УДК: 517.9

ОЦЕНКИ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

А. А. Воробьев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.03.2010 г.

Аннотация. Получены оценки ограниченных решений линейных разностных уравнений через оценку резольвенты на единичной окружности.
Ключевые слова: Линейные разностные уравнения, оценки решений, линейный оператор, функция Грина.

Annotation. The estimations of bounded solutions of difference equations using the estimation of the resolvent on unit circumference were got.
Keywords: Linear difference equations, estimations of solutions, linear operator, Green's function.

Пусть X — комплексное банахово пространство и $EndX$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Символом $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1,\infty]$ обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей элементов из X, суммируемых со степенью p для $p \in [1,\infty)$ с нормой

$$\|x\|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p)^{1/p},\ 1 \le p < +\infty,$$

и ограниченных для $p = \infty$, с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|.$$

Рассмотрим линейные разностные уравнения вида

$$x(n) - Ax(n-1) = y(n), n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где x — некоторая неизвестная последовательность из ℓ_p, $p \in [1,\infty]$, y — заданная последовательность из ℓ_p, а $A \in EndX$ — линейный оператор, для которого верно следующее условие

$$\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \tag{2}$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Здесь стоит отметить, что из условия (2), следует, что множество $\sigma(A)$ представимо в виде $\sigma(A) = \sigma_{int} \cup \sigma_{out}$, где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| > 1\}$, поэтому пространство X можно записать в следующем виде

$$X = X_{int} \oplus X_{out},$$

где $X_{int} = ImP_{int}$ — образ проектора Рисса, построенного по спектральной компоненте σ_{int} и $X_{out} = ImP_{out}$, где $P_{out} = I - P_{int}$. Подпространства X_{int} и X_{out} инвариантны относительно оператора A. Поэтому он представим в виде $A = A_{int} \oplus A_{out}$, где A_{int} и A_{out} — сужения оператора A на X_{int} и X_{out} соответственно, причем $\sigma(A_{int}) = \sigma_{int}$ и $\sigma(A_{out}) = \sigma_{out}$. Следовательно, $r(A_{\text{int}}) < 1$. Оператор A_{out} обратим и $r(A_{out}^{-1}) < 1$.

Для того, чтобы разностный оператор $(Dx)(n) = x(n) - Ax(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}, x \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, X)$ был обратим необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2). Тогда обратный оператор имеет вид

$$\begin{gathered}(D^{-1}y)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(n-k)y(k),\\ n \in \mathbb{Z}, y \in \ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}, X).\end{gathered} \tag{3}$$

Функция $G : \mathbb{Z} \to EndX$ (назовем ее функцией Грина), определяется равенствами

$$G(n) = \begin{cases} A^n P_{int},\ n \ge 0,\\ -A_{out}^{-n} P_{out},\ n < 0.\end{cases}$$

Отметим, что существуют постоянные $M \ge 1$, $\xi \in (0,1)$ такие, что

$$\|G(n)\| \le Me^{-\xi|n|},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Перечисленные результаты представлены в статье [1].

Замечание 1. *Положим* $r_{int} = 0$, *если* $\sigma_{int} = \varnothing$ *и* $r_{\text{int}} = r(A_{\text{int}}) = \max_{\lambda\in\sigma_{\text{int}}} |\lambda|$, *если* $\sigma_{int} \ne \varnothing$. *Положим* $r_{out} = \infty$, *если* $\sigma_{out} = \varnothing$ *и* $r_{out} = \min_{\lambda\in\sigma_{out}} |\lambda|$, *если* $\sigma_{out} \ne \varnothing$.

Следующая лемма следует из [2, Теорема 5.9.3] о разложении псевдорезольвенты.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00276)

Лемма 1. *Имеет место следующее представление*

$$G(n) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}(\rho)} \gamma^n R(\gamma, A)d\gamma, n \in \mathbb{Z}, \qquad (5)$$

где $R(\gamma, A) = (A - \gamma I)^{-1}$ *— резольвента оператора* A, I *— тождественный оператор, и* $\mathbb{T}(\rho) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \rho\}$ *— окружность радиуса* ρ, *где* ρ *удовлетворяет условию* $r_{int} < \rho < r_{out}$. *Отметим, что* r_{int} *и* r_{out} *были введены в замечании (1).*

Для последующих оценок нам потребуется величина

$$\gamma(A) = \sup_{\gamma\in\mathbb{T}}\left\|R(\gamma, A)\right\|. \qquad (6)$$

Замечание 2. *Поскольку выполнено неравенство*

$$\gamma(A) = \sup_{\gamma\in\mathbb{T}}\left\|R(\gamma, A)\right\| \geq \sup_{\gamma\in\mathbb{T}} r(R(\gamma, A)) =$$
$$= \sup_{\gamma\in\mathbb{T}, \lambda\in\sigma(A)} \frac{1}{|\gamma - \lambda|} = \frac{1}{dist(\mathbb{T}, \sigma(A))},$$

то в случае, если $\sigma_{int} \neq \varnothing$, $\sigma_{out} = \varnothing$, *будет верно неравенство* $\gamma(A) \geq \dfrac{1}{1 - r_{int}} > 1$, *а в случае* $\sigma_{int} = \varnothing$, $\sigma_{out} \neq \varnothing$, *верно неравенство* $\gamma(A) \geq \dfrac{1}{r_{out} - 1}$.

Справедлива

Теорема. *Пусть для оператора* A *выполнено условие (2). Тогда для любой последовательности* $y \in \ell_p$ *разностное уравнение (1) имеет единственное решение* $x \in \ell_p$, *определяющееся формулой (3) и это решение допускает оценку вида*

$$\left\|x\right\|_p \leq \begin{cases} S_{int}\left\|y\right\|_p, \ \sigma_{int} \neq \varnothing, \sigma_{out} = \varnothing, \\ S_{out}\left\|y\right\|_p, \ \sigma_{int} = \varnothing, \sigma_{out} \neq \varnothing, \\ (S_{int} + S_{out})\left\|y\right\|_p, \ \sigma_{int} \neq \varnothing, \sigma_{out} \neq \varnothing, \end{cases} \qquad (7)$$

где $p \in [1; \infty]$, *а* S_{int} *и* S_{out} *определяются равенствами*

$$S_{int} = \frac{\gamma(A)\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(A)}}}{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(A)}}\right) - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(A)}}\right)^2 \gamma(A)}, \qquad (8)$$

$$S_{out} = \frac{\gamma(A)\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma(A)}}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma(A)}} - 1\right) - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma(A)}} - 1\right)^2 \gamma(A)}. \qquad (9)$$

Доказательство. Положим $n - k = m$ в формуле (3). Тогда (3) представимо в виде

$$(D^{-1}y)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G(m)y(n - m), n \in \mathbb{Z}. \qquad (10)$$

При фиксированном $m \in \mathbb{Z}$ слагаемое, стоящее в правой части равенства (10), представляет собой последовательность $y_m(n) = G(m)y(n - m)$, $n \in \mathbb{Z}$. Принимая во внимания введенные обозначения, перепишем (10) в следующем виде

$$(D^{-1}y)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m(n), n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m$ сходится в ℓ_p, $p \in [1; \infty]$, если он сходится абсолютно. Для $p = \infty$ доказательство сходимости является тривиальным. Покажем, что ряд абсолютно сходится в ℓ_p, $p \in [1; \infty)$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|y_m\right\| = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|G(m)y(n - m)\right\|^p\Big)^{1/p} \leq$$
$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|G(m)\right\|\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\|y(n - m)\right\|^p\Big)^{1/p} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|G(m)\right\|\left\|y\right\|_p.$$

Воспользовавшись оценкой (4), получим

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|y_m\right\| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|Me^{-\xi|m|}\right\|\left\|y\right\|_p =$$
$$= 2M\sum_{m=0}^{\infty}\left\|e^{-\xi m}\right\|\left\|y\right\|_p = 2M\frac{1}{1 - e^{-\xi}}\left\|y\right\|_p.$$

Значит, ряд $\sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m$ сходится абсолютно в банаховом пространстве ℓ_p, $p \in [1; \infty)$, следовательно, он сходится. При этом верно неравенство

$$\left\|D^{-1}y\right\|_p \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left\|G(m)\right\|\left\|y\right\|_p.$$

Следовательно, имеет место оценка в любом из пространств ℓ_p, $p \in [1; \infty]$

$$\left\|D^{-1}\right\| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|G(k)\right\|, \qquad (11)$$

и эта оценка не зависит от пространства ℓ_p, $p \in [1; \infty]$.

Пусть $\sigma_{int} \neq \varnothing$ и $\sigma_{out} = \varnothing$. Тогда $\sum_{n=-\infty}^{-1}\left\|G(n)\right\| = 0$ и $\left\|D^{-1}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|G(n)\right\|$. Норма функции Грина в (5) допускает оценку вида $\left\|G(n)\right\| \leq \rho^{n+1}\max_{\gamma\in\mathbb{T}}\left\|R(\gamma\rho, A)\right\|$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\rho \in (r_{int}; 1)$. Обозначим

$$S_{int}(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty}\rho^{n+1}\max_{\gamma\in\mathbb{T}}\left\|R(\gamma\rho, A)\right\|, \qquad (12)$$

где $\rho \in (r_{int};1)$. Очевидно $\sum_{n=0}^{\infty}\|G(n)\| \le S_{int}(\rho)$. Представим оператор $A-\gamma\rho I$, где $\gamma \in \mathbb{T}$, $\rho \in (r_{int},1)$ в следующем виде

$$A-\gamma\rho I = (A-\gamma I+\gamma I-\gamma\rho I) = \\ = (A-\gamma I)(I-(-1)\gamma(1-\rho)R(\gamma,A)).$$

Поскольку оператор $C=(-1)\gamma(1-\rho)R(\gamma,A)$ удовлетворяет оценке $\|C\| \le (1-\rho)\gamma(A)$, $\forall\gamma\in\mathbb{T}$, то $\|C\|<1$ для $\rho \in (1-\frac{1}{\gamma(A)},1)$. Из замечания 2 следует, что $r_{int} \le 1-\frac{1}{\gamma(A)}$ и $\gamma(A)\ge 1$. Тогда оператор $A-\gamma\rho I$ будет обратим и норму резольвенты оператора A внутри единичной окружности $\mathbb{T}$ можно оценить следующим образом

$$\|R(\gamma\rho,A)\| = \|(A-\gamma\rho I)^{-1}\| = \\ = \|(A-\gamma I)^{-1}(I-(-1)\gamma(1-\rho)R(\gamma,A))^{-1}\| \le \\ \le \gamma(A)\sum_{k=0}^{\infty}(1-\rho)^k\gamma^k(A) = \frac{\gamma(A)}{1-(1-\rho)\gamma(A)}.$$

Подставив полученную оценку в формулу (12), получим

$$\|D^{-1}\| \le \inf_{\rho\in(1-\frac{1}{\gamma(A)},1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma(A)\rho}{1-(1-\rho)\gamma(A)}\rho^n = \\ = \inf_{\rho\in(1-\frac{1}{\gamma(A)},1)}\frac{\gamma(A)\rho}{(1-\rho)-(1-\rho)^2\gamma(A)} = S_{int}.$$

Легко подсчитать, что точная нижняя грань достигается в точке $\rho_{min} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma(A)}}$. Следовательно, для S_{int} справедлива формула (8)

Пусть теперь $\sigma_{out} \ne \varnothing$ и $\sigma_{int} = \varnothing$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}\|G(n)\| = 0$ и $\|D^{-1}\| \le \sum_{n=-\infty}^{-1}\|G(n)\|$. Норма функция Грина в (5) допускает оценку вида $\|G(n)\| \le \rho^{n+1}\max_{\gamma\in\mathbb{T}}\|R(\gamma\rho,A)\|$, где $n\in\mathbb{Z}$ и $\rho\in(1;r_{out})$. Обозначим

$$S_{out}(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{-1}\rho^{n+1}\max_{\gamma\in\mathbb{T}}\|R(\gamma\rho,A)\|, \tag{13}$$

где $\rho\in(1;r_{out})$. Представим оператор $A-\gamma\rho I$, где $\gamma\in\mathbb{T}$, $\rho\in(1,r_{out})$ в следующем виде

$$A-\gamma\rho I = (A-\gamma I-(\gamma\rho I-\gamma I)) = \\ (A-\gamma I)(I-\gamma(\rho-1)R(\gamma,A)).$$

Поскольку оператор $C=\gamma(\rho-1)R(\gamma,A)$ удовлетворяет оценке $\|C\| \le (\rho-1)\gamma(A)$, $\forall\gamma\in\mathbb{T}$, то $\|C\|<1$ для $\rho\in(1;1+\frac{1}{\gamma(A)})$. Из замечания 2 следует, что $1+\frac{1}{\gamma(A)} \le r_{out}$. Тогда оператор $A-\gamma\rho I$ будет обратим и норму резольвенты оператора A вне единичной окружности $\mathbb{T}$ можно оценить следующим образом

$$\|R(\gamma\rho,A)\| = \\ = \|(A-\gamma I)^{-1}(I-\gamma(\rho-1)R(\gamma,A))^{-1}\| \le \\ \le \gamma(A)\sum_{k=0}^{\infty}(\rho-1)^k\gamma^k(A) = \frac{\gamma(A)}{1-(\rho-1)\gamma(A)}.$$

Подставив полученную оценку в формулу (13), получим

$$\|D^{-1}\| \le \inf_{\rho\in(1;1+\frac{1}{\gamma(A)})}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma(A)\rho}{1-(\rho-1)\gamma(A)}\frac{1}{\rho^n} = \\ = \inf_{\rho\in(1;1+\frac{1}{\gamma(A)})}\frac{\gamma(A)\rho}{(\rho-1)-(\rho-1)^2\gamma(A)} = S_{out}.$$

Точная нижняя грань в данном случае достигается в точке $\rho_{min} = \sqrt{1+\frac{1}{\gamma(A)}}$. Следовательно, для S_{out} справедлива формула (9).

В общем случае, если $\sigma_{int} \ne \varnothing$, $\sigma_{out} \ne \varnothing$, то из оценок (8), (9) и (11) следует неравенство

$$\|D^{-1}\| \le S_{int} + S_{out}. \tag{14}$$

Рассмотрев три возможных случая, приходим к окончательной оценке

$$\|D^{-1}\| \le \begin{cases} S_{int}, & \sigma_{int}\ne\varnothing, \sigma_{out}=\varnothing, \\ S_{out}, & \sigma_{int}=\varnothing, \sigma_{out}\ne\varnothing, \\ S_{int}+S_{out}, & \sigma_{int}\ne\varnothing, \sigma_{out}\ne\varnothing, \end{cases}$$

Тогда решение $x\in\ell_p=\ell_p(\mathbb{Z},X)$ уравнения (1) допускает оценку вида (7). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены все условия теоремы. Тогда решение $x\in\ell_p$ допускает оценку вида*

$$\|x\|_p \le \begin{cases} (4\gamma^2(A)-2\gamma(A))\|y\|_p, & \sigma_{int}\ne\varnothing, \sigma_{out}=\varnothing, \\ (4\gamma^2(A)+2\gamma(A))\|y\|_p, & \sigma_{int}=\varnothing, \sigma_{out}\ne\varnothing, \\ 8\gamma^2(A)\|y\|_p, & \sigma_{int}\ne\varnothing, \sigma_{out}\ne\varnothing, \end{cases} \tag{15}$$

где $p\in[1;\infty]$.

Доказательство. Применив разложение величины $\rho_{min} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma(A)}}$ по Формуле Тейлора до второго порядка, положим $\rho^*_{int} = 1 - \dfrac{1}{2\gamma(A)}$. Получим оценку

$$S_{int} \le 4\gamma^2(A) - 2\gamma(A).$$

Для S_{out} положим вместо $\rho_{min} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\gamma(A)}}$ значение $\rho^*_{out} = 1 + \dfrac{1}{2\gamma(A)}$, получим оценку

$$S_{out} \le 4\gamma^2(A) + 2\gamma(A).$$

Оба значения ρ^*_{int} и ρ^*_{out} удовлетворяют ограничениям, используемым в доказательстве теоремы. следовательно, имеет место оценка (15). Следствие доказано.

Отметим, что оценка величины (6) для случая, когда A — оператор в конечномерном пространстве X, получена в монографии [3]. В бесконечномерном пространстве оценка легко может быть подсчитана для некоторых классов операторов.

Пример. Пусть $X = C[a,b]$ — пространство непрерывных комплексных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, и A — оператор Вольтерра, действующий в $C[a,b]$ по правилу

$$(Ax)(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds,$$

где $x \in C[a,b]$, функция $K : \Delta \to \mathbb{C}$, где $\Delta = \{(t,s) : a \le s \le t \le b\}$, — непрерывная функция, следовательно, верно неравенство $|K(t,s)| \le M$, $\forall (t,s) \in \Delta$. Резольвента $(A - \gamma I)^{-1}$, где $\gamma \in \mathbb{T}$ представима в виде

$$(A - \gamma I)^{-1} = -\gamma(I - \gamma^{-1}A)^{-1} = -\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^{-n}A^n. \quad (16)$$

Для нормы $\|Ax\|$ верно неравенство

$$\|Ax\| \le \max_{t\in[a;b]}\int_a^t |K(t,s)|\,ds\|x\| \le M(b-a)\|x\|.$$

Легко показать, что для произвольного $n \ge 0$ будет справедлива оценка

$$\|A^n x\| \le \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\|x\|.$$

Принимая во внимание, что $\gamma \in \mathbb{T}$, следовательно, (16) допускает оценку

$$\|(A - \gamma I)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n(b-a)^n}{n!} = e^{M(b-a)}.$$

Тогда $\gamma(A) \le e^{M(b-a)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов // Сибирский матем. журнал 2001. Т. 42. №. 6. С. 1231—1242.

2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962.

3. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры / С. К. Годунов. — Новосибирск: Научн. кн., 1997.

Воробьев Антон Алексеевич. Воронежский государственный университет, аспирант.
Тел.: 8-915-588-88-81
E-mail: antonvsu@gmail.com

Vorobiev Anton Alexeevich. Voronezh State University, postgraduate student.
Tel. 8-915-588-88-81.
E-mail: antonvsu@gmail.com