УДК 517.95; 517.984

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ*

М. Ш. Бурлуцкая*, **А. П. Хромов****

**Воронежский государственный университет*
***Саратовский государственный университет*

Поступила в редакцию 18.10.2010 г.

Аннотация. В данной работе методом Фурье получено явное классическое решение смешанной задачи для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией. Использованы приемы, позволяющие преобразовать ряд, представляющий формальное решение по методу Фурье, и доказать возможность его почленного дифференцирования. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования.
Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

Abstract. In this paper an explicit classical solution of mixed problem for first order differential equation with involution is obtained by Fourier method. We used techniques, which allow to transform a series representing the formal solution on Fourier method, and to prove the possibility of his term by term differentiation. At the same time on the initial problem data minimum requirements are imposed.
Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution.

Рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} + q(x)u\left(x,t\right), \qquad (1)$$

$$x \in [0,1],\ t \in (-\infty,\infty),$$

$$u\left(0,t\right) = 0, \qquad u\left(x,0\right) = \phi(x), \qquad (2)$$

где β — вещественное число. Решение ищется в классе функций непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в полосе $[0,1]\times(-\infty,+\infty)$.

Уравнение (1) представляет собой простейшее уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\vartheta\left(x\right) = 1 - x$. Краевые задачи с инволюцией активно исследуются (см., например, работы [1, 2] и библиографию в них). Решение задачи (1)—(2) мы находим методом Фурье. При этом используются приемы из [3] (см. также и [4, с. 224—227]), позволяющие получить классическое решение, избегая почленного дифференцирования первоначального функционального ряда, представляющего формальное решение задачи по методу Фурье. Это дает возможность накладывать минимальные условия на начальные данные задачи. Соответствующая краевая задача на собственные значения порождается системой Дирака, что создает определенные трудности при изучении задачи (1)—(2), несмотря на то, что уравнение (1) есть уравнение всего лишь первого порядка.

1. Случай симметричного потенциала. Рассмотрим случай, когда $q(x)$ — вещественная функция, $q(x) \in C[0,1]$, и $q(x) = q(1-x)$. Будем считать, что $\phi(x) \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi'(1) = 0$. Условия на $\phi(x)$ являются естественными, так как им удовлетворяют собственные функции порождаемой (1)–(2) краевой задачи. Условие $q(x) = q(1-x)$ снимает многие трудности при исследовании задачи и позволяет дать хорошую структурную форму для решения.

Согласно методу Фурье положим $u(x,t) = y(x)T(t)$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения для $y(x)$:

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad (3)$$

$$y(0) = 0, \qquad (4)$$

а $T(t) = e^{\lambda\beta i t}$.

Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$. Тогда, если $y(x)$ удовлетворяет (3), то $z(x)$ удовлетворяет системе

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \qquad (5)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q(x)$, и $z_1(x) = z_2(1-x)$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-4383.2010.1).

Матрицу B можно привести к диагональному виду с помощью преобразования $\Gamma^{-1}B\Gamma = D$, где $D = \mathrm{diag}(i,-i)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Выполнив в (5) замену $z = \Gamma v$, $v = (v_1, v_2)^T$, придем к системе

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = \lambda D^{-1}v(x), \qquad (6)$$

где $D^{-1} = \mathrm{diag}(-i,i)$, $P_1(x) = D^{-1}q(x)$. Система (6) распадается на два уравнения:

$$v_1(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda i v_1(x),$$
$$v_2(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda i v_2(x),$$

решая которые, придем к следующим утверждениям.

Лемма 1. *Общее решение системы (5) имеет вид* $z(x) = \Gamma V(x,\lambda)c$, *где* $V(x,\lambda) = \mathrm{diag}\left(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}\right), u_1(x) = \exp\left(i\int_0^x q(t)dt\right)$, $u_2(x) = \exp\left(-i\int_0^x q(t)dt\right), c = (c_1,c_2)^T, c_k$ *— произвольные постоянные.*

Лемма 2. *Общее решение уравнения (3) имеет вид* $y(x,\lambda) = g(x,\lambda)c$, *где* $g(x,\lambda) = u_2(1-x)e^{\lambda i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda ix}$, c *— произвольная постоянная.*

Лемма 3. *Собственные значения задачи (3)—(4) простые и равны* $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$, $n \in \mathbf{Z}$, *где* $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)dt$, *а соответствующие собственные функции*

$$y_n^0(x) = u_2(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - iu_2(x)e^{\lambda_n^0 ix}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Обозначим через L оператор

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются $y_n^0(x)$.

Лемма 4. *Система* $\left\{y_n^0(x)\right\}$ *— ортогональна и полна в* $L_2[0,1]$, *и* $\left\|y_n^0\right\|^2 = \gamma_n = 2 + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство. Нетрудно показать, что оператор L при условии вещественности $q(x)$ является самосопряженным. Отсюда следует ортогональность $\left\{y_n^0(x)\right\}$.

Пусть $f \in L_2[0,1]$ и f ортогональна y_n^0, $\forall n \in Z$. Тогда

$$(y_n, f) = \int_0^1 \overline{(f(1-x) + if(x))}u_2(x)e^{iax}e^{2\pi nix}\,dx,$$

откуда в силу полноты тригонометрической системы $\left\{e^{2\pi nix}\right\}$ получаем, что $f(x) \equiv 0$.

Лемма 5. *Функция* $\phi(x)$ *разлагается в ряд Фурье по системе собственных функций* $\left\{y_n^0(x)\right\}$,

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\phi, y_n^0\right)\gamma_n^{-1}y_n^0(x),$$

и ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Пусть вещественное число μ_0 не является собственным значением оператора L. Положим $(L-\mu_0 E)\phi = g$ (E — единичный оператор). Тогда $\phi = R_{\mu_0}g$, где R_λ есть резольвента оператора L. Далее, $(L-\mu_0 E)y_n^0 = (\lambda_n^0 - \mu_0)y_n^0$, откуда $y_n^0 = (\lambda_n^0 - \mu_0)R_{\mu_0}y_n^0$, и

$$(\phi, y_n^0) = (R_{\mu_0}g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0}y_n^0) = \frac{1}{\lambda_n^0 - \mu_0}(g, y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\phi, y_n^0)\gamma_n^{-1}y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(g,y_n^0)}{\lambda_n^0 - \mu_0}\,\gamma_n^{-1}y_n^0(x).$$

Так как $\frac{1}{\lambda_n^0-\mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|(g,y_n^0)\right|^2\gamma_n^{-1} < \infty$, то утверждение леммы из неравенства Коши—Буняковского и равномерной ограниченности $y_n^0(x)$.

Лемма 6. *Положим* $f_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\phi, y_n^0\right)\gamma_n^{-1}e^{2\pi nix}$. *Тогда* $f_0(x)$ *— непрерывно дифференцируема на всей оси, периодическая с периодом 1, причем*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\phi(x) + \phi(1-x)\right], \text{ при } x \in [0,1], \qquad (7)$$

где $p(x) = u_2(x)e^{iax}$.

Доказательство. Согласно лемме 5, ряд $\sum\left|c_n\right|$, где $c_n = (\phi, y_n^0)\gamma_n^{-1}$ сходится. Поэтому ряд, представляющий $f_0(x)$ равномерно сходится, откуда следует непрерывность функции $f_0(x)$.

Из леммы 5 при $x \in [0,1]$ имеем

$$\phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n y_n^0(x) =$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\left[u_2(1-x)e^{(2\pi n+a)i(1-x)} - iu_2(x)e^{(2\pi n+a)ix}\right]$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\left[p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}\right],$$

откуда

$$\phi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x). \qquad (8)$$

Отсюда

$$\phi(1-x) = p(x)f_0(x) - ip(1-x)f_0(1-x). \qquad (9)$$

Из (8) и (9) получаем

$$i\phi(x) + \phi(1-x) = 2p(x)f_0(x). \qquad (10)$$

Из (10) следует (7). Таким образом, функция $f_0(x)$ в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке $[0,1]$ по формуле (7).

Из (7) следует, что $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ (в концевых точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности $f_0(x)$ непрерывно дифференцируема всюду на $(-\infty,+\infty)$, кроме точек $x = n$ (n – целое). Покажем, что $f_0(n-0) = f_0(n+0)$. В силу периодичности $f_0(x)$ достаточно установить, что

$$f_0(0+0) = f_0(0-0). \qquad (11)$$

Дифференцируя (10), получим:

$$i\phi'(x) - \phi'(1-x) = 2p'(x)f_0(x) + 2p(x)f_0(x). \qquad (12)$$

Из (12), и соотношений $\phi(0) = \phi'(1) = 0$, $f_0(0) = f_0(1)$, $f_0(1-0) = f_0(0-0)$ имеем

$$2p'(0)f_0(0) + 2p(0)f_0(0+0) =$$
$$= i\phi'(0), 2p'(1)f_0(0) + 2p(1)f_0(0-0) = -\phi'(0),$$

откуда

$$\begin{gathered} 2[p'(0) + ip'(1)]f_0(0) + \\ +2[p(0)f_0(0+0) + ip(1)f_0(0-0)] = 0. \end{gathered} \qquad (13)$$

Так как $p(0) = 1$, $p(1) = \exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia} =$

$= e^{\pi i/2} = i \quad p(1) = \exp\left(-i\int_0^1 q(t)\,dt\right)e^{ia} = e^{\pi i/2} = i$,

$u_2(x) = -iq(x)u_2(x)$, $p'(0) = -iq(0) + ia$, $p'(1) = q(1) - a$, а также $q(0) = q(1)$, то $p'(0) + ip'(1) = 0$, и из (13) следует (11). Лемма доказана.

Формальное разложение решения задачи (1)—(2) есть

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_n, y_n^0\right)\gamma_n^{-1} y_n^0(x) e^{\lambda_n \beta i t}. \qquad (14)$$

Используя лемму 6 при изучении ряда (14), придем к следующему результату.

Теорема 1. *Если* $q(x)$ *— вещественна,* $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, $\phi(x) \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi'(1) = 0$, *то решение задачи (1)-(2) существует и имеет вид*

$$\begin{gathered} u(x,t) = \\ = e^{a\beta i t}[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \end{gathered} \qquad (15)$$

где $f_0(x)$ *— непрерывно дифференцируема на всей оси, периодическая с периодом 1, и* $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\phi(x) + \phi(1-x)\right]$ *при* $x \in [0,1]$ *;*

$p(x) = e^{iax - i\int_0^x q(t)\,dt}$, $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)\,dt$.

Доказательство. Как установлено выше, если функцию $f_0(x)$ продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что $u(x,t)$, заданная формулой (15), является решением смешанной задачи (1)—(2).

Сначала, покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Имеем

$$\frac{1}{\beta i}u'_t(x,t) = ae^{a\beta i t}[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) -$$
$$-ip(x)f_0(x+\beta t)] + \frac{1}{i}e^{a\beta i t}[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) -$$
$$-ip(x)f_0(x+\beta t)],$$
$$u'_\xi(\xi,t)\,|_{\xi=1-x} = e^{a\beta i t}[-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) -$$
$$-p(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) -$$
$$-ip(\xi)f_0(\xi+\beta t)]\,|_{\xi=1-x} = e^{a\beta i t}[-p'(x)f_0(x+\beta t) -$$
$$-p(x)f_0(x+\beta t) - ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) -$$
$$-ip(1-x)f_0(1-x+\beta t)].$$

Подставляя данные соотношения в (1), получим

$$e^{a\beta i t}\{f_0(1-x+\beta t)[ap(1-x) + ip'(1-x) -$$
$$-p(1-x)q(x)] + f_0(x+\beta t)[-aip(x) + p'(x) +$$
$$+ip(x)q(x)] + f_0(1-x+\beta t)[\frac{1}{i}p(1-x) +$$
$$+ip(1-x)] + f_0(x+\beta t)[-p(x) + p(x)]\}.$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для $p(x)$ и $p'(x)$, получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т.е. $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Далее, при $x \in [0,1]$ имеем $u(x,0) = = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \phi(x)$. Наконец $u(0,t) = e^{a\beta i t}[p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)] = 0$, т.е. начальное и краевое условие выполнены. Теорема доказана.

2. Случай произвольного потенциала. Теорема о разложении по собственным функциям. Рассмотрим теперь общий случай, когда для $q(x)$ требуем только выполнения условия $q(x) \in C^1[0,1]$, и $q(x)$ — вещественна.

Обозначим через L тот же оператор, что и в п.1, но $q(x)$ теперь имеет новый смысл. Тогда, если $y = R_\lambda f = (L-\lambda E)^{-1} f$, то

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad y(0) = 0. \quad (16)$$

Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$. Тогда, из (16) получаем задачу

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + F(x), \quad (17)$$

$$\widetilde{U}(z) = M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \quad (18)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix}$,

$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F(x) = \left(f_1(x), f_2(x)\right)^T$ и $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$.

Также как в [5] доказываются следующие утверждения

Лемма 7. *Если λ таково, что R_λ существует, то $z(x)$ удовлетворяет (17)–(18). Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (17)–(18) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f(x) = z_1(x)$, а $z_2(x) = z_1(1-x)$.*

Лемма 8. *Преобразование $z(x) = \Gamma v(x,\lambda)$, где Γ — матрица из п.1, приводит систему (17) к виду*

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = \lambda D^{-1} v(x) + \Phi(x), \quad (19)$$

где $P_1(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i[q(x)+q(1-x)] & -q(x)+q(1-x) \\ -q(x)+q(1-x) & i[q(x)+q(1-x)] \end{pmatrix}$,

$D^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\Phi(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}F$.

Пусть $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, где $H_0(x) = \operatorname{diag}\left(h_1(x), h_2(x)\right)$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right\}$, $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, а $H_1(x)$ — кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения $H_0'(x) + P_1(x)H_0(x) + (H_1(x)D^{-1} - D^{-1}H_1(x)) = 0$. Тогда известно [6, с. 48—58], что преобразование $v(x) = H(x,\lambda)w(x)$ приводит систему (19) к виду

$$w'(x) + P_\lambda(x)w(x) = \lambda D^{-1}w(x) + H^{-1}(x,\lambda)\Phi(x), \quad (20)$$

где $P_\lambda(x) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left[P_1(x)H_1(x) + H_1'(x)\right]$. Из (18) получим краевые условия для $w(x)$:

$$Q_{0\lambda}w(0) + Q_{1\lambda}w(1) = 0, \quad (21)$$

где $Q_{0\lambda} = M_0\Gamma H(0,\lambda)$, $Q_{1\lambda} = M_1\Gamma H(1,\lambda)$.

Обозначим через S_δ область, полученную из λ-плоскости удалением всех чисел вида $\pi n + a$, ($n \in \mathbf{Z}$), $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)dt$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Как и в [7] получаем следующее утверждение.

Лемма 9. *В области S_δ при достаточно больших $|\lambda|$ краевая задача (20)–(21) однозначно разрешима и для ее решения имеет место оценка $\|w\|_\infty = O\left(\psi(\lambda)\|f\|_\infty\right)$, где $\psi(\lambda) = \left(1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda i|}\right)|\operatorname{Re}\lambda i|$, $\|\cdot\|_\infty$ — норма в L_∞.*

Теорема 2. *Если $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0) = 0$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|f(x) - S_r(f,x)\right\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора L.

Доказательство. По лемме 7 имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left[\tilde{R}_\lambda F\right]_1 d\lambda, \quad (22)$$

где $\widetilde{R}_\lambda$ — резольвента оператора $Lz = Bz'(x) + P(x)z(x), \widetilde{U}(z) = 0, F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $[\;]_1$ означает первую компоненту вектора.

Пусть число λ_0 не является собственным значением оператора $\widetilde{L}$. Тогда по тождеству Гильберта $\tilde{R}_\lambda F = (\tilde{R}_\lambda G - F)/(\lambda - \lambda_0)$, где $G = \widetilde{L}F - \lambda_0 F$. Отсюда по лемме 9 получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\tilde{R}_\lambda F d\lambda = \\ = F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{\tilde{R}_\lambda G}{\lambda - \lambda_0}d\lambda = F(x) + o(1), \quad (23)$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$. Из (22) и (23) следует утверждение теоремы.

3. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L. Рассмотрим однородную систему

$$w'(x) + P_\lambda(x)w(x) = \lambda D^{-1}w(x). \quad (24)$$

Лемма 10. *Матричное уравнение (24) имеет следующее решение с асимптотикой*

$$w(x,\lambda) = \left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right)\exp\left\{\lambda D^{-1}x\right\}, \quad (25)$$

где E *— единичная матрица* 2×2*, матрица-функция* $O\left(\lambda^{-1}\right)$ *регулярна** *в полуплоскостях* $Re\lambda i \ge 0$ *и* $Re\lambda i \le 0$ *при* $\left|\lambda\right|$ *достаточно больших.*

Доказательство. Уравнение $w'(x) = \lambda D^{-1}w(x)$ имеет матрицу-решение $w(x,\lambda) = \exp\left\{\lambda D^{-1}x\right\}C$, где C — произвольная матрица. По методу вариации произвольной постоянной, полагая $C = C(x)$, из (24) получим соотношение для $C'(x)$, интегрируя которое придем к следующему уравнению

$$C(x) = C - \int_0^x e^{-\lambda D^{-1}t}P_\lambda(t)e^{\lambda D^{-1}t}C(t)\,dt \qquad (26)$$

(C — пока неопределенная постоянная матрица). Для того, чтобы провести нужную оценку интегрального слагаемого, выполним замену $C(x) = e^{-\lambda D^{-1}x}\tilde{C}(x)e^{\lambda D^{-1}x}$. Тогда (26) перейдет в соотношение

$$\begin{aligned}&\tilde{C}(x) = \\ &= e^{\lambda D^{-1}x}Ce^{-\lambda D^{-1}x} - \int_0^x e^{\lambda D^{-1}(x-t)}P_\lambda(t)\tilde{C}(t)e^{-\lambda D^{-1}(x-t)}dt.\end{aligned} \qquad (27)$$

Обозначая элементы матрицы $P_\lambda(t)\tilde{C}(t)$ через x_{ij}, полагая $C = E + \tilde{C}$, где $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$, из (27) имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(x) = E + &\begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12}e^{-2\mu x} \\ \tilde{c}_{21}e^{2\mu x} & \tilde{c}_{22}\end{pmatrix} - \\ -&\int_0^x \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}e^{-2\mu(x-t)} \\ x_{21}e^{2\mu(x-t)} & x_{22}\end{pmatrix}dt,\end{aligned} \qquad (28)$$

где $\mu = \lambda i$. Пусть для определенности $Re\mu \ge 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично). Так как компоненты $P_\lambda(x)$ имеют оценку $O\left(\lambda^{-1}\right)$, то достаточно положить $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{22} = 0$, $\tilde{c}_{21} = \int\limits_0^1 x_{21}e^{-2\mu t}dt$, и мы получим $\tilde{C}(x) = E + O\left(\lambda^{-1}\right)$, откуда легко следует утверждение леммы.

Из леммы 10 следует

Лемма 11. *Система*

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) \qquad (29)$$

имеет матрицу-решение с асимптотикой

$$\begin{aligned}&z(x,\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} h_1(x) & -ih_2(x) \\ -ih_1(x) & h_2(x)\end{pmatrix}\left(E + O\left(\lambda^{-1}\right)\right)\exp\left\{\lambda D^{-1}x\right\}.\end{aligned}$$

Лемма 12. *Число* λ *является собственным значением, а* $y(x)$ *собственной функцией краевой задачи*

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 0, \quad (30)$$

тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ *является ненулевым решением системы (29) с краевыми условиями*

$$z_1(0) = 0, \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \qquad (31)$$

Доказательство. Необходимость доказывается также как в п. 2 (лемма 7). Учитывая, что $y(0) = 0$ и $z_1(x) = z_2(1-x)$, получим условия (31).

Обратно, пусть $z(x)$ ненулевое решение (29)–(31). Меняя в (29) x на $1-x$ и полагая $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = z_2(1-x)$, $u_2(x) = z_1(1-x)$, получим, что $u(x)$ также удовлетворяет (29). Поскольку $u_1(1/2) = z_2(1/2) = z_1(1/2) = u_2(1/2)$, то в силу единственности задачи Коши для системы (29) с начальным условием в точке $x = 1/2$ имеем $u(x) \equiv z(x)$. Отсюда $z_1(x) = z_2(1-x)$. Тогда из первого уравнения в (29) и условия (31) получим

$$z_1(1-x) + q(x)z_1(x) = \lambda z_1(x), \quad z_1(0) = 0,$$

т.е. $y(x) = z_{.}(x)$ есть собственная функция задачи (30).

Из лемм 11 и 12 известными приемами получаются следующие результаты.

Лемма 13. *Краевая задача (30) имеет бесконечное множество собственных значений* λ_n*, для которых имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(1/n\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots$$

где $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$*,* $a = \pi/2 + \int\limits_0^1 q(t)dt$*,* n_0 *достаточно большое натуральное число. При этом достаточно большие по модулю собственные числа являются простыми.*

Лемма 14. *Для собственных функций* $y_n(x)$ *краевой задачи (30) справедливы следующие асимптотические формулы*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(1/n\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где $y_n^0(x) = h_2(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - ih_2(x)e^{\lambda_n^0 ix}$.

Так как L самосопряженный оператор, то по теореме 2 получим

Лемма 15. *Система* $\left\{y_n(x)\right\}$ *является ортогональной и полной в* $L_2[0,1]$*, и* $\left\|y_n\right\|^2 = 2 + O\left(1/n\right)$*, где* $\left\|\cdot\right\|$ *— норма в* $L_2[0,1]$.

4. Решение задачи (1)—(2). Согласно методу Фурье, формальное решение задачи (1)—(2) имеет вид

* Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\phi(x))e^{\lambda\beta it}d\lambda+ \\ +\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{1}{\|y_n\|^2}(\phi,y_n)y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}, \quad (32)$$

где r таково, что при $|\lambda_n|>r$ все собственные значения простые.

Представим ряд (32) в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t),$$

где

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda-R_\lambda^0\right)\phi(x)\right)e^{\lambda\beta it}d\lambda, \quad (33)$$

$$u_2(x,t)=\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\phi,y_n)}{\|y_n\|^2}y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}-\frac{(\phi,y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}\right], \quad (34)$$

$$u_3(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(\phi,y_n^0)}{\|y_n^0\|^2}y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}, \quad (35)$$

где R_λ^0 — резольвента оператора L_0

$$L_0y(x)=y'(1-x)+q_1(x)y(x),$$

$$y(0)=0,\ \ q_1(x)=\frac{1}{2}(q(x)+q(1-x)).$$

Легко видеть, что λ_n^0 и $y_n^0(x)$ из лемм 13 и 14 являются собственными значениями и собственными функциями оператора L_0.

Считаем далее, что 0 не является собственным значением операторов L и L_0 (это не ограничивает общности).

Лемма 16. *Имеет место формула*

$$u_2(x,t)= \\ =\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n)y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n}-\frac{(g,y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}\right]+ \\ +\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(g_2,y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2(\lambda_n^0)^2}, \quad (36)$$

где $g=L\phi$, $g_1=g-L_0\phi$, $g_2=L_0g_1$ (здесь g_1 из области определения оператора L_0, так как $q(x)\in C^1[0,1]$).

Доказательство. Из тождества Гильберта имеем:

$$R_\lambda\phi=-\frac{\phi}{\lambda}+\frac{R_\lambda g}{\lambda},$$

$$R_\lambda^0\phi=-\frac{\phi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0(L_0\phi)}{\lambda}=-\frac{\phi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0(g-g_1)}{\lambda}= \\ =-\frac{\phi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0g}{\lambda}-\frac{R_\lambda^0g_1}{\lambda}=-\frac{\phi}{\lambda}+\frac{R_\lambda^0g}{\lambda}+\frac{g_1}{\lambda^2}-\frac{R_\lambda^0g_2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$R_\lambda\phi-R_\lambda^0\phi=\frac{(R_\lambda-R_\lambda^0)g}{\lambda}-\frac{g_1}{\lambda^2}+\frac{R_\lambda^0g_2}{\lambda^2},$$

и (36) следует из представления слагаемых в (34) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в λ_n.

Лемма 17. *Ряды в (36) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся по $x\in[0,1]$ и $t\in(-\infty,+\infty)$.*

Доказательство. Согласно неравенствам Коши-Буняковского и Бесселя, ряды $\sum\frac{|(g,y_n)|}{\|y_n\|\cdot|\lambda_n|}$ и $\sum\frac{|(g,y_n^0)|}{\|y_n^0\|\cdot|\lambda_n^0|}$ сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (36). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n)y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n}-\frac{(g,y_n^0)y_n^0(x)e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}\right] \quad (37)$$

Используя оценки из лемм 13, 14, 15 имеем

$$\frac{(g,y_n)y_n(x)e^{\lambda_n\beta it}}{\|y_n\|^2\lambda_n}= \\ =\frac{(g,y_n)(y_n^0(x))'e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}+(g,y_n)O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по x ряда (37), имеет следующее представление

$$\sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(g,y_n-y_n^0)(y_n^0(x))'e^{\lambda_n^0\beta it}}{\|y_n^0\|^2\lambda_n^0}+(g,y_n)O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (38)$$

Приемами, аналогичными [8, с. 71] для разности $y_n-y_n^0$ можно получить уточненные оценки, согласно которым $(g,y_n-y_n^0)=\alpha_n/n+O(1/n^2)$, где $\sum\alpha_n^2<\infty$. Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (38). Для второго слагаемого в (38) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (37) почленным дифференцированием по t. Для второго слагаемого в (36) утверждение леммы очевидно.

Используя результаты п.1, имеем

Лемма 18. *Функция* $f_0(x)$, *полученная периодическим с периодом 1 продолжением функции*

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}\left[i\phi(x) + \phi(1-x)\right], \quad x \in [0,1],$$

где $p(x) = h_2(x)e^{iax}$, *непрерывно дифференцируема на* $(-\infty, +\infty)$.

Лемма 19. *Имеет место формула:*

$$u_3(x,t) = \\ = e^{a\beta it}[p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \quad (39)$$

где $f_0(x)$ *из леммы 18.*

Теорема 3. *Если* $q(x)$ *вещественна,* $q(x) \in C^1[0,1]$, $\phi(x) \in C^1[0,1]$, $\phi(0) = \phi'(1) = 0$, *то классическое решение задачи (1)—(2) существует и имеет вид:*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \quad (40)$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ *определены по формулам (33), (34), а* $u_3(x,t)$ *по формуле (39).*

Доказательство. В силу лемм 17 и 18 $u(x,t)$ дифференцируема по обеим переменным. Обозначим через Du следующее дифференциальное выражение

$$Du = \frac{1}{\beta i}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left.\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x}.$$

Так как

$$\left.\frac{\partial R_\lambda \phi}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\big|_{\xi=1-x} + q(x) - \lambda\right)R_\lambda\phi - \\ -(q(x)-\lambda)R_\lambda\phi = \phi - (q(x)-\lambda)R_\lambda\phi,$$

$$\frac{\partial R^0_\lambda \phi}{\partial \xi}\big|_{\xi=1-x} = \phi - (q_1(x)-\lambda)R^0_\lambda\phi,$$

то

$$Du_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(q(x)R_\lambda\phi - q_1(x)R^0_\lambda\phi\right)e^{\lambda\beta it}d\lambda. \quad (41)$$

Далее

$$\left.\frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=1-x} = \\ = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\phi,y_n)}{\|y_n\|^2}y'_n(1-x)e^{\lambda_n\beta it} - \frac{(\phi,y^0_n)}{\|y^0_n\|^2}y'^0_n(1-x)e^{\lambda^0_n\beta it}\right] = \\ = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\phi,y_n)}{\|y_n\|^2}\left[-q(x)y_n(x) + \lambda_n y_n(x)\right]e^{\lambda_n\beta it} - \right. \\ \left. - \frac{(\phi,y^0_n)}{\|y^0_n\|^2}\left[-q_1(x)y^0_n(x) + \lambda^0_n y^0_n(x)\right]e^{\lambda^0_n\beta it}\right].$$

Поэтому

$$Du_2(x,t) = q(x)\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(\phi,y_n)}{\|y_n\|^2}y_n(x)e^{\lambda_n\beta it} - \\ -q_1(x)\sum_{|\lambda^0_n|>r}\frac{(\phi,y^0_n)}{\|y^0_n\|^2}y^0_n(x)e^{\lambda^0_n\beta it}. \quad (42)$$

Учитывая (32) и (35), получим из (41) и (42)

$$D(u_1(x,t) + u_2(x,t)) = q(x)u(x,t) - q_1(x)u_3(x,t). \quad (43)$$

Наконец, согласно теореме 1,

$$Du_3(x,t) = q_1(x)u_3(x,t), \quad (44)$$

$$u_3(x,0) = \phi(x), \quad u_3(0,t) = 0. \quad (45)$$

Из (43) и (44) следует, что $u(x,t)$, представленная формулой (40), удовлетворяет уравнению (1). Далее, из очевидных равенств

$$u_1(x,0) + u_2(x,0) = \phi(x) - \phi(x) = 0, \\ u_1(0,t) = 0, \quad u_2(0,t) = 0,$$

и из (45) следvет, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом/ А.А. Андреев // Труды 2-го межд. семинара “Диффер. уравнения и их приложения”. – Самара, 1998. – С. 5-18.

2. *Бурлуцкая М.Ш.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // Докл. РАН. – 2007. – Т. 414. № 4. – С. 443-446.

3. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных/ В.А. Чернятин. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 112 с.

4. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах/ А.Н. Крылов. – ГИТТЛ. Л, 1950. – 368 с.

5. *Бурлуцкая М.Ш.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл/ М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Диффер. уравн. – 2007.– Т. 43, № 12. – С. 1597-1605.

6. *Раппопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений/ И.М. Раппопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 258 с.

7. *Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования / А.

П. Хромов // Инф. бюллетень журнала “Интегр. преобразования и специал. функции”. – М.: 2006. – Т. 6, 1. – С. 46–55.

8. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения/ В.А. Марченко. – Киев: Наукова Думка, 1977 – 392 с.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета
Тел.: (4732) 424-420
E-mail: bmsh2001@mail.ru

Хромов Август Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Саратовского госуниверситета
Тел.: (8452) 666-066
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Burlutskaya Maria Shaukatovna — candidate of science, senior lecturer, chair of mathematical analysis, Voronezh State University
Tel.: (4732) 424-420,
E-mail: bmsh2001@mail.ru

Khromov August Petrovich — doctor of science, professor, head of a chair of differential equations, Saratov State University
Tel.: (8452) 666-066
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru