УДК 517.972

# МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ

**Т. В. Беседина, В. Г. Задорожний**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 26.03.2010 г.

**Аннотация.** Находятся математическое ожидание, вторая моментная и дисперсионная функции решения начальной задачи для трехмерного уравнения переноса и диффузии. Полученные формулы могут использоваться, если известны характеристические функционалы случайных процессов.
**Ключевые слова:** уравнение диффузии, случайный процесс, моментные функции, вариационная производная.

**Abstract.** Mathematical expectation, second moment function and variance function for solution of transfer and diffusion equation are found. Received formulas can be used if characteristic functionals of random processes are known.
**Key words:** Diffusion equation, random processes, moment function, variational derivative.

В данной работе рассматривается начальная задача для уравнения переноса и диффузии вещества

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\langle \varepsilon(t), \nabla u \right\rangle + \mu(t)\Delta u + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \qquad (2)$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset \mathbb{R}$ — время, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ — пространственные координаты, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $\Delta$ — оператор Лапласа по $x$, $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $u : T \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — концентрация вещества, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) : T \to \mathbb{R}^3$ — вектор скорости переноса, $\mu : T \to \mathbb{R}$ — коэффициент диффузии, $f : T \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — плотность источников диффундирующего вещества, $u_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — концентрация вещества в начальный момент времени.

Состояние окружающей среды может меняться случайным образом, поэтому параметры протекающих процессов, находящихся под воздействием среды, будут также носить случайных характер. По этой причине скорость переноса, коэффициент диффузии, плотность источников примеси, концентрацию примеси в начальный момент времени будем рассматривать как случайные процессы. В этом случае концентрация примеси, т.е. решение задачи (1), (2), так же является случайным процессом. На практике во многих случаях для характеристики случайных процессов достаточно знать лишь его числовые характеристики — моментные функции. В работе находятся математическое ожидание, вторая моментная и дисперсионная функции решения задачи (1), (2).

Предполагается, что случайное поле $u_0$ не зависит от случайных процессов $\varepsilon$, $\mu$, $f$, и процессы $\varepsilon$, $\mu$, $f$ заданы характеристическим функционалом

$$\varphi(v, p, w) = \mathbf{M} e(v, p, w),$$

где

$$e(v,p,w) = \exp(i\int_T [\left\langle \varepsilon(s), v(s) \right\rangle +$$
$$+\mu(s)p(s)]ds + i\int_T \int_{\mathbb{R}^3} f(s,q)w(s,q)dqds),$$

$\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon$, $\mu$ и $f$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in L_1^3(T)$, $p \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^3)$, $L_1(T)$ и $L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ — пространство суммируемых, соответственно, на отрезке $T$ и на множестве $T \times \mathbb{R}^3$ функций.

## ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\tau \in T$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Введем отображения

$$\mathcal{M}(t,x,v,p,w) = \mathbf{M}(u(t,x)e(v,p,w)),$$
$$\mathcal{D}(t,x,\tau,y,v,p,w) = \mathbf{M}(u(t,x)u(\tau,y)e(v,p,w)),$$

где $u(t,x)$ — решение задачи (1), (2), $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов $\varepsilon$, $\mu$, $f$ и $u_0$.

Отметим, что

$$\mathcal{M}(t,x,0,0,0) = \mathbf{M}(u(t,x)),$$
$$\mathcal{D}(t,x,\tau,y,0,0,0) = \mathbf{M}(u(t,x)u(\tau,y)),$$

таким образом, для нахождения математического ожидания и второй моментной функции решения задачи (1), (2) достаточно знать отображения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$ в окрестности нуля переменных $v,p,w$.

Умножив (1), (2) в первом случае на $e(v,p,w)$, во втором на $u(\tau,y)e(v,p,w)$ и усреднив по функции распределения случайных процессов $\varepsilon$, $\mu$, $f$ и $u_0$, используя свойства вариационной производной [1] и независимость $u_0$ от $\varepsilon$, $\mu$, $f$, получим детерминированные задачи для $\mathcal{M}$

$$\frac{\partial \mathcal{M}(t,x,v,p,w)}{\partial t} = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial \mathcal{M}(t,x,v,p,w)}{\partial x_k} - -i\frac{\delta}{\delta p(t)}\Delta\mathcal{M}(t,x,v,p,w) - i\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(t,x)}, \tag{3}$$

$$\mathcal{M}(t_0,x,v,p,w) = M(u_0(x))\varphi(v,p,w), \tag{4}$$

и для $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(t,x,\tau,y,v,p,w)}{\partial t} = = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial \mathcal{D}(t,x,\tau,y,v,p,w)}{\partial x_k} - \tag{5}$$
$$-i\frac{\delta}{\delta p(t)}\Delta\mathcal{D}(t,x,\tau,y,v,p,w) - i\frac{\delta\mathcal{M}(\tau,y,v,p,w)}{\delta w(t,x)},$$

$$\mathcal{D}(t_0,x,\tau,y,v,p,w) = \mathbf{M}(u_0(x)u(\tau,y)e(v,p,w)). \tag{6}$$

**Определение 1.** *Математическим ожиданием* решения задачи (1), (2) называется $\mathcal{M}(t,x,0,0,0)$, где $\mathcal{M}$ — решение задачи (3), (4) в некоторой окрестности (0,0,0) переменных $v,p,w$. Если $\mathcal{M}$ является решением задачи (3), (4) в смысле обобщенных функций, то $\mathcal{M}(t,x,0,0,0)$ называется *обобщенным математическим ожиданием.*

**Определение 2.** *Второй моментной функцией* решения задачи (1), (2) называется $\mathcal{D}(t,x,\tau,y,0,0,0)$, где $\mathcal{D}$ — симметричное по переменным $(t,x)$ и $(\tau,y)$ решение задачи (5), (6) в некоторой окрестности (0,0,0) переменных $v,p,w$. Если $\mathcal{D}$ является решением задачи (5), (6) в смысле обобщенных функций, то $\mathcal{D}(t,x,\tau,y,0,0,0)$ называется *обобщенной второй моментной функцией.*

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОБЫЧНЫМИ И ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Задачи (3), (4) и (5), (6) — частные случаи задачи Коши для дифференциального уравнения третьего порядка с обычными и вариационными производными вида

$$\frac{\partial z(t,x,v,p)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3}a_k(t)\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial}{\partial x_k}z(t,x,v,p) + +b(t)\frac{\delta}{\delta p(t)}\Delta z(t,x,v,p) + g(t,x,v,p), \tag{7}$$

$$z(t_0,x,v,p) = z_0(x,v,p), \tag{8}$$

где $t\in T$, $x\in\mathbb{R}^3$, $v\in L_1^3(T)$, $p\in L_1(T)$; $z: T\times\mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C}$ — искомая функция; $a=(a_1,a_2,a_3)$, $a_k: T\to\mathbb{C}$, $k=1,2,3$, $b: T\to\mathbb{C}$, $g: T\times\mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C}$, $z_0: \mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C}$ — заданные отображения.

Решение задачи (7), (8) получено в [2].

Пусть $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$. Введем обозначения $\left|\xi\right|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$, $\xi\times a=(\xi_1a_1,\xi_2a_2,\xi_3a_3)$ и

$$\chi(t_1,t_2,s)=\begin{cases}\operatorname{sign}(s-t_1), & \text{если } s \text{ принадлежит отрезку с концами } t_1,t_2;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $F_x[f](\xi)$ обозначает преобразование Фурье по переменному $x$ [3], $F_\xi^{-1}[f](x)$ — обратное преобразование Фурье по переменному $\xi$, знак $*_x$ — свертку по переменному $x$.

**Теорема 1.** Пусть $a$ и $b$ — непрерывные на $T$ функции, существует окрестность $U$ нуля в $L_1^3(T)\times L_1(T)$ такая, что при всех $(v,p)\in U$ существуют измеримые по $s,t$ на $T\times T$ и непрерывные соответственно по $v_k$ и $p$ при $s,t\in T$ вариационные производные

$$\frac{\delta g(s,x,v-i\xi\times a(t)\chi(s,t,\cdot),p-\left|\xi\right|^2 b(t)\chi(s,t,\cdot))}{\delta v_k(t)},$$
$$k=1,2,3,$$
$$\frac{\delta g(s,x,v-i\xi\times a(t)\chi(s,t,\cdot),p-\left|\xi\right|^2 b(t)\chi(s,t,\cdot))}{\delta p(t)},$$

$g$ суммируемо на $T$ по первой переменной, существуют непрерывные, соответственно, по $v_k$ и $p$ при $t \in T$ вариационные производные

$$\frac{\delta z_0(x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_k(t)},$$
$$k = 1, 2, 3,$$
$$\frac{\delta z_0(x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta p(t)},$$

функции

$$|z_0|, \left|\frac{\partial z_0}{\partial t}\right|, \left|\frac{\delta z_0}{\delta v_k(t)}\right|, \left|\frac{\delta z_0}{\delta p(t)}\right|, |\xi_k F_x[z_0](\xi)|, \left||\xi|^2 F_x[z_0](\xi)\right|,$$
$$\left|F_x\left[\frac{\partial z_0}{\partial t}\right](\xi)\right|, \left|\xi_k F_x\left[\frac{\delta z_0}{\delta v_k(t)}\right](\xi)\right|, \left||\xi|^2 F_x\left[\frac{\delta z_0}{\delta p(t)}\right](\xi)\right|,$$
$$|g|, \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|, \left|\frac{\delta g}{\delta v_k(t)}\right|, \left|\frac{\delta g}{\delta p(t)}\right|, |\xi_k F_x[g](\xi)|, \left||\xi|^2 F_x[g](\xi)\right|,$$
$$\left|F_x\left[\frac{\partial g}{\partial t}\right](\xi)\right|, \left|\xi_k F_x\left[\frac{\delta g}{\delta v_k(t)}\right](\xi)\right|, \left||\xi|^2 F_x\left[\frac{\delta g}{\delta p(t)}\right](\xi)\right|,$$
$$k = 1, 2, 3$$

ограничены при $s, t \in T$ суммируемыми на $\mathbb{R}^3$ функциями, тогда

$$\begin{gathered} z(t, x, v, p) = F_\xi^{-1}[F_x[z_0(x, v - \\ -i\xi \times a(t)\chi(t_0, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0, t, \cdot))](\xi)](x) + \\ +\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x[g(s, x, v - i\xi \times \right. \\ \left. \times a(t)\chi(s, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(s, t, \cdot))](\xi)\right](x)ds \end{gathered} \tag{9}$$

является решением задачи (7), (8).

В формулировке теоремы у отображений $g$ и $z_0$ опущены обозначения аргументов, соответственно $s, x, v - i\xi \times a(t)\chi(s, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(s, t, \cdot)$ у $g$ и $x, v - i\xi \times a(t)\chi(t_0, t, \cdot), p - |\xi|^2 b(t)\chi(t_0, t, \cdot)$ у $z_0$.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

При выполнении условий теоремы 1 отображение $\mathcal{M}$ находится по формуле (9), где $a_k(t) = -i, \quad k = 1, 2, 3, \quad b(t) = -i, \quad g(t, x, v, p) = -i\dfrac{\delta\varphi(v, p, w)}{\delta w(t, x)}$, $z_0 = \mathbf{M}(u_0(x))\varphi(v, p, w)$. Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$\begin{gathered} \mathcal{M}(t, x, v, p, w) = \mathbf{M}(u_0(x)) *_x F_\xi^{-1}[\varphi(v - \\ -\xi\chi(t_0, t, \cdot), p + i|\xi|^2 \chi(t_0, t, \cdot), w)](x) - \\ -i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta w(s, x)}\varphi(v - \right.\right. \\ \left.\left. -\xi\chi(s, t, \cdot), p + i|\xi|^2 \chi(s, t, \cdot), w)\right](\xi)\right](x)ds. \end{gathered} \tag{10}$$

Для нахождения математического ожидания положим $v = 0$, $p = 0$ и $w = 0$. Приведем точную формулировку получаемого результата.

В формулировке теоремы вновь опустим обозначения аргументов: $-\xi\chi(t_0, t, \cdot), i|\xi|^2 \chi(t_0, t, \cdot), 0$ у $\varphi$, если же речь идет о вариационной производной $\varphi$ по $w(s, x)$, то $-\xi\chi(s, t, \cdot), i|\xi|^2 \chi(s, t, \cdot), 0$.

**Теорема 2.** Пусть функция $\mathbf{M}(u_0(x))$ суммируема на $\mathbb{R}^3$, существует окрестность $U$ нуля в $L_1^3(T) \times L_1(T) \times L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ такая, что при всех $(v, p, w) \in U$ существуют измеримые по $s, t$ на $T \times T$ и непрерывные, соответственно, по $v_k$ и $p$ при $s, t \in T$ вариационные производные

$$\frac{\delta^2\varphi(-\xi\chi(s, t, \cdot), i\,|\,\xi\,|^2\, \chi(s, t, \cdot), 0)}{\delta v_k(t)\delta w(s, x)}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\delta^2\varphi(-\xi\chi(s, t, \cdot), i\,|\,\xi\,|^2\, \chi(s, t, \cdot), 0)}{\delta p(t)\delta w(s, x)},$$ причем $\dfrac{\delta\varphi(v, p, w)}{\delta w(s, x)}$ суммируемо по $s$, существуют непрерывные, соответственно, по $v_k$ и $p$ при $t \in T$ вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(-\xi\chi(t_0, t, \cdot), i|\xi|^2 \chi(t_0, t, \cdot), 0)}{\delta v_k(t)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\delta\varphi(-\xi\chi(t_0, t, \cdot), i|\xi|^2 \chi(t_0, t, \cdot), 0)}{\delta p(t)},$$

функции

$$\left|F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\varphi\right|, \left|F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|,$$
$$\left|\frac{\delta\varphi}{\delta w(s, x)}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\varphi}{\delta w(s, x)}\right|, \left|\frac{\delta^2\varphi}{\delta v_k(t)\delta w(s, x)}\right|,$$
$$\left|\frac{\delta^2\varphi}{\delta p(t)\delta w(s, x)}\right|,$$
$$\left|F_x\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\varphi}{\delta w(s, x)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_k F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\varphi\right|,$$

$$\left|\left|\xi\right|^2 F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\varphi\right|, \left|\xi_k F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\frac{\delta\varphi}{\delta v_k(t)}\right|,$$
$$\left|\left|\xi\right|^2 F_x[\mathbf{M}(u_0(x))](\xi)\frac{\delta\varphi}{\delta p(t)}\right|,$$
$$\left|\xi_k F_x\left[\frac{\delta\varphi}{\delta w(s,x)}\right](\xi)\right|, \left|\xi_k F_x\left[\frac{\delta^2\varphi}{\delta v_k(t)\delta w(s,x)}\right](\xi)\right|,$$
$$\left|\left|\xi\right|^2 F_x\left[\frac{\delta\varphi}{\delta w(s,x)}\right](\xi)\right|, \left|\left|\xi\right|^2 F_x\left[\frac{\delta^2\varphi}{\delta p(t)\delta w(s,x)}\right](\xi)\right|$$

ограничены при $s,t \in T$ суммируемыми на $\mathbb{R}^3$ функциями, тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{M}(u(t,x)) = \mathbf{M}(u_0(x)) *_x \\ *_x F_\xi^{-1}[\varphi(-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot), 0)](x) - \\ -i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta w(s,x)} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times\varphi(-\xi\chi(s,t,\cdot), i\left|\xi\right|^2 \chi(s,t,\cdot), 0)\right](\xi)\right](x)ds\end{gathered} \quad (11)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

## ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ

Прежде чем решать задачу (5), (6), определим выражение, стоящее в правой части (6). Для этого выпишем задачу (5), (6) при $\tau = t_0$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathcal{D}(t,x,t_0,y,v,p,w)}{\partial t} = \\ = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial\mathcal{D}(t,x,t_0,y,v,p,w)}{\partial x_k} - \\ -i\frac{\delta}{\delta p(t)}\Delta\mathcal{D}(t,x,t_0,y,v,p,w) - i\frac{\delta\mathcal{M}(t_0,y,v,p,w)}{\delta w(t,x)},\end{gathered} \quad (12)$$

$$\mathcal{D}(t_0,x,t_0,y,v,p,w) = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)e(v,p,w)). \quad (13)$$

Задача (12), (13) имеет вид (7), (8), $a_k(t) = -i, k = 1,2,3,\ b(t) = -i$,

$$\begin{gathered}g(t,x,v,p) = -i\frac{\delta\mathcal{M}(t_0,y,v,p,w)}{\delta w(t,x)} = \\ = -i\frac{\delta\mathbf{M}(u(t_0,y)e(v,p,w))}{\delta w(t,x)} = \\ = -i\frac{\delta(\mathbf{M}(u_0(y))\varphi(v,p,w))}{\delta w(t,x)} = \\ = -i\mathbf{M}(u_0(y))\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(t,x)}, \\ z_0(x,v,p) = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)e(v,p,w)) = \\ = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))\varphi(v,p,w),\end{gathered}$$

и при выполнении условий теоремы 1, получаем решение

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(t,x,t_0,y,v,p,w) = \\ = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_x F_\eta^{-1}[\varphi(v - \eta\chi(t_0,t,\cdot), p + \\ +i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot), w)](x) - i\mathbf{M}(u_0(y)) \times \\ \times\int_{t_0}^{t} F_\eta^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta w(s,x)} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times\varphi(v - \eta\chi(s,t,\cdot), p + i\left|\eta\right|^2 \chi(s,t,\cdot), w)\right](\eta)\right](x)ds.\end{gathered}$$

Так как отображение $\mathcal{D}$ симметрично по переменным $t,x$ и $\tau,y$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(t_0,x,\tau,y,v,p,w) = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_y \\ *_y F_\eta^{-1}[\varphi(v - \eta\chi(t_0,\tau,\cdot), p + \\ +i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,\tau,\cdot), w)](y) - \\ -i\mathbf{M}(u_0(x))\int_{t_0}^{\tau} F_\eta^{-1}\left[F_y\left[\frac{\delta}{\delta w(s,y)}\varphi(v - \right.\right. \\ \left.\left. - \eta\chi(s,\tau,\cdot), p + i\left|\eta\right|^2 \chi(s,\tau,\cdot), w\right](\eta)\right](y)ds.\end{gathered} \quad (14)$$

Условие (6) приняло вид (14).

По теореме 1 решение задачи (5), (14) находится по формуле

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(t,x,\tau,y,v,p,w) = F_\xi^{-1}[F_x[\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_y \\ *_y F_\eta^{-1}[\varphi(v - \eta\chi(t_0,\tau,\cdot) - \\ -\xi\chi(t_0,t,\cdot), p + i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,\tau,\cdot) + \\ +i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot), w)](y) - \\ -i\mathbf{M}(u_0(x))\int_{t_0}^{\tau} F_\eta^{-1}[F_y\frac{\delta}{\delta w(s,y)}\varphi(v - \\ -\eta\chi(s,\tau,\cdot) - \xi\chi(t_0,t,\cdot), p + i\left|\eta\right|^2 \chi(s,\tau,\cdot) + \\ +i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot), w)](\eta)](y)ds](\xi)](x) - \\ -i\int_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left[F_x\left[\frac{\delta}{\delta w(t,x)} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times\mathcal{M}(\tau,y,v - \xi\chi(s,t,\cdot), p + i\left|\xi\right|^2 \chi(s,t,\cdot), w)\right](\xi)\right](x)ds.\end{gathered} \quad (15)$$

Применение дважды теоремы 1 при нахождении второй моментной функции и вид начальных условий и неоднородности приводят к громоздким условиям, поэтому перейдем от рассмотрения моментных функций в классическом смысле к обобщенным моментным функциям, что позволяет ослабить накладываемые условия.

Так как имеет место (10), то

$$\frac{\delta\mathcal{M}(\tau,y,v,p,w)}{\delta w(t,x)} = \mathbf{M}(u_0(y)) *_y F_\eta^{-1}[\frac{\delta}{\delta w(t,x)} \times$$
$$\times\varphi(v-\eta\chi(t_0,\tau,\cdot), p+i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,\tau,\cdot), w)](y) -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau} F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta^2}{\delta w(t,x)\delta w(s,y)} \times$$
$$\times\varphi(v-\eta\chi(s,\tau,\cdot), p+i\left|\eta\right|^2 \chi(s,\tau,\cdot), w)](\eta)](y)ds.$$

Подставляя последнее в (15) и положив $v=0$, $p=0$ и $w=0$, получим вторую моментную функцию. Нами доказана

**Теорема 3.** Пусть функция $\mathbf{M}(u_0(x))$ суммируема на $\mathbb{R}^3$, функция $\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))$ суммируема на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, существует окрестность $U$ нуля в $L_1^3(T)\times L_1(T)\times L_1(T\times\mathbb{R}^3)$ такая, что существуют непрерывные по $v_k$ вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)},\ \frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)\delta w(s,x)},$$
$$\frac{\delta^3\varphi}{\delta v_k(t)\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)},\ k=1,2,3,$$

непрерывные по $p$ вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)},\ \frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)\delta w(s,x)},$$
$$\frac{\delta^3\varphi}{\delta p(t)\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)},$$

тогда

$$\mathbf{M}(u(t,x)u(\tau,y)) = \mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_{xy}$$
$$*_{xy} F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\varphi(-\eta\chi(t_0,\tau,\cdot)-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \times$$
$$\times\chi(t_0,\tau,\cdot)+i\,|\,\xi\,|^2\ \chi(t_0,t,\cdot),0)](y)](x) -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{M}(u_0(x)) *_x F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta}{\delta w(s,y)}\varphi(-\eta\chi(s,\tau,\cdot)-$$
$$-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(s,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot),0)](\eta)](y)](x)ds -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}(u_0(y)) *_y$$
$$*_y F_\eta^{-1}[F_\xi^{-1}[F_x[\frac{\delta}{\delta w(s,x)}\varphi(-\eta\chi(t_0,\tau,\cdot)-$$
$$-\xi\chi(s,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2 \chi(s,t,\cdot),0)](\xi)](x)](y)ds -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta^2}{\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)} \times$$
$$\times\varphi(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot)-\xi\chi(s,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(s_1,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2 \chi(s,t,\cdot),0)](\eta)](y)](\xi)](x)ds_1ds \quad (16)$$

является обобщенной второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

## ДИСПЕРСИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Зная математическое ожидание и вторую моментную функцию можно найти дисперсионную функцию решения задачи (1), (2)

$$D(u(t,x)) = \mathbf{M}((u(t,x))^2) - (\mathbf{M}(u(t,x)))^2.$$

По теореме 3, учитывая симметричность (16) по переменным $t$, $x$ и $\tau$, $y$, получаем

$$\mathbf{M}((u(t,x))^2) = (\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_{xy}$$
$$*_{xy} F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\varphi(-\eta\chi(t_0,\tau,\cdot)-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \times$$
$$\times\chi(t_0,\tau,\cdot)+i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot),0)](y)](x) -$$
$$-2i\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{M}(u_0(x)) *_x F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta}{\delta w(s,y)} \times$$
$$\times\varphi(-\eta\chi(s,\tau,\cdot)-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(s,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2 \chi(t_0,t,\cdot),0)](\eta)](y)](x)ds -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta^2}{\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)} \times$$
$$\times\varphi(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot)-\xi\chi(s,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(s_1,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2 \chi(s,t,\cdot),0)](\eta)](y)](\xi)](x)ds_1ds)\,\big|_{\tau=t,y=x}.$$

Для нахождения $(\mathbf{M}(u(t,x)))^2$ воспользуемся результатом теоремы 2.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда

$$D(u(t,x)) = (\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y)) *_{xy}$$
$$*_{xy} F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\varphi(-\eta\chi(t_0,\tau,\cdot)-$$
$$-\xi\chi(t_0,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2 \chi(t_0,\tau,\cdot)+$$
$$+i\,|\,\xi\,|^2\ \chi(t_0,t,\cdot),0)](y)](x) -$$
$$-2i\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{M}(u_0(x)) *_x$$

$$*_x F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta}{\delta w(s,y)}\varphi(-\eta\chi(s,\tau,\cdot)-$$
$$-\xi\chi(t_0,t,\cdot),i\left|\eta\right|^2\chi(s,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2\chi(t_0,t,\cdot),0)](\eta)](y)](x)ds-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta^2}{\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)}\times$$
$$\times\varphi(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot)-\xi\chi(s,t,\cdot),i\left|\eta\right|^2\chi(s_1,\tau,\cdot)+$$
$$+i\left|\xi\right|^2\chi(s,t,\cdot),0)](\eta)](y)](\xi)](x)ds_1ds)\,|_{\tau=t,y=x}-$$
$$-(M(u_0(x))*_x$$
$$*_x F_\xi^{-1}[\varphi(-\xi\chi(t_0,t,\cdot),i\left|\xi\right|^2\chi(t_0,t,\cdot),0)](x)-$$
$$-i\int_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}[F_x[\frac{\delta}{\delta w(s,x)}\times$$
$$\times\varphi(-\xi\chi(s,t,\cdot),i\left|\xi\right|^2\chi(s,t,\cdot),0)(\xi)](x)ds)^2 \qquad (17)$$

является обобщенной дисперсионной функцией решения задачи (1), (2).

## СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ПРОЦЕССА $f$ ОТ ПРОЦЕССОВ $\varepsilon$, $\mu$

Заметим, что для нахождения моментных функций решения задачи (1), (2) требуется знать моментные функции $u_0$: математическое ожидание $u_0$ для нахождения математического ожидания и, кроме того, вторую моментную функцию $u_0$ для нахождения второй моментной и дисперсионной функций. Оказывается, тоже верно и для $f$, если $f$ не зависит от случайных процессов $\varepsilon$ и $\mu$. Покажем это.

Пусть даны характеристические функционалы $\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)$ процессов $\varepsilon(t)$ и $\mu(t)$ и $\varphi_f(w)$ процесса $f(t,x)$. Так как характеристический функционал независимых процессов равен произведению характеристических функционалов, то $\varphi(v,p,w)=\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)\varphi_f(w)$.

$$\varphi_f(w)=\mathbf{M}exp(i\int_T\int_{\mathbb{R}^3}f(s,q)w(s,q)dqds),$$

тогда

$$\varphi(v,p,0)=\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)\mathbf{M}exp(0)=\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p),$$
$$\frac{\delta\varphi_f(w)}{\delta w(t,x)}\,|_{w=0}=i\mathbf{M}(f(t,x)\times$$
$$\times exp(i\int_T\int_{\mathbb{R}^3}f(s,q)w(s,q)dqds))\,|_{w=0}=i\mathbf{M}(f(t,x)).$$
$$\frac{\delta^2\varphi_f(w)}{\delta w(t,x)\delta w(s,y)}\,|_{w=0}=-\mathbf{M}(f(t,x)f(s,y)\times$$
$$\times exp(i\int_T\int_{\mathbb{R}^3}f(s,q)w(s,q)dqds))\,|_{w=0}=$$
$$=-\mathbf{M}(f(t,x)f(s,y)).$$
$$F_\xi^{-1}[F_x[\frac{\delta\varphi(v,p,0)}{\delta w(t,x)}](\xi)](x)=$$
$$=F_\xi^{-1}[F_x[\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)i\mathbf{M}(f(s,x))](\xi)](x)=$$
$$=iF_\xi^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)F_x[\mathbf{M}(f(s,x))](\xi)](x)=$$
$$=iF_\xi^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)](x)*_x\mathbf{M}(f(s,x)).$$
$$F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[\frac{\delta^2\varphi(v,p,0)}{\delta w(t,x)\delta w(s,y)}](\eta)](y)](\xi)](x)=$$
$$=F_\xi^{-1}[F_x[F_\eta^{-1}[F_y[-\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)\times$$
$$\times\mathbf{M}(f(t,x)f(s,y))](\eta)](y)](\xi)](x)=$$
$$=-F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)](y)](x)*_{xy}\mathbf{M}(f(t,x)f(s,y)).$$

Тем самым, для нахождения моментных функций решения задачи (1), (2) достаточно знать не характеристический функционал $f$, а моментные функции $f$.

Подставив, полученное выше, в (11), (16), (17), приходим к следующим результатам.

**Теорема 5.** Если случайный процесс $f$ не зависит от $\varepsilon$, $\mu$, функция $M(u_0(x))$ суммируема на $\mathbb{R}^3$, $M(f(t,x))$ суммируема на $T\times\mathbb{R}^3$, существует окрестность $U$ нуля в $L_1^3(T)\times L_1(T)\times L_1(T\times\mathbb{R}^3)$ такая, что существуют непрерывные по $v_k$ вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)},\ \frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)\delta w(s,x)},\ k=1,2,3$$

и непрерывные по $p$ вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)},\ \frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)\delta w(s,x)},$$

тогда

$$\mathbf{M}(u(t,x))=\mathbf{M}(u_0(x))*_x\mathcal{F}_1(t_0,t,x)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\mathcal{F}_1(s,t,x)*_x\mathbf{M}(f(s,x))ds \qquad (18)$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (2), где

$$\mathcal{F}_1(s,t,x)=$$
$$=F_\xi^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(-\xi\chi(s,t,\cdot),i\left|\xi\right|^2\chi(s,t,\cdot))](x). \qquad (19)$$

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия теоремы 5, кроме того функция $\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))$ суммируема на $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, существует окрестность $U_1\subseteq U$ такая, что существуют непрерывные по $v_k$ вариационные производные

$$\frac{\delta^3\varphi}{\delta v_k(t)\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)},\ k=1,2,3$$

и непрерывная по $p$ вариационная производная

$$\frac{\delta^3\varphi}{\delta p(t)\delta w(s,x)\delta w(s_1,y)},$$

тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{M}(u(t,x)u(\tau,y))=\\ =\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))*_{xy}\mathcal{F}_2(x,y,t_0,\tau,t_0,t)+\\ +\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{M}(u_0(x))*_x\mathcal{F}_2(x,y,s,\tau,t_0,t)*_y\mathbf{M}(f(s,y))ds+\\ +\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}(u_0(y))*_y\mathcal{F}_2(x,y,t_0,\tau,s,t)*_x\mathbf{M}(f(s,x))ds-\\ -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t)*_{xy}\mathbf{M}(f(s,x)f(s_1,y))ds_1ds\end{gathered}\tag{20}$$

является второй обобщенной моментной функцией решения задачи (1), (2), где

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t)=\\ =F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot)-\\ -\xi\chi(s,t,\cdot),i\left|\eta\right|^2\chi(s_1,\tau,\cdot)+\\ +i\left|\xi\right|^2\chi(s,t,\cdot))](y)](x).\end{gathered}\tag{21}$$

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия теоремы 6, тогда

$$\begin{gathered}D(u(t,x))=(\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))*_{xy}\mathcal{F}_2(x,y,t_0,\tau,t_0,t)+\\ +2\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{M}(u_0(x))*_x\mathcal{F}_2(x,y,s,\tau,t_0,t)*_y\mathbf{M}(f(s,y))ds+\\ -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t)*_{xy}\mathbf{M}(f(s,x)f(s_1,y))ds_1ds)\,|_{\tau=t,y=x}-\\ -(\mathbf{M}(u_0(x))*_x\mathcal{F}_1(t_0,t,x)+\int_{t_0}^{t}\mathcal{F}_1(s,t,x)*_x\mathbf{M}(f(s,x))ds)^2\end{gathered}$$

является обобщенной дисперсионной функцией решения задачи (1), (2).

## ПРИМЕР

Пусть случайные процессы $\varepsilon_k(t)$, $k=1,2,3$, $\mu(t)$, $f(t,x)$ независимы. Компоненты $\varepsilon(t)$ распределены по номальному закону распределения, $\mu(t)$ имеет равномерное распределение, их характеристические функционалы имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi_{\varepsilon_k}(v_k)=\exp(i\int_T\mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)v_k(s_1)ds_1-\\ -\frac{1}{2}\int_T\int_T b_k(s_1,s_2)v_k(s_1)v_k(s_2)ds_1ds_2),\end{gathered}$$

где $b_k(s_1,s_2)$ — ковариационная функция процесса $\varepsilon_k(t)$, $k=1,2,3$,

$$\varphi_\mu(p)=\frac{\sin\int_T a(s_1)p(s_1)ds_1}{\int_T a(s_1)p(s_1)ds_1}\exp(i\int_T\mathbf{M}\mu(s_1)p(s_1)ds_1).$$

$\mathbf{M}(f(t,x))$, $\mathbf{M}(u_0(x))$, $\mathbf{M}(f(t,x)f(s,y))$, $\mathbf{M}(u_0(x)u_0(y))$ заданы.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}M_k(s,t)=\int_s^t\mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)ds_1,B_k(s_1,\tau,s,t)=\\ =\int_{s_1}^{\tau}\int_s^t b_k(s_1,s_2)ds_1ds_2,\\ M_\mu(s,t)=\int_s^t\mathbf{M}\mu(s_1)ds_1,\ A(s,t)=\int_s^t a(s_1)ds_1,\\ G_k^-(s,t)=\frac{1}{2}B_k(s,t,s,t)+M_\mu(s,t)-A(s,t),\\ G_k^+(s,t)=\frac{1}{2}B_k(s,t,s,t)+M_\mu(s,t)+A(s,t),\\ H_k^-(s_1,\tau,s,t)=4G_k^-(s_1,\tau)G_k^-(s,t)-B_k(s_1,\tau,s,t),\\ H_k^+(s_1,\tau,s,t)=4G_k^+(s_1,\tau)G_k^+(s,t)-B_k(s_1,\tau,s,t).\end{gathered}$$

Так как ковариационная функция $b_k(s_1,s_2)$ симметрична по переменным $s_1$ и $s_2$, то

$$\int_{s_1}^{\tau}\int_s^t b_k(s_1,s_2)ds_1ds_2+\int_s^t\int_{s_1}^{\tau}b_k(s_1,s_2)ds_1ds_2=2B_k(s_1,\tau,s,t).$$

Поскольку процессы независимы, то $\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)=\varphi_{\varepsilon_1}(v_1)\varphi_{\varepsilon_2}(v_2)\varphi_{\varepsilon_3}(v_3)\varphi_\mu(p)$.

При вычислении моментных функций нам понадобятся значения характеристических функционалов процессов $\varepsilon_k, k=1,2,3$ и $\mu$

$$\begin{gathered}\varphi_{\varepsilon_k}(-\xi_k\chi(s,t,\cdot))=exp(-i\int_T\mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)\xi_k\chi(s,t,s_1)ds_1-\\ -\frac{1}{2}\int_T\int_T b_k(s_1,s_2)\xi_k\chi(s,t,s_1)\xi_k\chi(s,t,s_2)ds_1ds_2)=\\ =exp(-i\xi_k\int_s^t\mathbf{M}\varepsilon_k(s_1)ds_1-\frac{1}{2}\xi_k^2\int_s^t\int_s^t b_k(s_1,s_2)ds_1ds_2)=\\ =exp(-i\xi_kM_k(s,t)-\frac{1}{2}\xi_k^2B_k(s,t,s,t)),\\ \varphi_{\varepsilon_k}(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot)-\xi\chi(s,t,\cdot))=\end{gathered}$$

$$= exp(-i\eta_k M_k(s_1,\tau) - i\xi_k M_k(s,t))\times$$
$$\times exp(-\frac{1}{2}(\eta_k^2 B_k(s_1,\tau,s_1,\tau)+$$
$$+\xi_k^2 B_k(s,t,s,t) + 2\eta_k\xi_k B_k(s_1,\tau,s,t)),$$

$$\varphi_\mu(i\,|\,\xi\,|^2\;\chi(s,t,\cdot)) = \frac{\sin i|\xi|^2 \int_s^t a(s_1)ds_1}{i|\xi|^2 \int_s^t a(s_1)ds_1}\times$$
$$\times exp(-|\xi|^2 \int_s^t \mathrm{M}\mu(s_1)ds_1) =$$
$$= \frac{exp(i^2|\xi|^2 A(s,t)) - exp(-i^2|\xi|^2 A(s,t))}{2i^2|\xi|^2 A(s,t)}\times$$
$$\times exp(-|\xi|^2 M_\mu(s,t)) =$$
$$= \frac{exp(|\xi|^2 (A(s,t)-M_\mu(s,t))) - exp(-|\xi|^2 (A(s,t)+M_\mu(s,t)))}{2|\xi|^2 A(s,t)},$$

$$\varphi_\mu(i|\eta|^2\;\chi(s_1,\tau,\cdot) + i|\xi|^2\;\chi(s,t,\cdot)) =$$
$$= \frac{\sin i(|\eta|^2 A(s_1,\tau) + |\xi|^2 A(s,t))}{i(|\eta|^2 A(s_1,\tau) + |\xi|^2 A(s,t))}\times$$
$$\times exp(-|\eta|^2 M_\mu(s_1,\tau) - |\xi|^2 M_\mu(s,t)) =$$
$$= \frac{1}{2(A(s_1,\tau)\,|\,\eta\,|^2 + A(s,t)\,|\,\xi\,|^2)}\times$$
$$\times(exp(|\eta|^2 (A(s_1,\tau) - M_\mu(s_1,\tau)) +$$
$$+|\xi|^2 (A(s,t) - M_\mu(s,t)) -$$
$$-exp(-|\eta|^2 (A(s_1,\tau) + M_\mu(s_1,\tau)) -$$
$$-|\xi|^2 (A(s,t) + M_\mu(s,t))).$$

При этом

$$\varphi_{\varepsilon,\mu}(-\xi\chi(s,t,\cdot), i|\xi|^2\;\chi(s,t,\cdot)) =$$
$$= \frac{1}{2A(s,t)|\xi|^2}\prod_{k=1}^{3}\exp(-i\xi_k M_k(s,t))\times \qquad (23)$$
$$\times(\prod_{k=1}^{3}\exp(-G_k^-(s,t)\xi_k^2) - \prod_{k=1}^{3}\exp(-G_k^+(s,t)\xi_k^2)),$$

$$\varphi_{\varepsilon,\mu}(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot) - \xi\chi(s,t,\cdot), i\,|\,\eta\,|^2\;\chi(s_1,\tau,\cdot)+$$
$$+i\,|\,\xi\,|^2\;\chi(s,t,\cdot)) =$$
$$= \frac{1}{2(A(s_1,\tau)\,|\,\eta\,|^2 + A(s,t)\,|\,\xi\,|^2)}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{3} exp(-i\eta_k M_k(s_1,\tau)) exp(-i\xi_k M_k(s,t))\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{3} exp(-B_k(s_1,\tau,s,t)\xi_k\eta_k)\times$$
$$\times(\prod_{k=1}^{3} exp(-G_k^-(s_1,\tau)\eta_k^2) exp(-G_k^-(s,t)\xi_k^2) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3} exp(-G_k^+(s_1,\tau)\eta_k^2) exp(-G_k^+(s,t)\xi_k^2)). \qquad (24)$$

Теперь найдем $\mathcal{F}_1(s,t,x)$, для этого вычислим обратное преобразование Фурье от (23) по переменному $\xi$

$$\mathcal{F}_1(s,t,x) = \frac{1}{2A(s,t)} F_\xi^{-1}[\frac{1}{|\,\xi\,|^2}](x) *_x$$
$$*_x \prod_{k=1}^{3} F_{\xi_k}^{-1}[exp(-i\xi_k M_k(s,t))](x_k) *_x$$
$$*_x (\prod_{k=1}^{3} F_{\xi_k}^{-1}[exp(-G_k^-(s,t)\xi_k^2)](x_k) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3} F_{\xi_k}^{-1}[exp(-G_k^+(s,t)\xi_k^2)](x_k)).$$

Обратное преобразование Фурье выражается через прямое преобразование $F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-x)$.

Преобразование Фурье обобщенной функции $|\xi|^\lambda$, которая определена при $\lambda \neq -n, -n-2, \ldots$, найдено в ([4, с. 399]) и равно

$$F_\xi[|\xi|^\lambda](x) = 2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} |x|^{-\lambda-n},$$

где $\Gamma$ — гамма-функция. В нашем случае $\lambda = -2$, $n = 3$ и $F_\xi[\frac{1}{|\xi|^2}](x) = \frac{2\pi^2}{|x|}$, тогда

$$F_\xi^{-1}[\frac{1}{|\xi|^2}](x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\pi^2}{|-x|} = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

$F_{\xi_k}[exp(b\xi_k)](x_k) = 2\pi\delta(x_k - ib)$, где $b$ — некоторое число, $\delta$ — дельта-функция ([5, с. 145]), тогда $F_{\xi_k}^{-1}[exp(b\xi_k)](x_k) = = \frac{1}{2\pi}2\pi\delta(-x_k - ib) = \delta(-x_k - ib)$.

$F_{\xi_k}[exp(-\alpha^2\xi_k^2)](x_k) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} exp(-\frac{x_k^2}{4\alpha^2})$, где $\alpha$ — некоторое число ([3, с. 109]), тогда $F_{\xi_k}^{-1}[exp(-\alpha^2\xi_k^2)](x_k) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} exp(-\frac{-x_k^2}{4\alpha^2}) =$
$= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} exp(-\frac{x_k^2}{4\alpha^2})$.

Пусть $G_k^-(s,t) > 0,\ \ k = 1,2,3,\ \ \forall s,t \in T$. Так как $a(s) > 0$, то и $A(s,t) > 0, \forall s,t \in T$, тогда при выполнении условия $G_k^-(s,t) > 0$, выполняется $G_k^+(s,t) > 0,\ \ k = 1,2,3,\ \ \forall s,t \in T$. Следовательно, можно воспользоваться последней формулой для вычисления преобразования Фурье.

$$\mathcal{F}_1(s,t,x) = \frac{1}{2A(s,t)}\frac{1}{4\pi|x|} *_x$$
$$*_x \prod_{k=1}^{3}\delta(-x_k - M_k(s,t)) *_x (\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi G_k^-(s,t)}}\exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^-(s,t)}) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi G_k^+(s,t)}}\exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^+(s,t)})) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^{3/2}A(s,t)}\frac{1}{|\,x\,|} *_x \prod_{k=1}^{3}\delta(-x_k - M_k(s,t)) *_x$$
$$*_x(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s,t)}}\exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^-(s,t)}) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s,t)}}\exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^+(s,t)})).$$

По свойствам дельта-функции и свертки $f * \delta = f$ и $f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h)$, тогда $f(x) * \delta(x+h) = (f * \delta)(x+h) = f(x+h)$. Кроме того $\delta(-x) = \delta(x)$.

Пусть $M(s,t) = (M_1(s,t), M_2(s,t), M_3(s,t))$.

$$\mathcal{F}_1(s,t,x) = \frac{1}{8\pi^{3/2}A(s,t)}\frac{1}{|\,x + M(s,t)\,|} *_x$$
$$*_x(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^-(s,t)}) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^+(s,t)})).$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}(u(t,x)) =$$
$$= \frac{1}{8\pi^{3/2}}(\mathbf{M}(u_0(x)) *_x \frac{1}{A(t_0,t)}\frac{1}{\left|x + M(t_0,t)\right|} *_x$$
$$*_x(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(t_0,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^-(t_0,t)}) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(t_0,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^+(t_0,t)})) + \tag{25}$$
$$+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{A(s,t)}\frac{1}{\left|x + M(s,t)\right|} *_x$$
$$*_x(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^-(s,t)}) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s,t)}}exp(-\frac{x_k^2}{4G_k^+(s,t)})) *_x \mathbf{M}(f(s,x))ds).$$

Вычислим обратное преобразование Фурье от (24) по переменному $\eta$.

$$F_\eta^{-1}[\varphi_{\varepsilon,\mu}(-\eta\chi(s_1,\tau,\cdot) - \xi\chi(s,t,\cdot), i\left|\eta\right|^2\chi(s_1,\tau,\cdot) +$$
$$+i\left|\xi\right|^2\chi(s,t,\cdot))](y) =$$
$$= F_\eta^{-1}[\frac{1}{2(A(s_1,\tau)\left|\eta\right|^2 + A(s,t)\left|\xi\right|^2)}](y) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}F_{\eta_k}^{-1}[exp(-i\eta_k M_k(s_1,\tau))](y_k)exp(-i\xi_k M_k(s,t))) *_y$$
$$*_y\prod_{k=1}^{3}F_{\eta_k}^{-1}[exp(-B_k(s_1,\tau,s,t)\xi_k\eta_k)](y_k)) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}F_{\eta_k}^{-1}[G_k^-(s_1,\tau)\eta_k^2)](y_k)exp(G_k^-(s,t)\xi_k^2) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}F_{\eta_k}^{-1}[exp(-G_k^+(s_1,\tau)\eta_k^2)](y_k)exp(-G_k^+(s,t)\xi_k^2)) =$$
$$= F_\eta^{-1}[\frac{1}{2(A(s_1,\tau)\,|\,\eta\,|^2 + A(s,t)\,|\,\xi\,|^2)}](y) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}\delta(-y_k - M_k(s_1,\tau))exp(-i\xi_k M_k(s,t))) *_y$$
$$*_y\prod_{k=1}^{3}\delta(-y_k + iB_k(s_1,\tau,s,t)\xi_k) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi G_k^-(s_1,\tau)}}exp(-\frac{y_k^2}{4G_k^-(s_1,\tau)})exp(-G_k^-(s,t)\xi_k^2) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi G_k^+(s_1,\tau)}}exp(-\frac{y_k^2}{4G_k^+(s_1,\tau)})exp(-G_k^+(s,t)\xi_k^2) =$$
$$= \frac{1}{2^4\pi^{3/2}}F_\eta^{-1}[\frac{1}{A(s_1,\tau)\,|\,\eta\,|^2 + A(s,t)\,|\,\xi\,|^2}](y) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}\delta(-y_k - M_k(s_1,\tau))exp(-i\xi_k M_k(s,t))) *_y$$
$$*_y(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s_1,\tau)}}exp(-\frac{y_k^2}{4G_k^-(s_1,\tau)})exp(i\frac{y_k B_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^-(s_1,\tau)}\xi_k) \times$$
$$\times\prod_{k=1}^{3}exp((\frac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^-(s_1,\tau)} - G_k^-(s,t))\xi_k^2) -$$
$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s_1,\tau)}}exp(-\frac{y_k^2}{4G_k^+(s_1,\tau)})exp(i\frac{y_k B_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^+(s_1,\tau)}\xi_k) \times$$
$$\times\prod_{k=1}^{3}exp((\frac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^+(s_1,\tau)} - G_k^+(s,t))\xi_k^2)).$$

Вычислив от последнего выражения обратное преобразование Фурье по переменному $\xi$, получим

$$\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t) =$$
$$= \frac{1}{2^4\pi^{3/2}}F_\xi^{-1}[F_\eta^{-1}[\frac{1}{A(s_1,\tau)\left|\eta\right|^2 + A(s,t)\left|\xi\right|^2}](y)](x) *_{xy}$$

$$*_{xy}\Big(\prod_{k=1}^{3}\delta(-y_k-M_k(s_1,\tau))F^{-1}_{\xi_k}[exp(-i\xi_k M_k(s,t))](x_k)\Big)*_{xy}$$

$$*_{xy}\Big(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s_1,\tau)}}exp\Big(-\frac{y_k^2}{4G_k^-(s_1,\tau)}\Big)F^{-1}_{\xi_k}\Big[exp\Big(i\frac{y_kB_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^-(s_1,\tau)}\xi_k\Big)\Big](x_k)*_x$$

$$*_x\prod_{k=1}^{3}F^{-1}_{\xi_k}\Big[exp\Big(\Big(\frac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^-(s_1,\tau)}-G_k^-(s,t)\Big)\xi_k^2\Big)\Big](x_k)-$$

$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s_1,\tau)}}exp\Big(-\frac{y_k^2}{4G_k^+(s_1,\tau)}\Big)F^{-1}_{\xi_k}\Big[exp\Big(i\frac{y_kB_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^+(s_1,\tau)}\xi_k\Big)\Big](x_k)*_x$$

$$*_x\prod_{k=1}^{3}F^{-1}_{\xi_k}\Big[exp\Big(\Big(\frac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^+(s_1,\tau)}-G_k^+(s,t)\Big)\xi_k^2\Big)\Big](x_k)\Big).$$

Сделаем замену переменных $\tilde{\eta}_k=\sqrt{A(s_1,\tau)}\eta_k$, $\tilde{\xi}_k=\sqrt{A(s,t)}\xi_k$, $\tilde{y}_k=\dfrac{y_k}{\sqrt{A(s_1,\tau)}}$, $\tilde{x}_k=\dfrac{x_k}{\sqrt{A(s,t)}}$, $k=1,2,3$, и $\sigma=(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\tilde{\eta}_3,\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\xi}_3)$, $z=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\tilde{y}_3,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$, получим

$$F^{-1}_{\xi}\Big[F^{-1}_{\eta}\Big[\frac{1}{A(s_1,\tau)|\eta|^2+A(s,t)|\xi|^2}\Big](y)\Big](x)=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)})^3}\times$$

$$\times F^{-1}_{\tilde{\xi}}\Big[F^{-1}_{\tilde{\eta}}\Big[\frac{1}{|\tilde{\eta}|^2+|\tilde{\xi}|^2}\Big](\tilde{y})\Big](\tilde{x})=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)})^3}F^{-1}_{\sigma}\Big[\frac{1}{|\sigma|^2}\Big](z)=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)})^3}\frac{1}{(2\pi)^6}2^4\pi^3\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}|z|^{-4}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{(\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)})^3}\frac{1}{(|\tilde{y}|^2+|\tilde{x}|^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^3}\frac{\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)}}{(A(s,t)|y|^2+A(s_1,\tau)|x|^2)^2}.$$

Пусть $H_k^-(s_1,\tau,s,t)>0$, тогда $H_k^+(s_1,\tau,s,t)>0$, $k=1,2,3$, $s,t\in T$, и преобразование Фурье может быть вычислено по приведенной выше формуле.

$$\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t)=$$

$$=\frac{1}{2^6\pi^{9/2}}\frac{\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)}}{(A(s,t)|y|^2+A(s_1,\tau)|x|^2)^2}*_{xy}$$

$$*_{xy}\prod_{k=1}^{3}\delta(-y_k-M_k(s_1,\tau))\delta(-x_k-M_k(s,t))*_{xy}$$

$$*_{xy}\Big(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^-(s_1,\tau)}}exp\Big(-\frac{y_k^2}{4G_k^-(s_1,\tau)}\Big)\delta\Big(-x_k+\frac{y_kB_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^-(s_1,\tau)}\Big)*_x$$

$$*_x\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi\Big(G_k^-(s,t)-\dfrac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^-(s_1,\tau)}\Big)}}exp\Bigg(-\frac{x_k^2}{4\Big(G_k^-(s,t)-\dfrac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^-(s_1,\tau)}\Big)}\Bigg)-$$

$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{G_k^+(s_1,\tau)}}exp\Big(-\frac{y_k^2}{4G_k^+(s_1,\tau)}\Big)\delta\Big(-x_k+\frac{y_kB_k(s_1,\tau,s,t)}{2G_k^+(s_1,\tau)}\Big)*_x$$

$$*_x\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{\pi\Big(G_k^+(s,t)-\dfrac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^+(s_1,\tau)}\Big)}}exp\Bigg(-\frac{x_k^2}{4\Big(G_k^+(s,t)-\dfrac{B_k^2(s_1,\tau,s,t)}{4G_k^+(s_1,\tau)}\Big)}\Bigg)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2^6\pi^{15/2}}\frac{\sqrt{A(s_1,\tau)A(s,t)}}{(A(s,t)|y+M(s_1,\tau)|^2+A(s_1,\tau)|x+M_k(s,t)|^2)^2}*_{xy}$$

$$*_{xy}\Big(\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{H_k^-(s_1,\tau,s,t)}}\times$$

$$\times exp\Big(-\frac{G_k^-(s_1,\tau)x_k^2-B_k(s_1,\tau,s,t)x_ky_k+G_k^-(s,t)y_k^2}{H_k^-(s_1,\tau,s,t)}\Big)-$$

$$-\prod_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{H_k^+(s_1,\tau,s,t)}}\times \qquad (26)$$

$$\times exp\Big(-\frac{G_k^+(s_1,\tau)x_k^2-B_k(s_1,\tau,s,t)x_ky_k+G_k^+(s,t)y_k^2}{H_k^+(s_1,\tau,s,t)}\Big).$$

Вторая моментная функция вычисляется по формуле (20), где $\mathcal{F}_2(x,y,s_1,\tau,s,t)$ находится по формуле (26).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. — М. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006. — 316 с.

2. *Беседина Т. В.* О трехмерном стохастическом уравнении диффузии / Т. В. Беседина, В. Г. Задорожний. — International Scientific Journal “Spectral and evolution problems”, Volume 19, Simferopol, 2009 — P. 13 — 20.

3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

4. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М.: Добросвет, 2000. — 412 с.

5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М.: Наука, 1965. — 328 с.

*Беседина Татьяна Владимировна — аспирант кафедры нелинейных колебаний Воронежского государственного университета*
*Тел. (4732) 208-649*
*E-mail: tanja_bes@yahoo.com*
*Задорожний Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных колебаний Воронежского государственного университета*
*Тел. (4732) 208-649*
*E-mail: zador@amm.vsu.ru*

*Besedina Tatiana V. — post-graduate student,chair of nonlinear oscillations of Voronezh State University*
*Tel.(4732) 208-649*
*E-mail: tanja_bes@yahoo.com*
*Zadorozhniy Vladimir G. — professor, chair of nonlinear oscillations of Voronezh State Universiry*
*Tel. (4732) 208-649*
*E-mail: zador@amm.vsu.ru*