной константы.

Новая идея в изучении слабой непрерывности на границе bi-FGM была привнесена Li. Li и Lee рассматривали задачу о трещине, ортогональной границе в структуре двух bi-FGM, механические свойства которых представляются экспоненциальной и линейной функциями соответственно. Также они рассмотрели задачу об анти-плоском воздействии разрушения на слабо непрерывную границу в симметричной функционально-градуированной комбинированной полосе.

Рассмотренная нами в работе задача основана на модели, изложенной в работе Li и Lee [13]. При этом мы считаем, что математически верно обосновали иную постановку краевых условий.

Перейдем к изложению основных результатов работы.

С помощью замены переменных $U = e^{-\frac{k}{2}x_2} V(x_1, x_2)$ уравнение (1) сводится к следующему

$$\Delta V(x_1, x_2) - \frac{k^2}{4} V = 0, \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus l. \qquad (5)$$

Граничные условия (2) принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial V(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \\ V(x_1, +0) - V(x_1, -0) = q_0(x_1), \; x_1 \in [-1;1]. \end{gathered} \qquad (6)$$

Обозначим $K_n(x)$ — функция Макдональда n-ого порядка (см. [14]), где $n = 0,1$.

Утверждение1. Фундаментальным решением оператора $\Delta - \left(\frac{k}{2}\right)^2$ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E_2\ (|x|) = -\frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{k}{2}|x|\right)$, где K_0 — функция Макдональда (см. [13]).

Введем в рассмотрение специализированную дельта-функцию $\delta_{[-1,1]} \in D'(\mathbb{R}^2)$, так что для функции $\nu(x_1 x_2)$, которая непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus l$, а на отрезке $x \in l$ может иметь разрыв первого рода, причем $\lim\limits_{x_2 \to +0} \nu(x_1, x_2) = \nu_+(x_1)$, $x_1 \in [-1;1]$; $\lim\limits_{x_2 \to -0} \nu(x_1, x_2) = \nu_-(x_1)$, $x_1 \in [-1;1]$. и любой основной функции $\varphi(x_1, x_2) \in D(\mathbb{R}^2)$ справедливо равенство

$$\begin{gathered} (\nu\delta_{[-1,1]}, \varphi(x_1, x_2) = \\ = \int_{-1}^{1} (\nu_+(x_1) - \nu_-(x_1))\delta(x_2)\varphi(x_1, x_2)dx_1. \end{gathered}$$

Рассмотрим область $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_\varepsilon$, где $\Pi_\varepsilon = \{x \mid x_1 \in [-1;1], x_2 \in [-\varepsilon;\varepsilon]\}$ — прямоугольник высоты 2ε. Пусть $V_\varepsilon(x)$ – классическое решение уравнения (1) в $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_\varepsilon$, продолженное нулем Π_ε. Стандартным интегрированием по частям может быть записана обобщенная задача Коши для оператора $\Delta - \left(\frac{k}{2}\right)^2$. Затем с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to +0$ (в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$) задача (1)—(2) может быть сведена к обобщённой задаче Коши

$$\Delta V - \frac{k^2}{4} V = q_0(x_1) \cdot \delta_{S[-1,1]} + q_1(x_1) \cdot \frac{\partial \delta_{S_{[-1,1]}}}{\partial x_2}. \quad (7)$$

Затем строится её решение в виде свертки фундаментального решения со слагаемыми правой части. В результате имеем следующее

Утверждение 2. Решение обобщенной задачи Коши (7) можно выписать в виде

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1, x_2) + V_0(x_1, x_2),$$

где, следуя классической терминологии будем говорить, что $V_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) \cdot q_1(x_1)\delta_{[-1,1]}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя; $V_0(x_1, x_2) = = E(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial q_0(x_1)\delta_{[-1,1]}}{\partial x_2}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя; $E(x_1, x_2)$ — фундаментальное решение уравнения $L(E) = \delta(x_1, x_2)$.

В следующих двух утверждениях сформулированы свойства стационарных тепловых потенциалов.

Утверждение 3. Пусть $q_1(\sigma_1) \in C^2[-1,1]$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя представим в виде

$$V_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) q_1(\sigma_1) d\sigma_1$$

и при $x_1 \in [-1;1]$ выполнены условия

$$\frac{\partial V_1(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_1(x_1, -0)}{\partial x_2} = q_1(x_1);$$

$$V_1(x_1, +0) - V_1(x_1, -0) = 0.$$

Если же дополнительно потребовать, что $q_1(\pm 1) = 0$, то условия выполняются в точках $x_1 = \pm 1$ по непрерывности. Кроме того

$$V_1(x_1, x_2) \in C^\infty\Big(\big((-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big)\big((-\infty, -0) \cup (+0, +\infty)\big)\Big).$$

Утверждение 4. Пусть $q_0(\sigma_1) \in C^2[-1,1]$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя представим в виде

$$V_0(x_1, x_2) = \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^{1} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \times$$
$$\times \frac{x_2 q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - \sigma_1)^2}} d\sigma_1$$

и при $x_1 \in [-1;1]$ выполнены условия

$$V_0(x_1, +0) - V_0(x_1, -0) = q_0(x_1);$$

$$\frac{\partial V_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_0(x_1, -0)}{\partial x_2} = 0.$$

Если же дополнительно потребовать, что $q_0(\pm 1) = 0$,то условие $\frac{\partial v_0(x_1; +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_0(x_1; -0)}{\partial x_2} = 0$ выполняется в точках $x_1 = \pm 1$ в смысле главного значения. При более строгом требовании $q_0'(\pm 1) = 0$ условия выполняются в точках $x_1 = \pm 1$ по непрерывности. Кроме того

$$V_0(x_1, x_2) \in C^\infty\Big(\big((-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\big) \times$$
$$\times \big((-\infty, -0) \cup (+0, +\infty)\big)\Big).$$

Условие $\frac{\partial V_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_0(x_1, -0)}{\partial x_2} = 0$ выполняется в смысле главного значения.

При дополнительном предположении $q_0'(\pm 1) = 0$ условие $\frac{\partial V_0(x_1, +0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_0(x_1, -0)}{\partial x_2} = 0$ выполняется по непрерывности.

Доказательства утверждений 3 и 4 вытекают из явных представлений поверхностных стационарных тепловых потенциалов, известных свойств функций Макдональда, в частности их явных интегральных представлений и асимптотических разложений (см. [14])

$$K_0(x) = \ln\frac{2}{x} + O(1), \; K_1(x) = \frac{1}{x} + O(x) \qquad (8)$$

в окрестности их единственной точки сингулярности $x = 0$. Доказательства основаны на оценках интегральных представлений потенциалов.

Следующее утверждение позволяет на основе утверждений 3 и 4 сформулировать свойства гладкости решения исходной задачи (1)—(2).

Утверждение 5. В условиях утверждений 3 и 4 решение исходной задачи единственно в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и имеет вид

$$U = e^{-\frac{k}{2}x_2}\left[-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \times\right.$$
$$\times q_1(\sigma_1) d\sigma_1 + \frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{1} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1 - \sigma_1)^2 + x_2^2}\right) \times \quad (9)$$
$$\left.\times \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + (x_1 - \sigma_1)^2}} q_0(\sigma_1) d\sigma_1\right],$$

причем функция U бесконечно дифференцируема по x_2 и x_1 при всех $x_2 \neq 0$, $x_1 \notin [-1,1]$.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия $q_0(\pm 1) = 0; q_1(\pm 1) = 0; q_0'(\pm 1) = 0; q_1'(\pm 1) = 0$, тогда решение задачи (1)—(2) $U(x_1, x_2)$, описывающее стационарное распределение температуры в плоскости с трещиной и нормальный тепловой поток $\partial U / \partial x_2$ есть непрерывные ограниченные функции аргументов $x_1, x_2 \notin l$. Если выполнено условие $q_0(\pm 1) = 0; q_1(\pm 1) = 0$, то решение задачи (1)—(2) U, есть непрерывная ограниченная функция аргументов $x_1, x_2 \notin l$, а нормальный тепловой поток $\partial U / \partial x_2$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln((x_1-1)^2 + x_2^2)q_0'(1) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\ln((x_1+1)^2 + x_2^2)q_0'(-1)\right] + R(x_1; x_2).$$

Функция $R_1(x_1, x_2)$ равномерно ограничена при $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Y. F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate /Y. F. Chen, F. Erdogan. — J. Mech. Phys. Solids44, 1996. — P. 771—787.

2. *Choi H. J.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone / H. J. Choi, T. E. Lee Jin. — part A: mechanical response. Int. J. Fract. 94(2), 1998. P. 103—122.

3. *Choi H. J.* Collinear cracks in a layered half-plane with a graded nonhomogeneous interfacial zone / H. J. Choi, T. E. Jin, K. Y. Lee. — part B: thermal shock response. Int. J. Fract. 94(2), 1998. — P. 123—135.

4. *Guo L. C.* Fracture analysis of a functionally graded coating-substrate structurewith a crack perpendicular to the interface / L. C. Guo, L. Z. Wu, T. Zeng. — Part I: static problem. Int. J. Fract. 127(1), 2004. — P. 21—38.

5. *Guo L. C.* Fracture analysis of a functionally graded coating-substrate structurewith acrack perpendicular to the interface / L. C. Guo, L. Z. Wu, T. Zeng. —Part II: transient problem. Int. J. Fract. 127(1), 2004. — P. 39—59.

6. *Erdogan F.* The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading / F. Erdogan. — J. Appl. Mech. 52, 1985. P. 823—828.

7. *Hu K. Q.* Anti-plane shear crack in a functionally gradient piezoelectric material / K. Q. Hu, Z. B. Zhong. Jin — Acta Mech. Solida Sin. 15(2), 2002. P. 140—148.

8. *Zhou Z. G.* Investigation of the Behavior of an Interface Crack between TwoHalf-Planes ofOrthotropic Functionally Graded Materials by Using a New Method / Z. G. Zhou, B. Wang, L. J. Yang. — JSME Int. J. Ser. C, Mech. Syst. Mach. Elem. Manuf. 47(3), 2004. — P. 467—478.

9. *Ou Y. L.* Mode III crack problems for two bonded functionally graded piezoelectric materials / Y. L. Ou, C. H. Chue-Int. J. Solids Struct. 42, 2005. — P. 3321—3337.

10. *Ou Y. L.* Two mode internal cracks located within two bonded functionally graded piezoelectric half planes respectively / Y. L. Ou, C. H. Two. — Arch. Appl. Mech. 75(6/7), 2006. — P. 364—378.

11. *Yong H. D.* Analysis of a mode III crack problem in a functionally graded coating-substrate system with finite Thickness / H. D. Yong, Y. H. Zhou. — Int. J. Fract. 141, 2006. — P. 459—467 c.

12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — 4-е изд. перераб. и доп. — М. : Наука, 1981. — 512с.

13. *Li Y.-D.* An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro-discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities / Yong-Dong Li, Kang Yong Lee — Int. J. Fract. 146, 2007. — P. 203—211.

14. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1949. — 875 с.

Глушко Андрей Владимирович — д.ф.-м.н., Воронежский государственный университет.

Тел.: +7(4732) 208618.

E-mail: kuchp2@math.vsu.ru

Логинова Екатерина Александровна — аспирант, Воронежский государственный университет.

Тел.: +7(4732) 208618

E-mail: vangog2007@list.ru

Glushko, Andrei V. — Dr., Head of the Department of partial differential equations and theory of probabilities, Voronezh State University.

Tel.: +7 (4732) 208618

E-mail: kuchp2@math.vsu.ru

Loginova Ekaterina A. — graduate student of Department partial differential equations and theory of probabilities,Voronezh State University.

Tel.: +7 (4732) 208618

E-mail: vangog2007@list.ru