УДК 511

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ВЕСОВОГО РЕШЕТА К ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Е. В. Вахитова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 25.06.2010 г.

Аннотация. В работе получена оценка снизу числа r-почти простых чисел в полиномиальной последовательности.
Ключевые слова: метод, решето, веса, число, последовательность, оценка.

Annotation. In this paper we obtain a lower estimate for the quantity of r-almost prime numbers in a polynomial sequence.
Key word: method, sieve, weights, number, sequences, estimation.

ВВЕДЕНИЕ

Метод решета является одним из немногих общих методов, позволяющих решать различные задачи теории чисел и ее приложений. Древнейший из известных методов решета принадлежит Эратосфену. Он применялся для подсчета числа простых чисел в заданном интервале. В. Брун [1] значительно разработал метод решета Эратосфена. Он заменил процесс полного высеивания в решете Эратосфена другим, неполным. При этом высеивании остаются не только простые числа, но и те составные числа, наименьший простой делитель которых p_n больше $x^{1/a}$, где $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$ — некоторое фиксированное число, x — достаточно большое положительное число.

А. А. Бухштаб [2] дал более совершенную структуру решета Бруна, применив интегро-конечно-разностные уравнения. В. А. Тартаковский [3] разработал приближенное решето, Ю. В. Линник [4] — метод большого решета, а П. Кун [5] — весовое решето. А. Сельберг [6] предложил другую идею для получения оценок сверху методом решета. Б. В. Левин [7] сконструировал свое решето типа Бруна.

А. А. Бухштаб [8] построил весовое комбинаторное решето. Х.-Э. Рихерт [9] — свое весовое решето. Методы решета в чистом виде и с весами Рихерта исследованы в монографии Х. Хальберстама и Х.-Э. Рихерта [10]. М. Лабордэ [11] упростил веса Бухштаба, получил непрерывную форму и показал, что веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба и заведомо хуже. Г. Гривс [12] построил другое весовое решето.

В 1985 году А. А. Бухштаб [13] анонсировал новый тип весового решета. Веса Бухштаба нового типа, метод решета Бруна с весами Бухштаба нового типа и метод решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа исследованы автором в работах [14], [15]. Различные методы решета исследовали в монографиях К. Хооли [16], Г. Гривс [17], Д. Р. Хис-Браун [18], Е. В. Вахитова [19].

В настоящей работе дано приложение метода одномерного решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа из работы автора [15] к полиномиальной последовательности.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим последовательность A,

$$A = \{\Phi(pq) \mid p \neq q, (pq, \Phi(0)) = 1, \\ p \leq x^{\alpha}, q \leq x^{1-\alpha}\}, \tag{1}$$

где $\alpha, x \in \mathbf{R}, x > 1, 0 < \alpha \leq 1/2$, p и q — простые числа, $\Phi(n)$ — неприводимый полином с целыми коэффициентами, $n \in \mathbf{N}$.

Обозначим через P_r r-почти простое число (имеющее в своем разложении r простых множителей с учетом их кратности, $r \in \mathbf{N}, r \geq 2$), g — степень полинома $\Phi(n)$, $\rho(d)$ — число решений сравнения $\Phi(n) \equiv 0 (mod d)$ и предположим, что $\rho(p) < p$ для всех простых чисел p, причем, $\rho(p) < p - 1$, если p не делит $\Phi(0)$.

Поставим задачу: получить оценку снизу числа r-почти простых чисел из последовательности A. Для решения задачи применим результаты работы автора [15].

УСЛОВИЯ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

1). Существует постоянная $C_1 \geq 1$, такая, что

$$1 \leq (1 - \frac{\omega(p)}{p})^{-1} \leq C_1$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ — мультипликативная функция, такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X$ является приближением числа $\left|A d\right|, \left|A d\right| = \left|\{a_n \in A \mid a_n \equiv 0 (\bmod d)\}\right|$ и $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(u)$ — функция Мебиуса).

2). Существует постоянная $C_2 \geq 1$ и параметр L, такие, что

$$-L \leq \sum_{u \leq p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leq C_2,$$

где $L \geq 1$ и не зависит от u и $v, 2 \leq u \leq v$.

3). Существуют постоянные $\alpha (0 < \alpha \leq 1), C_0 \geq 1, C_3 \geq 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{x^a}{\ln^{c_0} X}} \mu^2(d) 3^{v(d)} \left|R(X, d)\right| \leq C_3 \frac{X}{\ln^c X},$$

где $X \geq 2, C_3 = C_3(C), R(X, d) = \left|A d\right| - \frac{\omega(d)}{d} X$.

4). Существует постоянная $C_4 \geq 1$, такая, что

$$\sum_{z \leq p < y \leq X} \sum_{a_n \in A, a_n \equiv 0 (\bmod p^2)} 1 \leq C_4 \left(\frac{X \ln X}{z} + y \right),$$

если $2 \leq z \leq y \leq X$.

ВЕСА БУХШТАБА НОВОГО ТИПА

$$T_{nov}(X) = \frac{1}{2} \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) +$$

$$+ \frac{1}{2c - b - 1} \left\{ (c - b) \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leq p < X^{\frac{a-g'}{a}}} S_k(A_p; X^{\frac{1}{a}}) + \right.$$

$$+ \sum_{X^{\frac{a-g'}{a}} \leq p < X^{\frac{c}{a}}} \left(c - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k \left(A_p; X^{\frac{1}{a}} \right) +$$

$$+ a \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1+a(g'-1)}{ag'^2}} \left(\sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leq p < X^{1-g'z}} S_k(A_p; X^z) \right) dz +$$

$$+ \sum_{X^{\frac{1}{a}} \leq p < X^{\frac{a-1}{g'a}}} \left(\frac{b+1}{2} - a \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{g'}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{g'} \sum_{X^{\frac{a-1}{g'a}} \leq p < X^{\frac{a-g'}{a}}} (bg' - a + g' -$$

$$\left. - a(g' - 1) \frac{\ln p}{\ln X} \right) S_k \left(A_p; \left(\frac{X}{p} \right)^{\frac{1}{g'}} \right) \Bigg\},$$

где $k \in N$, $a, b, c, g' \in \mathbf{R}$, $1 \leq b \leq c \leq a$, $2c - b - 1 > 0$, $1 \leq g' \leq a - 1$, $S_k(A_d; z) = \left|\{a_n \in A \mid a_n \equiv 0 (\bmod d), (a_n, P_k(z)) = 1\}\right|$, $A = \{a_n \in \mathbf{Z} \mid a_n \leq X\}$, где $n \in N, X \in R, X > 1, A_d = \{a_n \in A \mid a_n \equiv 0 (mod d)\}$, $d \in \mathbf{N}$, такое, что $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(u)$ — функция Мебиуса).

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Теорема 1. Пусть последовательность A определена условием (1). Тогда имеет место оценка:

$$\sum_{\Phi(pq) = P_r} 1 \geq \frac{a e^{-\gamma}}{2} (f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')) \times$$

$$\times \prod_{p | \Phi(0)} \frac{1 - \frac{\rho(p)}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \prod_{p | \Phi(0)} \frac{1 - \frac{\rho(p) - 1}{p-1}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{x}{\ln^3 x}$$

для достаточно больших x, где γ — постоянная Эйлера ($\gamma = 0,57...$), $B(\alpha, a, b, c, g')$ определено равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') = \frac{1}{2} \int_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a - 1} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} +$$

$$+ \frac{1}{2c - b - 1} \left\{ (c - b) \int_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z) dz}{\alpha a - z} + \right.$$

$$+ \int_{\alpha a - c}^{g'} F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz +$$

$$+ \int_{\frac{g'^2 \alpha a}{(g'-1)\alpha a + 1}}^{\alpha a} \left(\int_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a} v} F(z) \frac{dz}{v - z} \right) \frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a - 1}}^{\alpha a - 1} F(g') \frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz +$$

$$\left. + \frac{g'}{\alpha a} \int_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a - 1}} F(g') \frac{(b + 1 - \frac{\alpha a}{g'}) z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \right\},$$

где $\alpha, a, b, c, g' \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha a - c \le g'$, $1 \le b < c < \alpha a$, $g' + 1 \le \alpha a \le 2(g'+1)$, $2c - b - 1 > 0$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, M определено из условия: существует постоянная M, такая , что $\left|a_n\right| \le X^M$ для всех $a_n \in A, f(u), F(u)$ — функции решета.

Теорема 1 при $g' = 3$ доказана в работе автора [19] (теорема 2.3.1). Доказательство теоремы 1 в общем случае проводится аналогично.

Теорема 1 дает оценку снизу для числа r -почти простых чисел из полиномиальной последовательности значений неприводимого полинома $\mathbf{\Phi}(pq)$ с ограничениями на p и на q, а именно: $p \le x^{\alpha}, q \le x^{1-\alpha}$, где $0 < \alpha \le 1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brun V.* Le crible d`Eratosthene et le theorem de Goldbach // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1919. — V. 168. — P. 544 — 546.
2. *Бухштаб А. А.* Новые улучшения в методе эратосфенова решета // Матем. сб. — 1938. — Т. 4 (46). — N 2. — С. 375—387.
3. *Тартаковский В. А.* Метод избирательного “приближенного решета” // ДАН СССР. — 1939. — Т. 23. — N 2. — С. 127—130.
4. *Линник Ю. В.* “Большое решето” // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30. — N 4. — С. 290—292.
5. *Kuhn P.* Zur Viggo Brunschen Siebmethode // I. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem. — 1941. — V. 14. — N 39. — P. 145 — 148.
6. *Selberg A.* On elementary methods in prime number theory and their limitations // II Scand. Mat. Kongr. Trondheim. — 1949. — P. 13 — 22.
7. *Левин Б. В.* Метод решета и его применения. Дис. ... д-ра физико-матем. наук. — М., 1963. — 240 с.
8. *Бухштаб А. А.* Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. — 1967. — Т. 22. — N 3 (135). — С. 199—226.
9. *Richert H.—E.* Selbergs sieve with weights // Mathematika. — 1969. — V. 16. — N 31. — P. 1 — 22.
10. *Halberstam H., Richert H.—E.* Sieve methods. London: Acad. Press, 1974. — 364 p.
11. *Laborde M.* Buchstabs sifting weights // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250—257.
12. *Greaves G.* A weighted sieve of Brun type // Acta arith. — 1982. — V. 40. — P. 297—332.
13. *Бухштаб А. А.* Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. “Теория чисел и ее приложения”. Тез. докл. — Тбилиси, 1985. — С. 22—24.
14. *Вахитова Е. В.* О приложении функций Бухштаба // Матем. заметки. — 1995. — Т. 57. — N 1. — С. 121—125.
15. *Вахитова Е. В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66. — 1. — С. 38—49.
16. *Хооли К.* Применения методов решета в теории чисел. Перевод с англ. В. Н. Чубарикова. — М.: Наука, 1987. — 136 с.
17. *Greaves G.* Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathematik. Berlin: Springer —Verlag. — 2001. — V. 43. — N 3. — 304 p.
18. *Heath-Brown D. R.* Lectures on sieves. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathematische Schriften. — 2003. — V. 360. — 50 p.
19. *Вахитова Е. В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Монография. — М.: Изд-во МПГУ ‘’Прометей’’, 2002. — 268 с.

Вахитова Екатерина Васильевна — кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета.

Тел. 89601063094

E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Ekaterina Vasilevna — candidate of Sciences in Physics and Mathematics, professor, professor of the Departament digital technologies, Voronezh State University

Phone: 89601063094

E-mail: algabraist@mail.ru