МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А. К. Баззаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова

Поступила в редакцию 25 мая 2010 г.

Аннотация: в данной статье рассматривается третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени порядка $\alpha\left(0<\alpha<1\right)$ в многомерной области. Для уравнения строятся локально-одномерные схемы (ЛОС). Получена априорная оценка для решения ЛОС. Доказаны устойчивость и сходимость ЛОС для рассматриваемого уравнения.
Ключевые слова: третья краевая задача, обобщенное уравнение параболического типа, производная дробного порядка, локально-одномерные схемы, априорная оценка, устойчивость, сходимость.

Abstract: in this paper we consider the third boundary value problem for general parabolic differential equation of fractional order in multidimensional field. For the equation is constructed locally one-dimensional schemes (LOS). There is received a priori estimate for solutions of LOS in this paper. Stability and convergence of LOS for the considered equation are proved.
Key words: the third boundary problem, general parabolic differential equation, derivatives of fractional order, locally one-dimensional schemes, a priori estimate, stability, convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают в задачах классической механики (обратные задачи), гидродинамики (движение тела в вязкой жидкости), теплопроводности (динамика тепловых потоков), диффузии (электрохимический анализ поверхностей электродов), при изучении физических процессов стохастического переноса, при использовании концепции фрактала в физике конденсированных сред и во многих других.

Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с “остаточной” памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой. Дробные производные по координатам обычно отражают самоподобную неоднородность структуры или среды, в которой развивается процесс. Такие структуры называют фракталами. [1] — [2].

Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с краевыми условиями первого рода рассмотрены в работе [3]. В работе [4] рассмотрена локально-одномерная разностная схема для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде и для гиперболического уравнения при $p=2,3$ с краевыми условиями третьего рода.

1. Локально-одномерная разностная схема. В цилиндре $Q_T=G\times(0,T]$, основанием которого служит p-мерный параллелепипед $G=\{x=(x_1,x_2,..,x_p):0<x_\beta<\ell_\beta,\quad \beta=\overline{1,p}\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=Lu+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}=\lambda_{-\beta}(x,t)u-\mu_{-\beta}(x,t), x_\beta=0,\\ -k_\beta(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}=\lambda_{+\beta}(x,t)u-\mu_{+\beta}(x,t), x_\beta=\ell_\beta, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x), (3)$$

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u,$$

$$L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}-q_\beta(x,t)u,$$

$$0<c_1\le k_\beta\le(x,t)\le c_2, 0\le q_\beta(x,t)\le$$
$$\le c_3, \left|r_\beta(x,t)\right|\le c_4, \lambda_{\pm\beta}\ge\lambda^*>0,$$

$$\bar{Q}_T=\bar{G}\times[0,T],$$

$$\bar{G}=\left\{x=\left(x_1,x_2,..,x_p\right):0\le x_\beta\le\ell_\beta,\ \beta=\overline{1,p}\right\},$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\dfrac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta,\quad 0<\alpha<1$ — дробная производная по Капуто [5] порядка α, $\dot{u}=\partial u/\partial t$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta=\ell_\beta/N_\beta, \beta=\overline{1,p}$:

$$\bar{\omega}_h=\left\{x_\beta^{(i_\beta)}=i_\beta h_\beta: i_\beta=0,1,...,N_\beta, h_\beta=\ell_\beta/N_\beta, \beta=\overline{1,p}\right\}.$$

При этом будем обозначать ω_h — множество всех внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т.е.

$$\omega_h=\left\{x_\beta^{(i_\beta)}=i_\beta h_\beta: i_\beta=1,...,N_\beta-1, h_\beta=\ell_\beta/N_\beta, \beta=\overline{1,p}\right\},$$

$\bar{\omega}_{h_\beta}$ — множество всех узлов по отдельному направлению x_β, ω_{h_β} — множество внутренних узлов по отдельному направлению x_β.

На отрезке $[0,T]$ введем сетку

$$\bar{\omega}'_\tau=\left\{0, t_{j+\frac{\beta}{p}}=\left(j+\frac{\beta}{p}\right)\tau,\ j=0,1,...,j_0-1;\ \beta=1,2,...,p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j=j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{\beta}{p}}$, $\beta=1,2,...,p-1$; ω_τ' — множество узлов сетки $\bar{\omega}_\tau'$, для которых $t>0$.

По аналогии с [6, Гл. IX, стр.481] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}u=L_\beta u+f_\beta,\quad t_{j+\frac{\beta-1}{p}}<t\le t_{j+\frac{\beta}{p}},$$
$$\beta=1,2,...,p,\quad \sum_{\beta=1}^{p}f_\beta=f.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u=\partial_{0t}^{\alpha}u-Lu-f=0,$$

или

$$\sum_{\beta=1}^{p}\mathcal{P}_\beta u=0,\quad \mathcal{P}_\beta u=\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}u-L_\beta u-f_\beta.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\beta=\left(t_{j+\frac{\beta-1}{p}},t_{j+\frac{\beta}{p}}\right], \beta=\overline{1,p}$ будем последовательно решать задачи [6, Гл. IX, стр. 481, ф-ла (6)]

$$\mathcal{P}_\beta v_{(\beta)}=\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)}-L_\beta v_{(\beta)}-f_\beta=0,$$
$$t\in\Delta_\beta,\quad \beta=\overline{1,p}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\dfrac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta}=\lambda_{-\beta}(x,t)v_{(\beta)}-\mu_{-\beta}, x_\beta=0,\\ -k_\beta(x,t)\dfrac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta}=\lambda_{+\beta}(x,t)v_{(\beta)}-\mu_{+\beta}, x_\beta=\ell_\beta,\end{cases} \tag{5}$$

полагая при этом

$$v_{(1)}(x,0)=u_0(x),\quad v_{(\beta)}\left(x,t_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right)=v_{(\beta-1)}\left(x,t_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right),$$
$$\beta=2,3,...,p,$$
$$v_{(1)}\left(x,t_j\right)=v_{(p)}\left(x,t_j\right),\quad j=1,2,...,j_0-1. \tag{6}$$

Дискретный аналог дробной производной $\partial_{0t}^{\alpha}u$ порядка $\alpha, 0<\alpha<1$ имеет вид [3]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u=\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}u+O\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

где

$$\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}u=$$
$$=\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha}\right)u_t^{\frac{s}{p}}, u_t^{\frac{s}{p}}=\frac{u^{\frac{s}{p}}-u^{\frac{s-1}{p}}}{\tau/p}.$$

Аналогично [6] получим для уравнения (4) номера β монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_β, для которой справедлив принцип максимума при любых $h_\beta, \beta=1,p$ и τ. Для этого рассмотрим уравнение (4) при фиксированном β с возмущенным оператором $\tilde{L}_\beta$:

$$\mathcal{P}_\beta v_{(\beta)}=\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)}-\tilde{L}_\beta v_{(\beta)}+f_\beta=0,\quad t\in\Delta_\beta, \tag{4'}$$

где

$$\tilde{L}_\beta u=_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}-q_\beta(x,t)u,$$

$\varkappa_\beta=1/(1+R_\beta)$, $R_\beta=0.5h_\beta\left|r_\beta\right|/k_\beta, \left(\beta=\overline{1,p}\right)$ — разностное число Рейнольдса.

Аппроксимируем каждое уравнение (4) номера β двухслойной неявной схемой на полуинтервале Δ_β, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)y_{t}^{\frac{s}{p}}= \\ =\tilde{\Lambda}_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}}+\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}},\quad x\in\omega_h,\beta=\overline{1,p}, \tag{7}$$

$$\tilde{\Lambda}_\beta y=\varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}+b_\beta^{+}a_\beta^{(+1)}y_{x_\beta}+b_\beta^{-}a_\beta y_{\bar{x}_\beta}-d_\beta y,\beta=\overline{1,p},$$

где

$$\bar{t}=t_{j+1/2},a_\beta=A_\beta\left[a_\beta\left(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar{t}\right)\right],$$
$$d_\beta=F_\beta\left[q_\beta\left(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar{t}\right)\right],$$
$$b_\beta^{\pm}=F_\beta\left[\tilde{r}_\beta^{\pm}\left(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar{t}\right)\right],$$
$$a_\beta^{(+1_\beta)}=a_\beta\left(x_\beta+i_\beta h_\beta,\bar{t}\right),\tilde{r}_\beta^{\pm}=\frac{r_\beta^{\pm}}{k_\beta},$$
$$r_\beta^{+}=0.5\left(r_\beta+\left|r_\beta\right|\right)\ge 0,$$
$$r_\beta^{-}=0.5\left(r_\beta-\left|r_\beta\right|\right)\le 0,$$

A_β и F_β — шаблонные функционалы, используемые для вычисления коэффициентов d_β и φ_β и обеспечивающие второй порядок аппроксимации. Например, можно положить $b_\beta^{\pm}=r_\beta^{\pm}/k_\beta$.

Перейдем к граничным и начальным условиям. Запишем разностный аналог для граничных условий (5):

$$\begin{cases}a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}=\lambda_{-\beta}y_0^{j+\frac{\beta}{p}}-\mu_{-\beta},x_\beta=0,\\ -a^{(N_\beta)}y_{\bar{x}_\beta,N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}=\lambda_{+\beta}y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}-\mu_{+\beta},x_\beta=\ell_\beta.\end{cases} \tag{8}$$

Условия (8) имеют порядок аппроксимации $\mathrm{O}(h_\beta)$.

Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\beta^2)$ на решениях уравнения (4) при каком-либо β. Так как

$$k_\beta\frac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta}=a^{(1_\beta)}v_{(\beta)x_\beta,0}- \\ -0.5h_\beta\left(\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}v_{(\beta)}-r_\beta(x,t)\frac{\partial v_{(\beta)}}{\partial x_\beta}+q_\beta(x,t)v_{(\beta)}-f_\beta\right)_0+O(h_\beta^2),$$

то

$$a^{(1_\beta)}v_{(\beta)x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}-0.5h_\beta\left(\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)v_{(\beta)\bar{t}}^{\frac{s}{p}}- \\ -r_\beta(x,t)v_{(\beta)x_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}+q_\beta(x,t)v_{(\beta)}-f_\beta\right)_0= \\ =\lambda_{-\beta}v_{(\beta),0}^{j+\frac{\beta}{p}}-\mu_{-\beta}+O\left(h_\beta^2\right)+O\left(h_\beta\tau\right),$$

или

$$\left(a^{(1_\beta)}+0.5h_\beta r_{\beta,0}\right)v_{(\beta)x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}- \\ -0.5h_\beta\left(\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)v_{(\beta)\bar{t}}^{\frac{s}{p}}+ \\ +q_\beta(x,t)v_{(\beta)}-f_\beta\right)_0= \\ =\lambda_{-\beta}v_{(\beta),0}^{j+\frac{\beta}{p}}-\mu_{-\beta}+O\left(h_\beta^2\right)+O\left(h_\beta\tau\right). \tag{9}$$

В (9) отбросим величины порядка малости $O(h_\beta^2)$, $O(h_\beta\tau)$. Тогда после замены $v_{(\beta)}$ на y, получим

$$\bar{a}^{(1_\beta)}y_{(\beta)x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}-0.5h_\beta\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}y_0=\bar{\lambda}_{-\beta}v_{(\beta),0}^{j+\frac{\beta}{p}}-\mu_{-\beta}-0.5h_\beta f_{\beta,0},$$

или

$$\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}y_0=\frac{\bar{a}^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}-\bar{\lambda}_{-\beta}y_0^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta}+\frac{\bar{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta}.$$

Аналогично при $x_\beta=\ell_\beta$ получаем:

$$\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}y_{N_\beta}=-\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}y_{\bar{x}_\beta,N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}+\bar{\lambda}_{+\beta}y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta}+\frac{\bar{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},$$

где

$$\bar{a}^{(1_\beta)}=a^{(1_\beta)}+0.5h_\beta r_{\beta,0},\bar{a}^{(N_\beta)}=a^{(N_\beta)}+0.5h_\beta r_{\beta,N_\beta},$$
$$\bar{\lambda}_{-\beta}=\lambda_{-\beta}+0.5h_\beta d_\beta^{(0)},\quad \bar{\lambda}_{+\beta}=\lambda_{+\beta}+0.5h_\beta d_\beta^{(N_\beta)},$$
$$\bar{\mu}_{-\beta}=\mu_{-\beta}+0.5h_\beta f_{\beta,0},\quad \bar{\mu}_{+\beta}=\mu_{+\beta}+0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Итак, разностный аналог задачи (1)—(3) имеет вид:

$$\Delta_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}^{\alpha}y=\bar{\Lambda}_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}}+\Phi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \tag{10}$$

$$y(x,0)=u_0(x),$$

где

$$\bar{\Lambda}_\beta y^{(\beta)}=\begin{cases}\Lambda_\beta^{-}y^{(\beta)}=\dfrac{\bar{a}^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}^{j+\frac{\beta}{p}}-\bar{\lambda}_{-\beta}y_0^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta},x_\beta=0,\\ \tilde{\Lambda}_\beta y=\varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}+b_\beta^{+}a_\beta^{(+1)}y_{x_\beta}+b_\beta^{-}a_\beta y_{\bar{x}_\beta}-d_\beta y,\\ \qquad\beta=\overline{1,p},x_\beta\in\omega_{h_\beta},\\ \Lambda_\beta^{+}y^{(\beta)}=-\dfrac{\bar{a}^{(N_\beta)}y_{\bar{x}_\beta,N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}+\bar{\lambda}_{+\beta}y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta},\quad x_\beta=\ell_\beta,\end{cases}$$

$$\Phi_{(\beta)}=\begin{cases}\dfrac{\bar{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},x_\beta=0,\\ \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}},\qquad x_\beta\in\omega_{h_\beta},\\ \dfrac{\bar{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},x_\beta=\ell_\beta.\end{cases}$$

2. Погрешность аппроксимации ЛОС. Подставляя $y^{j+\frac{\beta}{p}} = z^{j+\frac{\beta}{p}} + u^{j+\frac{\beta}{p}}$, где $u^{j+\frac{\beta}{p}}$ — решение исходной дифференциальной задачи (1) — (3), в разностное уравнение (7), получим

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) z_t^{\frac{s}{p}} = \tilde{\Lambda}_\beta z^{j+\frac{\beta}{p}} + \psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad (11)$$

где

$$\psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \tilde{\Lambda}_\beta u^{j+\frac{\beta}{p}} + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} - $$
$$-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) u_t^{\frac{s}{p}},$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_\beta = \left(\tilde{L}_\beta u + f_\beta - \frac{1}{p}\partial^\alpha_{ot} u\right)^{j+\frac{1}{2}}$$

и, замечая, что

$$\sum_{\beta=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\beta = 0, \text{ если } \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta = f,$$

представим

$$\psi_\beta = \psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta,$$

тогда

$$\psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \tilde{\Lambda}_\beta u^{j+\frac{\beta}{p}} + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} - \Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} u^{j+\frac{\beta}{p}} + \overset{\circ}{\psi}_\beta - \overset{\circ}{\psi}_\beta =$$
$$= \left(\tilde{\Lambda}_\beta u^{j+\frac{\beta}{p}} - \tilde{L}_\beta u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} - f_\beta^{j+\frac{1}{2}}\right) -$$
$$-\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} u^{j+\frac{\beta}{p}} - \frac{1}{p}\left(\partial^\alpha_{ot} u\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) + \overset{\circ}{\psi}_\beta = \overset{*}{\psi}_\beta + \overset{\circ}{\psi}_\beta,$$

где

$$\overset{*}{\psi_\beta} = \left(\tilde{\Lambda}_\beta u^{j+\frac{\beta}{p}} - \tilde{L}_\beta u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} - f_\beta^{j+\frac{1}{2}}\right) -$$
$$-\left(\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} u^{j+\frac{\beta}{p}} - 1p\left(\partial^\alpha_{ot} u\right)^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_\beta = O(h_\beta^2 + \tau), \overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1).$$
$$\psi = \sum_{\beta=1}^{p}\psi_\beta = \sum_{\beta=1}^{p}\psi_\beta^* = O\left(|h|^2 + \tau\right).$$

Подставляя $y^{j+\frac{\beta}{p}} = z^{j+\frac{\beta}{p}} + u^{j+\frac{\beta}{p}}$ в граничные условия разностной схемы (10), получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} z^{j+\frac{\beta}{p}} = \Lambda_\beta^- z^{j+\frac{\beta}{p}} + \psi_{-\beta}, \psi_{-\beta} = \frac{\psi^\circ_{-\beta} + \psi^*_{-\beta}}{0.5h_\beta},\\
&\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} z^{j+\frac{\beta}{p}} = \Lambda_\beta^+ z^{j+\frac{\beta}{p}} + \psi_{+\beta}, \psi_{+\beta} = \frac{\psi^\circ_{+\beta} + \psi^*_{+\beta}}{0.5h_\beta}
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\psi^\circ_{\pm\beta} = O(1), \sum_{\beta=1}^{p}\psi^\circ_{\pm\beta} = 0, \psi^*_{\pm\beta} = O(h_\beta^2 + \tau).$$

Таким образом, для погрешности $z^{j+\frac{\beta}{p}}$ имеем задачу

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}} z^{j+\frac{\beta}{p}} = \bar{\Lambda}_\beta z^{(\beta)} + \Psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad (13)$$

где

$$\bar{\Lambda}_\beta = \begin{cases} \Lambda_\beta^-, & x_\beta = 0,\\ \tilde{\Lambda}_\beta, & x_\beta \in \omega_{h_\beta},\\ \Lambda_\beta^+, & x_\beta = \ell_\beta. \end{cases}$$

$$\Psi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \begin{cases} \psi_{-\beta}, & x_\beta = 0,\\ \psi_\beta, & x_\beta \in \omega_{h_\beta},\\ \psi_{+\beta}, & x_\beta = \ell_\beta. \end{cases}$$

$$\psi_\beta = \psi^\circ_\beta + \psi^*_\beta, \quad \psi^\circ_\beta = O(1), \quad \psi^*_\beta = O(h_\beta^2 + \tau),$$

$$\psi_{-\beta} = \psi^\circ_{-\beta} + \frac{\psi^*_{-\beta}}{0.5h_\beta}, \quad \psi_{+\beta} = \psi^\circ_{+\beta} + \frac{\psi^*_{+\beta}}{0.5h_\beta},$$

$$\psi^*_{\pm\beta} = O(h_\beta^2) + O(h_\beta\tau), \quad \sum_{\beta=1}^{p}\psi^\circ_{\pm\beta} = 0, \;\; z(x,0) = 0.$$

3. Устойчивость ЛОС. Разностную задачу (10) перепишем в виде

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) y_t^{\frac{s}{p}} =$$
$$= \varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\bar{x}\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}\right)_{x_\beta} + b^+_{\beta,i} a^{(+1)}_\beta y_{x_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} + b^-_{\beta,i} a_\beta y_{\bar{x}\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}$$
$$-d_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}} + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \quad \beta = \overline{1,p}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) y_{t,0}^{\frac{s}{p}} =\\
&= \frac{\overset{-}{a}^{(1_\beta)} y^{j+\frac{\beta}{p}}_{x_\beta,0} - \bar{\lambda}_{-\beta} y_0^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta} + \bar{\mu}_{-\beta}, \quad x_\beta = 0,
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) y_{t,N_\beta}^{\frac{s}{p}} =\\
&= -\frac{\overset{-}{a}^{(N_\beta)} y^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta,N_\beta} + \bar{\lambda}_{+\beta} y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}}{0.5h_\beta} + \bar{\mu}_{+\beta}, \quad x_\beta = \ell_\beta,
\end{aligned} \quad (16)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad (17)$$

В [7] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),$$

где

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0,$$
$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geq 0, \qquad (18)$$

где P, Q — узлы сетки $\bar{\omega}_h$, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла P.

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$ узел $(p+1)$ — мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S — границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \bar{\omega}_h$ и узлов $P(x, t_{j+\frac{\beta}{p}})$ при $t_{j+\frac{\beta}{p}} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h_\beta}$ для всех $\beta = 1,2,...,p$; $\quad j = 0,1,...,j_0$.

Получим априорную оценку для (14) — (17). Рассмотрим два случая:

1. при $d_{i_\beta} \geq m_1 > 0$;
2. при $d_{i_\beta} \geq 0$.

Рассмотрим первый случай, т.е. при $d_{i_\beta} \geq m_1 > 0$.

В точке $P = P(x_{i_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta} + d_{i_\beta}\right] y_{i_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} =$$
$$= \left[\varkappa_{i_\beta} \frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}\right] y_{i_\beta+1}^{j+\frac{\beta}{p}} + \left[\varkappa_{i_\beta} \frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta}\right] y_{i_\beta-1}^{j+\frac{\beta}{p}} +$$
$$+ \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right)\right] y_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-1}{p}} + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right) y^0_{i_\beta} + \right.$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right) y^1_{i_\beta} + ... +$$
$$\left. + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) y_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-2}{p}}\right] + \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}.$$

В точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\bar{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2} + \frac{\bar{\lambda}_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right] y_0^{j+\frac{\beta}{p}} =$$
$$= \left[\frac{\bar{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\right] y_1^{j+\frac{\beta}{p}} + \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right)\right] y_0^{j+\frac{\beta-1}{p}} +$$
$$+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right) y^0_0 + \right.$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right) y^1_0 + ... +$$
$$\left. + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) y_0^{j+\frac{\beta-2}{p}}\right] + \mu_{-\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}.$$

В точке $P = P(x_{N_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\bar{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2} + \frac{\bar{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right] y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} =$$
$$= \left[\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\right] y_{N_\beta-1}^{j+\frac{\beta}{p}} + \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right)\right] y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta-1}{p}}$$
$$+ \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right) y^0_{N_\beta} + \right.$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right) y^1_{N_\beta} + ... +$$
$$\left. + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) y_{N_\beta}^{j+\frac{\beta-2}{p}}\right] + \mu_{+\beta}^{j+\frac{\beta}{p}}.$$

Учитывая, что $-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}} > 0$, при $\ell = pj + \beta - 1 \geq 1$, $j = 0,\dots,j_0 - 1$; $\beta = 2,3,...,p$ проверим выполнимость условий теоремы 3 ([7], гл. V. Дополнение):

в точке $P = P(x_{i_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta} + d_{i_\beta}\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}; \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta};\right.$$
$$\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha}(2 - 2^{1-\alpha}); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right); ...; \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\},$$

$$D(P) = d_{i_\beta} \geq m_1 > 0;$$

в точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\bar{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2} + \frac{\bar{\lambda}_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right] > 0,$$

$$B(P,Q) =$$
$$= \left\{\frac{\bar{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}; \frac{1}{p^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.\right.$$

$$\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);...;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\Bigg]\Bigg\},$$

$$D(P)=\frac{\bar{\lambda}_{-\beta}}{0.5h_\beta}>0;$$

в точке $P=P(x_{N_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)=\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}}{0.5h^2_\beta}+\frac{\bar{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\Bigg\{\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}}{0.5h^2_\beta};\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);$$
$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);$$
$$\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);...;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\Bigg]\Bigg\},$$

$$D(P)=\frac{\bar{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}>0.$$

Таким образом на основании вышеупомянутой теоремы 3 ([7], гл. V. Дополнение, § 2, ф. (16)) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\left\|y^{j+1}\right\|&\le\left\|u_0\right\|_C+\max_{0<t'\le j\tau}\left(\frac{\left|\bar{\mu}_{-\beta}(x,t')\right|}{\bar{\lambda}_{-\beta}}+\frac{\left|\bar{\mu}_{+\beta}(x,t')\right|}{\bar{\lambda}_{+\beta}}\right)+\\&+\frac{1}{c_3}\max_{0<t'\le j\tau}\left|\varphi(x,t')\right|\le\\&\le\left\|u_0\right\|_C+\max_{0<t'\le j\tau}\frac{1}{\bar{\lambda}^*}\left(\left|\bar{\mu}_{-\beta}(x,t')\right|+\left|\bar{\mu}_{+\beta}(x,t')\right|\right)+\\&+\frac{1}{c_3}\max_{0<t'\le j\tau}\left|\varphi(x,t')\right|,\end{aligned}\tag{19}$$

где $\bar{\lambda}_{\pm\beta}\ge\bar{\lambda}^*$.

Рассмотрим теперь второй случай, т.е при $d_{i_\beta}\ge 0$. Решение задачи (14) — (17) представим в виде суммы

$$y=\bar{y}+v,$$

где $\bar{y}$ — решение однородных уравнений (14) с неоднородными краевыми и начальными условиями (15)—(17):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{s}{p}}_{t}=\\&=\varkappa_\beta\left(a_\beta\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}+b^+_\beta a^{(+1)}_\beta\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{x_\beta}+\\&+b^-_\beta a_\beta\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta}-d_\beta\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}},\quad\beta=\overline{1,p},\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{s}{p}}_{t,0}=\\&=\frac{\bar{a}^{(1_\beta)}\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{x_\beta,0}-\bar{\lambda}_{-\beta}\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_0}{0.5h_\beta}+\bar{\mu}_{-\beta},\quad x_\beta=0,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{s}{p}}_{t,N_\beta}=\\&=-\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta,N_\beta}+\bar{\lambda}_{+\beta}\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{N_\beta}}{0.5h_\beta}+\bar{\mu}_{+\beta},\quad x_\beta=\ell_\beta,\end{aligned}\tag{22}$$

$$\bar{y}(x,0)=u_0(x),\tag{23}$$

а v — решение неоднородных уравнений (14) с однородными краевыми и начальными условиями (15)—(17):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)v^{\frac{s}{p}}_{t}=\\&=\varkappa_\beta\left(a_\beta v^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta}\right)_{x_\beta}+b^+_\beta a^{(+1)}_\beta v^{j+\frac{\beta}{p}}_{x_\beta}+\\&+b^-_\beta a_\beta v^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta}-d_\beta v^{j+\frac{\beta}{p}}+\varphi^{j+\frac{\beta}{p}}_\beta,\\&x_\beta\in\omega_{h_\beta},\quad\beta=\overline{1,p},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)v^{\frac{s}{p}}_{t,0}=\\&=\frac{\bar{a}^{(1_\beta)}v^{j+\frac{\beta}{p}}_{x_\beta,0}-\bar{\lambda}_{-\beta}v^{j+\frac{\beta}{p}}_0}{0.5h_\beta},\quad x_\beta=0,\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)v^{\frac{s}{p}}_{t,N_\beta}=\\&=-\frac{\bar{a}^{(N_\beta)}v^{j+\frac{\beta}{p}}_{\bar{x}_\beta,N_\beta}+\bar{\lambda}_{+\beta}v^{j+\frac{\beta}{p}}_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\quad x_\beta=\ell_\beta,\end{aligned}\tag{26}$$

$$v(x,0)=0.\tag{27}$$

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого уравнение (20) приведем к каноническому виду.

В точке $P=P(x_{i_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$\begin{aligned}&\Bigg[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h^2_\beta}+\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h^2_\beta}+\\&+\frac{b^+_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}-\frac{b^-_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta}+d_{i_\beta}\Bigg]\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{i_\beta}=\\&=\left[\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h^2_\beta}+\frac{b^+_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}\right]\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{i_\beta+1}+\left[\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h^2_\beta}-\frac{b^-_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta}\right]\bar{y}^{j+\frac{\beta}{p}}_{i_\beta-1}+\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\overline{y}_{i_\beta}^{\,j+\frac{\beta-1}{p}}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right)\overline{y}^{\,0}_{i_\beta}+$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right)\overline{y}^{\,1}_{i_\beta}+\ldots+$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\overline{y}_{i_\beta}^{\,j+\frac{\beta-2}{p}}]+\varphi_\beta^{\,j+\frac{\beta}{p}}.$$

В точке $P=P(x_0,t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{\overline{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\overline{\lambda}_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overline{y}_0^{\,j+\frac{\beta}{p}}=$$
$$=\left[\frac{\overline{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\right]\overline{y}_1^{\,j+\frac{\beta}{p}}++\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\overline{y}_0^{\,j+\frac{\beta-1}{p}}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right)\overline{y}^{\,0}_{0}+\right.$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right)\overline{y}^{\,1}_{0}+\ldots+$$
$$\left.+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\overline{y}_0^{\,j+\frac{\beta-2}{p}}\right].$$

В точке $P=P(x_{N_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{\overline{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\overline{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overline{y}_{N_\beta}^{\,j+\frac{\beta}{p}}=$$
$$=\left[\frac{\overline{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\right]\overline{y}_{N_\beta-1}^{\,j+\frac{\beta}{p}}+\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]\overline{y}_{N_\beta}^{\,j+\frac{\beta-1}{p}}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right)\overline{y}^{\,0}_{N_\beta}+\right.$$
$$+\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right)\overline{y}^{\,1}_{N_\beta}+\ldots+$$
$$\left.+\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\overline{y}_{N_\beta}^{\,j+\frac{\beta-2}{p}}\right].$$

Проверим, как и выше, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках, выполнимость условий теоремы 3 ([7], гл. V. Дополнение, § 2, ф. (16))

В точке $P=P(x_{i_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)=\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}+\frac{b^+_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}-\frac{b^-_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta}+d_{i_\beta}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\{\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2}+\frac{b^+_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta};\frac{\varkappa_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}-\frac{b^-_{i_\beta}a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta};$$
$$\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right);$$
$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);\ldots;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\},$$

$$D(P)=d_{i_\beta}\geq 0.$$

В точке $P=P(x_0,t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)=\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{\overline{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\overline{\lambda}_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{\overline{a}^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2};\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\right.$$
$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);\ldots;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\},$$

$$D(P)\equiv\frac{\lambda_{-\beta}}{0.5h_\beta}>0.$$

В точке $P=P(x_{N_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)=\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{\overline{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\overline{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right]>0,$$

$$B(P,Q)=\left\{\frac{\overline{a}^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2};\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\right.$$
$$\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);\ldots;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\},$$

$$D(P)=\frac{\overline{\lambda}_{+\beta}}{0.5h_\beta}>0.$$

Таким образом на основании теоремы 3 ([7], гл. V. Дополнение, § 2, ф. (16)) получаем следующую оценку:

$$\left\|\overline{y}^{\,j}\right\|\leq\left\|u_0\right\|_C+\frac{1}{\lambda^*}\max_{0<t'\leq j\tau}\left(\left|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')\right|+\left|\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')\right|\right),\quad(28)$$
$$\lambda_{\pm\beta}\geq\lambda^*>0.$$

Переходим к оценке функции v. Уравнение (24) перепишем в виде

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha} v_{\bar t}^{j+\frac{\beta}{p}} = \tilde\Lambda_\beta v^{j+\frac{\beta}{p}} + \tilde\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad (24')$$

где

$$\tilde\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \varphi^{j+\frac{\beta}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}.$$

Уравнение ($24'$) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta} + d_{i_\beta}\right]\bar y_{i_\beta}^{j+\frac{\beta}{p}} =$$
$$= \left[\frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}\right]\bar y_{i_\beta+1}^{j+\frac{\beta}{p}} + \left[\frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta}\right]\bar y_{i_\beta-1}^{j+\frac{\beta}{p}} + \Phi(P_{j+\frac{\beta}{p}}),$$

где

$$\Phi(P_{j+\frac{\beta}{p}}) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right] v_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-1}{p}} + \bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}},$$

где

$$\bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) v_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-2}{p}} - \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{p_{j+\beta-2}}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\left(v_{i_\beta}^{\frac{s}{p}} - v_{i_\beta}^{\frac{s-1}{p}}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 ([7], гл. V. Дополнение, § 2, ф. (25) — (27)):

$$P_{(\beta)} = P\left(x, t_{j+\frac{\beta}{p}}\right),$$

$$A(P) = \left[\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta} + d_{i_\beta}\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2} + \frac{b^+_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta}; \frac{\varkappa_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2} - \frac{b^-_{i_\beta} a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta};\right.$$
$$\frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right);\right.$$
$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right);\ldots;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\} > 0,$$

$$D'(P_{(\beta)}) = A(P_{(\beta)}) - \sum_{Q\in Ш'_\beta(P)} B(P_{(\beta)},Q) = \frac{1 + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha d_{i_\beta}}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

для всех $Q \in Ш''_{\beta-1}, Q \in Ш'_\beta$,

$$\sum_{Q\in(\ \ ''_{\beta-1}} B(P_{(\beta)},Q) = \frac{1}{p^{1-\alpha}}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha}) > 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{D'(P_{(\beta)})}\sum_{Q\in Ш''_{\beta-1}} B(P_{(\beta)},Q) = \frac{(2-2^{1-\alpha})}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \le \frac{1}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \le 1,$$

где

$$Ш'\left(P\left(x, t_{j+\frac{\beta}{p}}\right)\right) = Ш'_\beta + Ш''_{\beta-1},$$

$Ш'_\beta$ – множество узлов $Q = Q(\xi, t_\beta) \in Ш'\left(P\left(x,t_\beta\right)\right)$,

$Ш''_{\beta-1}$ – множество узлов $Q = Q(\xi, t_{\beta-1}) \in Ш'\left(P\left(x,t_{\beta-1}\right)\right)$.

На основании упомянутой теоремы 4 ([7], гл. V. Дополнение) и в силу (29) получаем оценку

$$\left\|v^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C \le p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha\left\|\bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C + \frac{(2-2^{1-\alpha})}{1+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\left\|v^{j+\frac{\beta-1}{p}}\right\|_C. \quad (30)$$

Оценим $\left\|\bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C$, где

$$\bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} = \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) v_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-2}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right) v_{\bar t}^{\frac{s}{p}} =$$
$$= \varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}}\right) v_{i_\beta}^0 + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-2}{p}}\right) v_{i_\beta}^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right) v_{i_\beta}^{j+\frac{\beta-2}{p}}\right]. \quad (31)$$

Так как выражения, стоящие в круглых скобках положительны, то из (30) получаем оценку

$$\left\|\bar\varphi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C \le \left\|\varphi^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C + \frac{2^{1-\alpha}-1}{p^{1-\alpha}\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}\max_{0\le s\le\beta-2}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \quad (32)$$

С помощью (32) из (30) находим

$$\max_{0\le s\le\beta}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C \frac{2^{1-\alpha}-1}{1+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)d_{i_\beta}}\max_{0\le s\le\beta-1}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C+$$

$$+\frac{p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}{1+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)+d_{i_\beta}}\max_{0\le s\le\beta}\left\|\varphi^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C\le$$

$$\le\max_{0\le s\le\beta-1}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C+p^{1-\alpha}\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\max_{0\le s\le\beta}\left\|\varphi^{j+\frac{\beta}{p}}\right\|_C. \quad (33)$$

Суммируем (33) сначала по $\beta=1,2,...,p$, затем по $j'=0,1,...,j$. Тогда получим

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C\le\left\|v^{0}\right\|_C+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\le s\le\beta}\left\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \quad (34)$$

Таким образом из оценок (28) и (34) следует окончательная оценка

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C\le\left\|u_0\right\|_C+\frac{1}{\lambda^*}\max_{0<t'\le j\tau}\left(\left|\bar\mu_{-\beta}(x,t')\right|+\left|\bar\mu_{+\beta}(x,t')\right|\right)+$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0s\beta}\left\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \quad (35)$$

4. Равномерная сходимость схемы. Чтобы использовать свойство $\sum_{\beta=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_{\beta}=0$, $\overset{\circ}{\psi}_{\beta}=O(1)$ представим по аналогии с [6], решение задачи для погрешности в виде суммы $z_{(\beta)}=v_{(\beta)}+\eta_{(\beta)}, z_{(\beta)}=z^{j+\frac{\beta}{p}}$, где $\eta_{(\beta)}$ определяется условиями

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{\beta-s}{p}}\right)\eta_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\overset{\circ}{\psi}_{\beta},$$
$$x\in\omega_h+\gamma_{h,\beta},\quad \beta=\overline{1,p},$$
$$\eta(x,0)=0.$$

Также как и в [3] доказывается, что $\eta_{(\beta)}^{j+\frac{\beta}{p}}=O(\tau^{\alpha}),\beta=\overline{1,p},\quad j=0,1,2,...,j_0-1.$

Функция $v_{(\beta)}$ определяется условиями

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}v_{(\beta)}=\Lambda_{\beta}v_{(\beta)}+\tilde\Psi_{\beta},\quad \tilde\Psi_{\beta}=\Lambda_{\beta}\eta_{(\beta)}+\Psi^*_{\beta}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}v_{(\beta)}&=\Lambda^-_{\beta}v_{(\beta)}+\tilde\Psi_{-\beta},\\ \tilde\Psi_{-\beta}&=\Lambda^-_{\beta}\eta_{(\beta)}+\frac{\Psi^*_{-\beta}}{0.5h_{\beta}},\end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{\beta}{p}}}v_{(\beta)}&=\Lambda^+_{\beta}v_{(\beta)}+\tilde\Psi_{+\beta},\\ \tilde\Psi_{+\beta}&=\Lambda^+_{\beta}\eta_{(\beta)}+\frac{\Psi^*_{+\beta}}{0.5h_{\beta}},\end{aligned} \quad (38)$$

$$v(x,0)=0, \quad (39)$$

где

$$\tilde\Psi_{\beta}=\tilde\Lambda_{\beta}\eta_{(\beta)}+\Psi^*_{\beta}=O(h^2_{\beta}+\tau^{\alpha}),$$
$$\Psi^*_{\beta}=O(h^2_{\beta}+\tau^{\alpha}),$$
$$\Psi^*_{\pm\beta}=O(h^2_{\beta}+\tau^{\alpha}),\quad \Lambda^{\pm}\eta_{(\beta)}=O(\tau^{\alpha}),$$

если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar Q_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^4 u}{\partial x^2_{\beta}\partial x^2_{\nu}},\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x^2_{\beta}\partial t^{\alpha}},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_{\beta}},1\le\beta,\nu\le p,\ \beta\ne\nu.$$

Для оценки решения задачи (36) — (38) воспользуемся оценкой (35). Тогда получим

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C\le M\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\quad \text{где } h=\max_{1\le\beta\le p}h_{\beta}$$

Откуда получаем

$$\left\|z^{j+1}\right\|_C\le\left\|v^{j+1}\right\|_C+\left\|\eta^{j+1}\right\|_C\le M\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right).$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть задача (1) – (3) имеет единственное непрерывное в $\bar Q_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\bar Q_T$ производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^4 u}{\partial x^2_{\beta}\partial x^2_{\nu}},\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x^2_{\beta}\partial t^{\alpha}},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_{\beta}},1\le\beta,\ \nu\le p,\ \beta\ne\nu.$$

Тогда решение разностной задачи (10) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)—(3) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\quad h^2=O(\tau^{1-\alpha}),\frac{1}{2}<\alpha\le 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Наука, 1977. Изд. “Артишок”, 2008. — 513 с.

2. *Васильев В. В., Симак Л. А.* Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: НАН Украины, 2008. — 256 с.

3. *Лафишева М. М., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. — Т. 48. 10. — С. 1878—1887.

4. *Фрязинов И. В.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1964. — Т. 4. 6. — С. 1106—1111.

5. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и не-

которые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

6. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

Баззаев А. К., аспирант математического факультета, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
E-mail: alexander.bazzaev@gmail.com
Тел.: 8-928-496-53-29
North Ossetian State University

Bazzaev A. K., postgraduate student
E-mail: alexander.bazzaev@gmail.com
Tel.: 8-928-496-53-29