УДК 519.216.2; 514.764.3

ОБ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В КЛАССИЧЕСКОМ КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ НА ЯЗЫКЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Н. В. Винокурова, Ю. Е. Гликлих

Курский государственный университет
Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.08.2010 г.

Аннотация. Вводится и исследуется уравнение типа Ньютона—Нельсона на векторном расслоении над пространством Минковского, которое интерпретируется как описание движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики.
Ключевые слова: Стохастическая механика Нельсона, калибровочное поле, квантовая частица, пространство Минковского.

Abstract. An equation of Newton—Nelson type on the vector bundle over Minkowski space is introduced and investigated. The equation is interpreted as the one describing the motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics.
Key words: Nelson's stochastic mechanics, gauge field, quantum particle, Minkowski space

Стохастическая механика Нельсона — это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона—Нельсона. *

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [2, 6] (см. также [3]). На основе этого, в настоящей статье мы разрабатываем описание движения квантовой частицы в калибровочном поле в терминах стохастической механики на пространстве Минковского. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой. Обобщение этой конструкции на пространства-времена ОТО и использование групп $SU(2)$ и $SU(3)$ мы оставляем для последующих публикаций.

Исследование частично поддержано грантом РФФИ № 08-01-00155.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Мы отсылаем читателя, например, к [1, 3], где описаны основные понятия геометрии многообразий в нужной нам форме, а также другие объекты, используемые в настоящей статье. Для удобства изложения мы, тем не менее, напомним, что для любого расслоения $E \to M$ над многообразием M в каждом касательном пространстве $T_{(m,x)}E$ к пространству расслоения имеется выделенное подпространство $\mathrm{V}_{(m,x)}$, называемое вертикальным, которое состоит из векторов, касательных к слою E_m. В случае главного или векторного расслоения связностью H на E мы называем набор подпространств в касательных пространствах такой, что $T_{(m,x)}E = \mathrm{H}_{(m,x)} \oplus \mathrm{V}_{(m,x)}$ в каждом $(m,x) \in E$ и набор обладает некоторыми свойствами гладкости и инвариантности.

Обозначим через M произвольное лоренцево многообразие с метрикой $g(\cdot,\cdot)$ и главное расслоение $\Pi : \mathcal{E} \to M$ со структурной группой G над $\mathcal{M}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и пусть на $\mathcal{E}$ задана связность H с формой связности $\boldsymbol{\theta}$ и формой кривизны $\boldsymbol{\Phi} = D\boldsymbol{\theta}$, где D — ковариантный дифференциал (см., например, [1]). Напомним (см., например, [1, 3]), что формы связности и кривизны удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\boldsymbol{\Phi} = 0,\ D * \boldsymbol{\Phi} = *J, \tag{1}$$

(первое из них — классическое тождество Бьянки), где J — заданная 1-форма на $\mathcal{E}$ со значениями в $\mathfrak{g}$. В физической литературе связность, удовлетворяющая (1), называется калибровочным полем.

Пусть $\mathcal{F}$ — (вещественное или комплексное) векторное пространство, на котором группа G действует слева, и на $\mathcal{F}$ задано скалярное произведение $h(\cdot,\cdot)$, инвариантное относительно действия G. Пусть задано отображение $e : \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^*$ (где $\mathfrak{g}^*$ — коалгебра) называемое зарядом, которое постоянно на орбитах группы G.

Рассмотрим векторное расслоение $\boldsymbol{\pi} : Q \to \mathcal{M}$ со стандартным слоем $\mathcal{F}$, ассоциированное с $\mathcal{E}$. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda} : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \to Q$ факторизацию, приводящую к расслоению Q (см. [1]). Касательное отображение $T\boldsymbol{\lambda}$ переносит связность H из касательных пространств к E в касательные пространства к Q. Эту связность в расслоении Q обозначим H^{π}. Напомним, что пространства связности являются ядрами оператора $K^{\pi} : TQ \to Q$, который называется коннектором или отображением связности и строится следующим образом. Разложим вектор $X \in T_q Q$ на горизонтальную и вертикальную компоненты $X = \mathrm{H}X + \mathrm{V}X$, где $\mathrm{H}X \in \mathrm{H}^{\pi}$, $\mathrm{V}X \in \mathrm{V}$. Ведем оператор $\mathrm{p} : \mathrm{V}_{(m,q)} \to Q_m$ — естественный изоморфизм линейного касательного пространства $\mathrm{V}_{(m,q)} = T_q Q_m$ к слою Q_m расслоения Q на слой (линейное пространство) Q_m. Тогда $K^{\pi}X = \mathrm{p}\mathrm{V}X$.

Построим на многообразии Q риманову метрику g^Q, задав ее в горизонтальных подпространствах H^{π} как обратный образ $T\boldsymbol{\pi}^* g$, а в вертикальных пространствах V как h, и положив H и V ортогональными друг другу. Мы называем g^Q римановой метрикой для простоты изложения — на самом деле она построена из лоренцевой метрики на $\mathcal{M}$ и (возможно полуралинейного) скалярного произведения h.

Проекцию касательного расслоения $T\mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$ обозначим $\boldsymbol{\tau} : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Пусть на $\mathcal{M}$ как на многообразии, задана связность, для которой мы введем обозначение H^{τ}, а для ее коннектора (отображения связности) — $K^{\tau} : T^2\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$. Конструкция K^{τ} аналогична конструкции K^{π} с заменой Q на $T\mathcal{M}$ и TQ на $T^2\mathcal{M}$, соответственно. Обычно в качестве H^{τ} используется связность Леви—Чивита метрики g.

Напомним, что имеется стандартная конструкция связности на пространстве расслоения Q, использующая связности H^{π} и H^{τ} (см., например, [3, 4]). Коннектор этой связности $K^Q : T^2Q \to TQ$ задается в виде: $K^Q = K^H \oplus K^V$, где $K^H : T^2Q \to \mathrm{H}^{\pi}$, $K^V : T^2Q \to \mathrm{V}$. Последние коннекторы задаются в виде $K^H = \Gamma^{\pi} \circ K^{\tau} \circ T^2\boldsymbol{\pi}$, где $T^2\boldsymbol{\pi} = T(T\boldsymbol{\pi}) : T^2Q \to T^2\mathcal{M}$, а $\Gamma^{\pi} = T\boldsymbol{\pi}^{-1}$ — линейный изоморфизм касательных к $\mathcal{M}$ пространств на пространства связности H^{π}, и $K^V = \mathrm{p}^{-1} \circ K^{\pi} \circ TK^{\pi}$.

Отображение $\boldsymbol{\lambda}$ взаимно однозначно отображает стандартный слой $\mathcal{F}$ на слои расслоения Q, поэтому заряд e определен на всем Q. Поскольку $T\boldsymbol{\lambda}$ отображает связность на связность тоже взаимно однозначно, можно корректно задать форму $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ со значениями в g на многообразии Q следующим образом. Пусть $q = \boldsymbol{\lambda}(p, f)$, $p \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{F}$. Для $X, Y \in T_q Q$ обозначим через $\mathrm{H}X$ и $\mathrm{H}Y$ их горизонтальные составляющие и определим $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_q(X,Y) = \boldsymbol{\Phi}_p(T\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathrm{H}X, T\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathrm{H}Y)$.

Обозначим через $*$ спаривание элементов из $\mathfrak{g}$ и из $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим вектор $(q, \dot{q})$, касательный к Q. Понятно, что $e(q) * \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot, \dot{q})$ является обычной 1-формой (т.е. дифференциальной формой со значениями в вещественных числах). Обозначим через $\overline{e(q) * \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot, \dot{q})}$ касательный вектор к пространству расслоения Q, физически эквивалентный $e(q) * \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot, \dot{q})$ (т.е. полученный поднятием индексов с использованием римановой метрики g^Q).

Лемма 1. *Векторное поле* $\overline{e(q) * \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot, \dot{q})}$ *горизонтально, т.е. лежит в пространствах связности* H^{π}.

Лемма 1 доказана в [2, 6] (см. также лемму 16.12 в [3]).

Используя коннектор K^Q, в [2, 6] на пространстве расслоения Q введена ковариантная производная $\dfrac{D^Q}{dt} = K^Q \dfrac{d}{dt}$ и рассмотрено уравнение

$$\frac{D^Q}{dt}\dot{q} = \overline{e(q) * \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\cdot, \dot{q})}, \tag{2}$$

которое интерпретируется как уравнение движения классической частицы с зарядом в классическом калибровочном поле.

Строятся ковариантные производные $\frac{D^H}{dt} = K^H \frac{d}{dt}$ и $\frac{D^V}{dt} = K^V \frac{d}{dt}$, и поскольку $K^Q = K^H \oplus K^V$, то $\frac{D^Q}{dt} = \frac{D^H}{dt} + \frac{D^V}{dt}$. Из горизонтальности вектора $\overline{e(q) * \tilde{\Phi}(\cdot, \dot{q})}$ получаем, что уравнение (2) распадается в систему

$$\frac{D^H}{dt}\dot{q} = \overline{e(q) * \tilde{\Phi}(\cdot, \dot{q})}, \qquad (3)$$

$$\frac{D^V}{dt}\dot{q} = 0. \quad (4)$$

Частный случай изложенной выше конструкции, в котором $dim\mathcal{M} = 4$, G — группа $U(1)$ (одномерные унитарные операторы), а $\mathcal{F}$ — одномерное комплексное пространство с $h(X,Y) = X\overline{Y}$, приводит к описанию электромагнитного поля, где уравнения (3)—(4) соответствуют классическим уравнениям Лоренца (см [2, 3, 6]).

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НА ВЕКТОРНОМ РАССЛОЕНИИ НАД ПРОСТРАНСТВОМ МИНКОВСКОГО

Здесь мы используем релятивистский вариант стохастической механики Нельсона, предложенный Гуэррой, Руджерро и Заставняком [5, 7, 8, 9], и модифицируем его для использования на пространстве расслоения Q над пространством Минковского.

В этом разделе и далее мы рассматриваем случай, когда $\mathcal{M}$ — это пространство Минковского с сигнатурой $(-+++)$. Следовательно, расслоения $\mathcal{E}$ и Q тривиальны, т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{M} \times G$, а $Q = \mathcal{M} \times \mathcal{F}$. Кроме того, $T\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^4$, а связность Леви—Чивита H^τ лоренцева скалярного произведения состоит из подпространств, касательных к первому сомножителю $\mathcal{M}$ в этом прямом произведении. Действие K^τ на касательных пространствах к $T\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^4$ состоит в проектировании на вертикальное подпространство — касательное ко второму сомножителю $\mathbb{R}^4$ — и затем применения аналога оператора р, переводящего касательные пространства к слоям $T\mathcal{M}$ на эти слои.

Задание связности на $\mathcal{E}$ и, таким образом, связности $\mathcal{H}^\pi$ на Q, с физической точки зрения означает задание калибровочного поля.

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathcal{M}$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Через $\mathfrak{N}_t^\xi$ обозначим минимальную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathfrak{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{M}$ при отображении $\xi(t): \Omega \to \mathcal{M}$ («настоящее» процесса $\xi(t)$), а через $E(\cdot \mid \mathfrak{N}_t^\xi)$ условное математическое ожидание относительно $\mathfrak{N}_t^\xi$. Здесь t — инвариантный параметр, который может играть роль собственного времени.

Релятивистские производные в среднем процесса $\xi(t)$ справа и слева определяются следующим образом (см. [5, 7, 8, 9]):

$$D_+\xi(t) = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \le 0\Big) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \ge 0\Big); \qquad (5)$$

$$D_-\xi(t) = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \le 0\Big) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \ge 0\Big). \qquad (6)$$

Из свойств условного математического ожидания следует, что существует измеримое по Борелю векторное поле $v^\xi(t,m)$ на $\mathcal{M}$ такое, что $\frac{1}{2}(D_+ + D_-)\xi = v^\xi(t, \xi(t))$; вектор $v^\xi(t,m)$ называется текущей скоростью процесса ξ.

Для векторного поля $X(t,m)$ на $\mathcal{M}$ производные в среднем вдоль $\xi(t)$ задаются формулами:

$$D_+X(t,\xi(t)) = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{X(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - X(t, \xi(t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \\ - \xi(t))^2 \le 0\Big) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{X(t, \xi(t)) - X(t-\Delta t, \xi(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) - \\ - \xi(t-\Delta t))^2 \ge 0\Big); \qquad (7)$$

$$D_-X(t,\xi(t)) = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{X(t, \xi(t)) - X(t-\Delta t, \xi(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) - \\ - \xi(t-\Delta t))^2 \le 0\Big) + \\ + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E\Big(\frac{X(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) - X(t, \xi(t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \\ - \xi(t))^2 \ge 0\Big). \qquad (8)$$

Подчеркнем, что $D_+X(t,\xi(t))$ и $D_-X(t,\xi(t))$ принимают значения в векторах второго касательного расслоения и при этом из формул (5), (6), (7) и (8) очевидным образом следует, что $T\pi D_+X(t,\xi(t)) = D_+\xi(t)$ и $T\pi D_-X(t,\xi(t)) = D_-\xi(t)$. Как обычно, из указанных производных от X строятся ковариантные производные, которые мы определяем по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_+X(t,\xi(t)) &= K^\tau D_+X(t,\xi(t)),\\ \mathbf{D}_-X(t,\xi(t)) &= K^\tau D_-X(t,\xi(t)).\end{aligned} \qquad (9)$$

Понятно, что ковариантные производные в среднем принимают значения в векторах первого касательного расслоения.

Замечание 1. *По свойствам условного математического ожидания, для производных $D_+\xi(t)$ и $D_-\xi(t)$ существуют борелевские векторные поля (регрессии), которые мы обозначим $Y_+(t,m)$ и $Y_-(t,x)$, такие, что $D_+\xi(t) = Y_+(t,\xi(t)$ и $D_-\xi(t) = Y_-(t,\xi(t)$. Символом $\mathbf{D}_+D_-\xi(t)$ мы обозначаем производную (7) векторного поля $Y_-(t,m)$ вдоль $\xi(t)$, а $\mathbf{D}_-D_+\xi(t)$ — производную (8) векторного поля $Y_+(t,m)$ вдоль $\xi(t)$. В дальнейшем аналогичным образом будут пониматься и производные в среднем второго порядка от других процессов на пространстве расслоения Q.*

Используя Замечание 1, введем производные в среднем второго порядка. Релятивистское уравнение Ньютона—Нельсона имеет вид

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}_+D_- + \mathbf{D}_-D_+)\xi(t) = \bar{\alpha}(\xi(t), v^\xi(t)), \qquad (10)$$

где силовое поле имеет вид $\alpha(\xi(t), v^\xi(t)) = \bar{\alpha}_1(\xi(t))v^\xi$, $\bar{\alpha}(m): T_m\mathcal{M} \to T_m\mathcal{M}$ — линейный оператор. В релятивистском случае установлено естественное соотношение между уравнением (10) и уравнением Клейна—Гордона.

Рассмотрим стохастический процесс $\eta(t)$ в пространстве расслоения Q такой, что $\eta(t) = x(t,\xi(t))$, где $\xi(t) = \pi\eta(t)$, а $x(t,m)$ — измеримое по Борелю сечение Q. Для $\eta(t)$ мы вводим производные в среднем формулами

$$\begin{aligned}&D_+\eta(t) =\\ &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2 \le 0\Big) +\\ &+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{\eta(t)-\eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2 \ge 0\Big);\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}&D_-\eta(t) =\\ &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{\eta(t)-\eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2 \le 0\Big) +\\ &+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2 \ge 0\Big).\end{aligned} \qquad (12)$$

По сути дела формулы (11) и (12) являются частными случаями формул (7) и (8). Как и выше, борелевское векторное поле $v^\eta(t,q)$ на Q такое, что $v^\eta(t,\eta(t)) = \frac{1}{2}(D_+ + D_-)\eta(t)$ называется текущей скоростью процесса $\eta(t)$.

Лемма 2. *(i) $T\pi D_+\eta(t) = D_+\xi(t)$; (ii) $T\pi D_-\eta(t) = D_-\xi(t)$; (iii) $T\pi v^\eta = v^\xi$.*

Утверждения Леммы 2 вытекают из формул (5), (6), (11) и (12) и из определения текущих скоростей.

По аналогии с формулами (7) и (8) для векторного поля $Y(t,q)$ на Q введем производные в среднем вдоль $\eta(t)$ формулами

$$\begin{aligned}&D_+Y(t,\eta(t)) =\\ &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{Y(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)) - Y(t,\eta(t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) -\\ &- \xi(t))^2 \le 0\Big) +\\ &+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{Y(t,\eta(t)) - Y(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) -\\ &- \xi(t-\Delta t))^2 \ge 0\Big);\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}&D_-Y(t,\eta(t)) =\\ &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{Y(t,\eta(t)) - Y(t-\Delta t,\eta(t-\Delta t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t) -\\ &- \xi(t-\Delta t))^2 \le 0\Big) +\\ &+ \lim_{\Delta t\downarrow 0} E\Big(\frac{Y(t+\Delta t,\eta(t+\Delta t)) - Y(t,\eta(t))}{\Delta t} \mid \mathfrak{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) -\\ &- \xi(t))^2 \ge 0\Big)\end{aligned} \qquad (14)$$

и соответствующие ковариантные производные в среднем формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_+^Q X(t,\xi(t)) &= K^Q D_+X(t,\xi(t)),\\ \mathbf{D}_-^Q X(t,\xi(t)) &= K^Q D_-X(t,\xi(t)).\end{aligned} \qquad (15)$$

Поскольку $K^Q = K^H \oplus K^V$ (см. выше), то $\mathbf{D}_+^Q$ и $\mathbf{D}_-^Q$ разлагаются в суммы $\mathbf{D}_+^Q = \mathbf{D}_+^H + \mathbf{D}_+^V$ и $\mathbf{D}_-^Q = \mathbf{D}_-^H + \mathbf{D}_-^V$, где $\mathbf{D}_+^H$, $\mathbf{D}_+^V$, $\mathbf{D}_-^H$ и $\mathbf{D}_-^V$ определяются аналогично формулам (15) с заменой K^Q на K^H и K^V, соответственно.

Аналогично Замечанию 1, введем производные второго порядка.

Вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+ D_- + \mathbf{D}^Q_- D_+)\eta$ называется 4-ускорением процесса η в пространстве расслоения.

Из общей идеи стохастической механики следует, что уравнение Ньютона—Нельсона, соответствующее закону Ньютона (2), имеет вид

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+ D_- + \mathbf{D}^Q_- D_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) * \tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^\eta(t, \eta(t)))}. \quad (16)$$

Уравнение (16) интерпретируется как уравнение движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле.

Текущая скорость v^η в правой части уравнения (16) разложима на вертикальную и горизонтальную составляющие: $v^\eta = v^H_\eta + v^V_\eta$, где $v^H_\eta \in \mathrm{H}^\pi$ и $v^V_\eta \in \mathrm{V}$. Тогда из линейности формы $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot,\cdot)$ по обоим аргументам получаем $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^H_\eta) + \tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^V_\eta)$, а из того, что она горизонтальна — что $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^V_\eta) = 0$. Таким образом, с учетом Леммы 1, очевидно, что уравнение (16) эквивалентно следующей системе

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^H_+ D_- + \mathbf{D}^H_- D_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) * \tilde{\mathbf{\Phi}}(\cdot, v^H_\eta(t, \eta(t)))}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V_+ D_- + \mathbf{D}^V_- D_+)\eta(t) = 0. \quad (18)$$

Теорема 3.

$$T\pi \frac{1}{2}(\mathbf{D}^H_+ D_- + \mathbf{D}^H_- D_+)\eta(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+ D_- + \mathbf{D}_- D_+)\xi(t).$$

Доказательство. Напомним, что $D^H_+ D_-\eta(t) = K^H D_+ D_-\eta(t)$ и $K^H = \mathbf{\Gamma}^\pi \circ K^\tau \circ T^2\pi$, где $\mathbf{\Gamma}^\pi = (T\pi)^{-1}$. Следовательно, $T\pi \mathbf{D}^H_+ D_-\eta(t) = K^\tau T^2 \pi D^Q_+ D_-\eta(t)$.

Поскольку $Q = \mathcal{M} \times \mathcal{F}$, мы можем записать процесс $\eta(t)$ в виде пары $\eta(t) = (\xi(t), x(t, \xi(t)))$ (см. описание процесса $\eta(t)$ выше). Соответственно, $D_-\eta(t)$ запишется в виде четверки $(\xi(t), x(t,\xi(t)), D_-\xi(t), D_-x(t,\xi(t)))$, а $D_+ D_-\eta(t)$ — в виде восьмерки $(\xi(t), x(t,\xi(t)), D_-\xi(t), D_-x(t,\xi(t)),$ $D_+D_-\xi(t), D_+D_-x(t,\xi(t)))$. Используя описание действия $T^2\pi$ (см., например, [4]), получаем

$$T^2\pi D_+ D_-\eta(t) = (\xi(t), D_-\xi(t), D_+\xi(t), D_+ D_-\xi(t)).$$

Следовательно, $K^H D_+ D_-\eta(t) = K^\tau(\xi(t), D_-\xi(t),$ $D_+\xi(t), D_+ D_-\xi(t)) = \mathbf{D}_+ D_-\xi(t)$. Равенство $K^H D_- D_+\eta(t) = \mathbf{D}_- D_+\xi(t)$ доказывается в точности аналогично. □

Поскольку $T\pi$ взаимно однозначно отображает пространства связности H^π на касательные пространства к $\mathcal{M}$ и по Лемме 2 $T\pi v^\eta = T\pi v^H_\eta = v^\xi$, то из Теоремы 3 вытекает, что уравнение (17) сводится к уравнению типа Ньютона—Нельсона относительно процесса $\xi(t)$ на $\mathcal{M}$.

Уравнение (18) дает дополнительную информацию.

Теорема 4. *Векторы регрессии* $TK^\pi \frac{1}{2}(D_+ D_- + D_- D_+)\eta(t)$ *горизонтальны, т.е. лежат в пространствах связности* H^π.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{D}^V_+ = K^V D_+$, $\mathbf{D}^V_- = K^V D_-$, $K^V = \mathrm{p}^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi$ и $K^\pi = \mathrm{pV}$ (см. выше), то $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V_+ D_- + \mathbf{D}^V_- D_+)\eta(t) =$ $= \mathrm{V}\, TK^\pi \frac{1}{2}(D_+ D_- + D_- D_+)\eta(t)$. Но уравнение (18) утверждает, что $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V_+ D_- + \mathbf{D}^V_- D_+)\eta(t) = 0$. Так что вертикальная составляющая указанных векторов регрессии равна нулю. □

3. Случай $G = U(1)$

Наибольший интерес представляют частные случаи, в которых G — одна из групп $U(1)$, $SU(2)$ или $SU(3)$, а $\mathcal{F}$ — комплексное пространство соответствующей размерности. Они соответствуют известным физическим калибровочным полям. Рассмотрим случай, в котором $\mathcal{M}$ — пространство Минковского, $G = U(1)$ и $\mathcal{F} = \mathbb{C}^1$ с $h(X,Y) = X\bar{Y}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Алгебра $\mathfrak{u}(1)$ является вещественной прямой $\mathbb{R}$, поэтому заряд превращается в вещественную функцию, а $\boldsymbol{\theta}$ и $\mathbf{\Phi}$ — в обычные дифференциальные формы со значениями в $\mathbb{R}$. Из структурных уравнений (1) и коммутативности группы $U(1)$ получаем, что $\mathbf{\Phi} = D\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}$. Отсюда следует, во-первых, что $\mathbf{\Phi}$ является подъемом на $\mathcal{E}$ некоторой 2-формы $\mathbf{\Psi}$ с $\mathcal{M}$, причем $\mathbf{\Psi} = dA$, где A — некоторая 1-форма на $\mathcal{M}$, и во-вторых, что уравнения (1) превращаются в обычные уравнения Максвелла в геометрически-инвариантной форме для $\mathbf{\Psi}$ (см., например, [3]). Так что можно считать A 4-потенциалом, а $\mathbf{\Psi}$ — напряженностью электромагнитного поля. Нетрудно видеть, что $e * \tilde{\mathbf{\Phi}}$ превращается в подъем на Q вектора $e\bar{\mathbf{\Psi}}$. Так что из Теоремы 3 следует, что уравнение (17) сводится к уравнению Ньютона-Нельсона на $\mathcal{M}$, соответствующему классическому уравнению Лоренца движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Напомним, что в [5, 7, 8, 9] установлены взаимосвязи этого уравнения Ньютона—Нельсона с уравнением Клейна—Гордона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бишоп Р. Л.* Геометрия многообразий / Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден. — М.: Мир, 1967.— 336 с.

2. *Гликлих Ю. Е.* Об одном классе дифференциальных уравнений на расслоенных пространствах со связностями / Ю. Е. Гликлих, П. С. Ратинер // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ.— Воронеж: ВГУ, 1999. — С. 36—41.

3. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих — М.: УРСС, 2005. — 416 с.

4. *Далецкий Ю. Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская. — Киев: Выща Школа, 1989. — 296 с.

5. *Dohrn, D.* Spinning particles and relativistic particles in framework of Nelson's stochastic mechanics / D. Dohrn, F. Guerra, P. Ruggiero // Lecture Notes in Physics.— 1979.— Vol. 106.— P. 165—181.

6. *Gliklikh Yu. E.* On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections / Yu. E. Gliklikh, P. S. Ratiner // Nonlinear Analysis in Geometry and Topology.— Palm Harbor, Fl.: Hadronic Press, 2000.—P. 99—106.

7. *Guerra F.* A note on relativistic Markov processes / F. Guerra , P. Ruggiero // Lettere al Nuovo Cimento.— 1978.— V. 23, No. 16.— P. 529—534.

8. *Zastawniak T.* A relativistic version of Nelson's stochastic mechanics / T. Zastawniak // Europhys. Lett.— 1990.— Vol. 13.— P. 13—17.

9. *Zastawniak T.* Markov diffusion in relativistic stochastic mechanics / T. Zastawniak // Proceedings of Swansea Conference on Stochastic Mechanics 1990.— Singapore: World Scientific, 1992.— P. 280—297 (1992).

Винокурова Наталья Владимировна — аспирантка кафедры математического анализа и прикладной математики Курского государственного университета

Тел. +7-9202673486

E-mail: vinoknata@mail.ru

Гликлих Юрий Евгеньевич — профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа Воронежского государственного университета

Тел. (4732)674903

E-mail: yeg@math.vsu.ru

Vinokurova Natalia Vladimirovna — post graduate student of Department of mathematical analysis and applied mathematics of Kursk State University

Tel. +7-9202673486

E-mail: vinoknata@mail.ru

Gliklikh Yuri Evgenievich — professor of Department of algebra and topological methods of analysis of Voronezh State University

Tel. (4732)674903

E-mail: yeg@math.vsu.ru