УДК 517.9

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОДНОМЕРНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА*

А. О. Щербаков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.02.2010 г.

Аннотация. С помощью метода подобных операторов получены формулы регуляризованного следа для одномерного несамосопряженного оператора Дирака. Доказаны теоремы как в общем случае (без наложения каких-либо ограничений на потенциал), так и в частных случаях (при определенных условиях гладкости потенциала).
Ключевые слова: метод подобных операторов, регуляризованный след оператора, оператор Дирака.

Abstract. The similar operators method is used to obtain the regularized trace formula of 1D nonself-adjoint Dirac operator. The theorems was proven both in generalized case (without any potential restriction) and in subcase (with specified conditions of potential smoothness).
Key words: similar operators method, regularized trace of operator, Dirac operator.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной статье получим формулу регуляризованного следа для одномерного несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. Регуляризованный след есть мера дефекта полной энергии системы при ее возмущении в ситуации, когда сама полная энергия системы (точнее, рассматриваемой модели) бесконечна [1].

Одномерный оператор Дирака возникает в анализе полной интегрируемости динамических систем, а именно нелинейного (кубического) уравнения Шредингера (см. [2]).

Пусть $L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) = L_2[0,\pi]\times L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство измеримых на $[0,\pi]$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$ будем определять формулой

$$(x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right),$$

где (x_i,y_i) — скалярное произведение в гильбертовом пространстве комплексных функций $L_2[0,\pi]$, которое для удобства определим как

$$(x_i,y_i) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x_i(\tau)\overline{y_i(\tau)}d\tau,\ i = 1,2.$$

Через $W_2^1([0,\pi],\mathbb{C}^2)$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2([0,\pi],\mathbb{C}^2):\ y$ абсолютно непрерывна и $y' \in L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)\}$ со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = (x,y) + (x',y')$, $x,y \in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$.

Рассматривается одномерный оператор Дирака

$$L_{bc} : D(L_{bc}) \subset L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right) \to L_2\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$$

$$L_{bc}y = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} - vy,\ y \in D(L_{bc}), \qquad (1)$$

где $v(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0,\pi]$, $P,Q \in L_2[0,\pi]$.

Область определения $D(L_{bc})$ определяется одним из краевых условий bc:

(a) *периодические* $\left(bc = per : y(0) = y(\pi) \in \mathbb{C}^2\right)$;

(b) *антипериодические* $\left(bc = ap : y(0) = -y(\pi) \in \mathbb{C}^2\right)$;

(c) *Дирихле* $\left(bc = dir : y_1(0) = y_2(0)\right.$ и $\left.y_1(\pi) = y_2(\pi)\right)$,

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W_2^1\left([0,\pi],\mathbb{C}^2\right)$.

А именно, полагается $D(L_{bc}) = \{y \in W_2^1([0,\pi],\mathbb{C}^2) : y \in bc\}$, и соответствующие операторы будут обозначаться через L_{per}, L_{ap}, L_{dir}. Если $v = 0$ (нулевой потенциал), то используется запись L_{bc}^0 или L_{per}^0, L_{ap}^0, L_{dir}^0 соответственно. Оператор L_{bc}^0 будет называться *свобод-*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00276).

ным оператором Дирака. Особо отметим, что оператор L_{bc} является несамосопряженным.

Операторы L^0_{bc}, $bc \in \{per, ap, dir\}$ являются самосопряженными с дискретным спектром, имеющим следующий вид: (см. [3]):

(a) $\sigma(L^0_{per}) = 2\mathbb{Z}$ — множество четных чисел; каждое $\lambda_n = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, — двойное собственное значение, а соответствующее собственное подпространство E^0_n есть линейная оболочка, натянутая на собственные векторы e^1_n, e^2_n, т.е. $E^0_n = Span\{e^1_n, e^2_n\}$, где

$$e^1_n(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_n t} \\ 0 \end{pmatrix},\ e^2_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda_n t} \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi]; \quad (2)$$

(b) $\sigma(L^0_{ap}) = 2\mathbb{Z} + 1$ — множество нечетных чисел; соответствующие собственные подпространства заданы теми же формулами, как и для оператора L^0_{per}, где $\lambda_n = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$;

(c) $\sigma(L^0_{dir}) = \mathbb{Z}$; каждое собственное значение простое и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1_n + e^2_n), \quad (3)$$

где $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В определении оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap, dir\}$ и соответствующих обозначений мы, в основном, следовали статье Джакова П., Митягина Б. [3].

При попытке исследования оператора Дирака L_{bc} общими методами теории возмущений возникает несколько затруднений, связанных с наличием таких свойств как:

(a) расстояние между собственными значениями невозмущенного оператора L^0_{bc} не уходит в бесконечность;

(b) возмущение (оператор умножения на потенциал v) не является ограниченным оператором.

Для получения формулы регуляризованного следа оператора Дирака будем использовать метод подобных операторов [4]—[6]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора L^0_{bc}). Тем самым существенно упрощается изучение исследуемого оператора L_{bc}. Метод подобных операторов позволяет избежать отмеченных выше проблем и не накладывает никаких условий на возмущение.

2. О МЕТОДЕ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введем основные понятия метода подобных операторов.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство, $End\ \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$.

Определение 1. Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\ \mathcal{X}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = UA_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Имеет место (непосредственно вытекающая из определения 1)

Лемма 1. *Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора, и $U \in End\ \mathcal{X}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2. Тогда*

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i, $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A|\mathcal{X}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{X}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{X}_k} = U(\mathcal{X}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A|\widetilde{\mathcal{X}_k}$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ (т.е. $\mathcal{X}_1 = Im\ P$ — образ проектора P, $\mathcal{X}_2 = Im(I - P)$), то проектор $\widetilde{P}$, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}_1} \oplus \widetilde{\mathcal{X}_2}$, определяется формулой $\widetilde{P} = UPU^{-1}$.

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — два линейных оператора, действующих в банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Символом $L_A(\mathcal{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{X}$ и подчиненных оператору A [4], т.е. линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|B\|_A = inf\{C > 0 : \|Bx\| \leq \leq C(\|x\| + \|Ax\|),\ x \in D(A)\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$. Поскольку $D(A - B) = D(A)$

для любого $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, то обычно считается, что $D(B) = D(A)$.

Далее будет рассматриваться трансформатор (т.е. линейный оператор в пространстве линейных операторов) $ad_A : D(ad_A) \subset End\ \mathcal{X} \to End\ \mathcal{X}$

$$ad_A X = AX - XA,\ X \in D(ad_A)$$

с областью определения $D(ad_A)$, состоящей из операторов $X \in End\ \mathcal{X}$, обладающих свойствами:

1) $XD(A) \subset D(A)$;

2) оператор $AX - XA : D(A) \to \mathcal{X}$ допускает ограниченное расширение Y на $\mathcal{X}$ (и полагается $ad_A X = Y$).

Важнейшим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки [4]—[6].

Определение 2. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U},\ \Gamma : \mathfrak{U} \to End\ \mathcal{X}$$

являются трансформаторами. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора A, а $\mathfrak{U}$ — *допустимым пространством возмущений*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ (т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|X\|_A \le C\|X\|_*$, для любого $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$);

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$. Более того, $\Gamma X \in D(ad_A)$, причем

$$ad_A \Gamma X = A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX$$
$$\forall X \in \mathfrak{U}.$$

Кроме того, $\Gamma X \in End\ \mathcal{X}$ — единственное решение уравнения

$$ad_A Y = AY - YA = X - JX,$$

удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{U}$, и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|\Gamma\| \le \gamma$, $max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \le \gamma \|X\|_* \|Y\|_*$;

5) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Теорема 1. *[4] Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка, и B — некоторый оператор из пространства допустимых для A возмущений $\mathfrak{U}$. Тогда если выполнено неравенство $\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}$, то оператор $A - B$ подобен оператору $A - J\widetilde{X}$, где оператор $\widetilde{X} \in \mathfrak{U}$ является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) -$$
$$-(\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X),$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая с $X_0 = 0$, $X_1 = B$, и т.д. (оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\| \le 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J\widetilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma X \in End\ \mathcal{X}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМОЙ ТРОЙКИ

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора L_{bc}, $bc \in \{per, ap, dir\}$, свободный оператор L_{bc}^0 будем считать невозмущенным оператором. Он будет обозначаться также символом A. Таким образом, $L_{bc} = A - B$, где $B : D(L_{bc}) \subset \subset L_2\left([0,\pi], \mathbb{C}^2\right) \to L_2\left([0,\pi], \mathbb{C}^2\right)$ — оператор умножения на потенциал v (см. (1)), т.е.

$$(By)(t) = \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ Q(t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \tag{4}$$
$$y \in D(L_{bc}),\ t \in [0,\pi],\ P, Q \in L_2[0,\pi].$$

Введем в рассмотрение следующие пространства. Пусть $L_{2,\pi} = L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ — гильбертово пространство классов функций, периодических почти всюду на $\mathbb{R}$ с периодом π и суммируемых с квадратом нормы на $[0,\pi]$. Всюду в дальнейшем оно будет отождествляться с пространством $L_2([0,\pi], \mathbb{C}^2)$. Функции P и Q также будем рассматривать как элементы пространства $L_{2,\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Пусть $End\ L_{2,\pi}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $L_{2,\pi}$; $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта [7] из алгебры $End\ L_{2,\pi}$. Символом $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта—Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, т.е. $\|X\|_2 = \sqrt{\|XX^*\|}$.

Введем следующее обозначение. Пусть $E(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — группа операторов, действующих из $L_{2,\pi}$ в $L_{2,\pi}$, такая, что

$$(E(t)y)(s) = y(s)e^{its},\ y \in L_{2,\pi}, t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Замечание 1. Рассмотрим оператор $U : L_{2,\pi} \to L_{2,\pi}$,

$$(Ux)(s) = \begin{pmatrix} (E(-1)x_1)(s) \\ (E(1)x_2)(s) \end{pmatrix},$$
$$s \in [0,\pi],\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L_{2,\pi}.$$

Он является обратимым, т.к. $KerU = \{0\}$ и $ImU = L_{2,\pi}$, и обратный имеет вид $(U^{-1}x)(s) = \begin{pmatrix} (E(1)x_1)(s) \\ (E(-1)x_2)(s) \end{pmatrix}$, $s \in [0,\pi]$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L_{2,\pi}$.

Заметим, что $UD(L_{ap}) = D(L_{per})$, т.к. $(Uy)(0) = -(Uy)(\pi)$, $y \in D(L_{per})$ и $(U^{-1}y)(0) = (U^{-1}y)(\pi)$, $y \in D(L_{ap})$. Кроме того, непосредственно проверяется равенство

$$L_{ap} = U^{-1}\left(L^0_{per} - \widehat{B} - I\right)U, \tag{6}$$

где $\widehat{B}$ — оператор умножения на потенциал $\hat{v}(s) = \begin{pmatrix} 0 & (E(-2)P)(s) \\ (E(2)Q)(s) & 0 \end{pmatrix}$, $s \in [0,\pi]$. Следовательно, оператор L_{ap} подобен оператору $L^0_{per} - \widehat{B} - I$. Таким образом, по существу можно ограничиться только изучением операторов L_{per} и L_{dir}.

Итак, приступим к построению трансформаторов $J, \Gamma : \mathfrak{L}_A(L_{2,\pi}) \to \mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$ из определения 2.

Символом P_n обозначим ортогональный проектор на собственное подпространство E^0_n (см. § 1), отвечающее собственному значению $\lambda_n = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора L^0_{per}. Этот проектор имеет вид (см. формулы (2))

$$P_n x = (x, e^1_n)e^1_n + (x, e^2_n)e^2_n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Для $\lambda_n = n \in \sigma(L^0_{dir})$ ортогональный проектор P_n представим в виде (см. (3))

$$P_n x = (x, s_n)s_n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Далее будем использовать некоторые подходы из [4]—[6], связанные с гармоническим анализом линейных операторов.

Поскольку оператор A самосопряженный (см. §1), оператор iA есть генератор группы изометрий $T : \mathbb{R} \to EndL_{2,\pi}$ [4], причем имеет место следующее спектральное представление операторов этой группы изометрий: $T(t)x = T_{bc}(t)x = \sum\limits_{n \in Z} e^{i\frac{2\pi nt}{\omega}} P_n x$, $x \in L_{2,\pi}$, $t \in \mathbb{R}$, $bc \in \{per, dir\}$. В периодическом случае $\omega = \pi$, а в случае условий Дирихле $\omega = 2\pi$.

Трансформаторы J и Γ из определения 2 вначале определим на алгебре $\mathcal{B}(L_{2,\pi})$, совпадающей с одной из алгебр $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, $EndL_{2,\pi}$. С этой целью каждому оператору $X \in \mathcal{B}(L_{2,\pi})$ сопоставим периодическую периода ω сильно непрерывную операторнозначную функцию

$$t \mapsto T(t)XT(-t) : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(L_{2,\pi}), \ t \in \mathbb{R}.$$

При этом она непрерывна в равномерной операторной топологии, если $\mathcal{B}(L_{2,\pi}) = \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$.

Тем самым возникло изометрическое периодическое периода ω представление:

$$\begin{gathered} \widetilde{T} : \mathbb{R} \to End(End\ L_{2,\pi}), \\ \widetilde{T}(t) = T(t)XT(-t), \\ t \in \mathbb{R}, \ X \in \mathcal{B}(L_{2,\pi}). \end{gathered} \tag{9}$$

Её генератором является оператор ad_A со спектром $\sigma(ad_A) = i\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ (см. [4], [5]).

Для функции вида (9) рассмотрим её ряд Фурье

$$T(t)XT(-t)x \sim \sum_{n \in Z} X_n x e^{i\frac{2\pi}{\omega}nt}, \quad x \in L_{2,\pi}, \ t \in \mathbb{R},$$

где коэффициент Фурье $X_n \in \mathcal{B}(L_{2,\pi})$ имеет вид

$$X_n x = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} T(t)XT(-t)xe^{-i\frac{2\pi}{\omega}nt}dt, \quad x \in L_{2,\pi}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд $\sum\limits_{n \in Z} X_n$ назовем *рядом Фурье оператора* X (относительно группы операторов T), а операторы X_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициентами Фурье этого оператора.

Данный ряд сильно суммируем к X методом Чезаро, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) X_k x = Xx, \ x \in L_{2,\pi}.$$

Из [4], [6] следует, что каждый из операторов X_n допускает представление в виде безусловно сильно сходящегося ряда

$$X_n = \sum_{\substack{i-j=n \\ i,j \in Z}} P_i X P_j, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathcal{B}(L_{2,\pi})$ определим равенствами

$$\begin{gathered} (JX)x = (J_{bc}X)x = X_0 x = \\ = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} T_{bc}(t)XT_{bc}(-t)xdt = \sum_{n \in Z} P_n X P_n, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} (\Gamma X)x = (\Gamma_{bc}X)x = \\ = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)T_{bc}(t)XT_{bc}(-t)xdt \sim \\ \sim \sum_{\substack{n \in Z \\ n \neq 0}} \frac{\omega}{2\pi n} X_n x = \sum_{\substack{n \in Z \\ n \neq 0}} \frac{\omega}{2\pi n} \sum_{\substack{i-j=n \\ i,j \in Z}} P_i X P_j x, \\ x \in L_{2,\pi}, \ bc \in \{per, dir\}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — периодическая периода ω функция, которая при $t\in[0,\omega)$ определена как $f(t)=i\left(t-\frac{\omega}{2}\right)$.

Ряд в формуле (10) является безусловно сходящимся в сильной операторной топологии. Если $\mathcal{B}(L_{2,\pi})=\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, то $\|X\|_2^2=\sum_{n\in Z}\|X_n\|_2^2<\infty$, и поэтому ряды в формулах (10) и (11) являются сходящимися в равномерной операторной топологии.

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространство $\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$, обозначаемые теми же символами, осуществляется следующим образом. Пусть $\lambda_0\in\rho(A)$. Положим

$$JX=J(X(A-\lambda_0I)^{-1})(A-\lambda_0I),\quad X\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi}),\tag{12}$$

$$\Gamma X=\Gamma(X(A-\lambda_0I)^{-1})(A-\lambda_0I),\quad X\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi}).\tag{13}$$

Так как $X\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$, формулы определены на векторах из $D(A)$.

Это определение корректно. Действительно, любой вектор $x\in D(A)$ можно представить в виде $x=(A-\lambda_0I)^{-1}y$, где $y\in L_{2,\pi}$, $\lambda_0\in\rho(A)$. Отсюда для любого $X\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$ оператор $X(A-\lambda_0I)^{-1}\in End\ L_{2,\pi}$, а значит к нему можно применить формулы (10) и (11). Далее, определение не зависит от выбора числа λ_0 из $\rho(A)$. Докажем это для формулы (12). Пусть $\lambda_0,\mu_0\in\rho(A)$, $\lambda_0\neq\mu_0$. Покажем, что формулы $J(X(A-\lambda_0I)^{-1})(A-\lambda_0I)x$ и $J(X(A-\mu_0I)^{-1})(A-\mu_0I)x$ на векторе $x\in D(A)$ совпадают. Как уже отмечалось, любой вектор $x\in D(A)$ можно представить в виде $x=(A-\lambda_0I)^{-1}y$, $y\in L_{2,\pi}$. Тогда

$$J(X(A-\lambda_0I)^{-1})(A-\lambda_0I)x=$$
$$=J(X(A-\lambda_0I)^{-1})y=(JX)x.$$

С другой стороны, вектор $x\in D(A)$ представим в виде $x=(A-\mu_0I)^{-1}y$, $y\in L_{2,\pi}$, а значит

$$J(X(A-\mu_0I)^{-1})(A-\mu_0I)x=$$
$$=J(X(A-\mu_0I)^{-1})y=(JX)x.$$

Аналогично для формулы (11). Итак, корректность определения доказана.

Если оператор $\Gamma X\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$, $JX\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$ допускает ограниченное расширение на все $L_{2,\pi}$, то его будем обозначать тем же символом. Если $x\in D(A)$, то из (12) и (13) следует, что операторы JX и ΓX на векторе x определяются равенствами (10) и (11) соответственно.

В частности, операторы JB и ΓB на векторах $x\in D(A)$ будем определять формулами (10) и (11) соответственно. В силу того, что операторы JB и ΓB ограничены (см. лемму 2), по теореме о расширении ограниченного оператора (см. [8]), JB и ΓB имеют единственные по непрерывности расширения на $\overline{D(A)}=L_{2,\pi}$.

Для того, чтобы воспользоваться формулами (10) и (11), выясним, какой вид имеет группа T_{bc} для периодических граничных условий и условий Дирихле.

В $L_{2,\pi}$ определена группа $S(t),t\in\mathbb{R}$, операторов сдвигов функций, т.е. $(S(t)x)(s)=x(s+t)$, $s,t\in\mathbb{R}$, $x\in L_{2,\pi}$. Если $bc=per$, то, поскольку генератором группы $S:\mathbb{R}\to EndL_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ является оператор $\frac{d}{dt}$, соответствующая группа изометрий $T=T_{per}$ имеет вид

$$T_{per}(t)x=\begin{pmatrix}S(-t)x_1\\ S(t)x_2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\ t\in\mathbb{R}.\tag{14}$$

Для $bc=dir$ группа изометрий T_{dir} будет иметь вид

$$(T_{dir}x)(s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1(s-t)+x_2(t-s)\\ x_1(-s-t)+x_2(s+t)\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R},\tag{15}$$

где $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in L_{2,\pi}$. Для доказательства представления (15) достаточно заметить, что $T_{dir}(t)s_n=e^{int}s_n$, $n\in\mathbb{Z}$, где собственный вектор s_n определен формулой (3).

Лемма 2. Операторы $JB=J_{bc}(B)$, $\Gamma B=\Gamma_{bc}(B)$, $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB$, где $bc\in\{per,ap,dir\}$, являются операторами Гильберта—Шмидта.

Доказательство. Подставив выражения (14), (15) для групп T_{bc} в формулы (10), (11) и посчитав соответствующие интегралы, получим следующие представления операторов $JB=J_{bc}B$, $\Gamma B=\Gamma_{bc}B$, где $bc\in\{per,dir\}$.

$$((J_{per}B)x)(s)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}0 & P(\frac{s+\tau}{2})\\ Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(\tau)\\ x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau,\tag{16}$$

$$((\Gamma_{per}B)x)(s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)P(\frac{s+\tau}{2}) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)Q(\frac{s+\tau}{2}) & 0 \end{pmatrix}\cdot \tag{17}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau)\end{pmatrix}d\tau,$$

$$((J_{dir}B)x)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}K_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{18}$$
$$x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\ \ s\in[0,\pi],$$

$$((\Gamma_{dir}B)x)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{4\pi}\widetilde{K}_{dir}(s,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{19}$$
$$x \in L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}^2),\ \ s\in[0,\pi],$$

где

$$K_{dir}(s,\tau) = \begin{pmatrix} \Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & \Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K}_{dir}(s,\tau) =$$
$$= \begin{pmatrix} f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right)\end{pmatrix},$$

$$\Phi(u) = \frac{P(u)+Q(-u)}{2},\ \ \Phi \in L_{2,\pi}(R,C),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \in L_{2,\pi},\ \ s\in[0,\pi],$$

$$f(t) = i(\tfrac{\pi}{2}-t),\ \ t\in[0,\pi),\ \ f\in L_{2,\pi}(\mathbb{R}).$$

Из приводимых формул (16)—(19) следует (путем перемножения функций), что операторы $B\Gamma_{per}B$, $B\Gamma_{dir}B$ являются интегральными соответственно с ядрами $\widetilde{K}_{per}$, $\widetilde{K'}_{dir}$ вида

$$\widetilde{K}_{per} =$$
$$= \begin{pmatrix} f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)P(s)Q\left(\frac{s+\tau}{2}\right) & 0 \\ 0 & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)Q(s)P\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\widetilde{K'}_{dir} =$$
$$= \begin{pmatrix} f\left(\frac{\tau-s}{2}\right)P(s)\Phi\left(\frac{-s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{-s-\tau}{2}\right)P(s)\Phi\left(\frac{-s+\tau}{2}\right) \\ f\left(\frac{s+\tau}{2}\right)Q(s)\Phi\left(\frac{s-\tau}{2}\right) & f\left(\frac{s-\tau}{2}\right)Q(s)\Phi\left(\frac{s+\tau}{2}\right)\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Ввиду принадлежности функций P и Φ пространству $L_{2,\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, непрерывности функций $\int_0^{4\pi}\left|\Phi\left(\frac{\pm s\pm\tau}{2}\right)\right|^2 d\tau$ и ограниченности функции f, из приведенных формул (16)—(21) следует, что все рассматриваемые интегральные операторы являются операторами Гильберта—Шмидта (элементами пространства $\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$). Используется стандартный критерий принадлежности интегрального оператора идеалу операторов Гильберта—Шмидта [7].

Из доказанной леммы и результатов [9] следует

Лемма 3. *Пространство $\mathcal{B}(L_{2,\pi})$, трансформаторы $J,\Gamma:\mathcal{B}(L_{2,\pi})\to\mathcal{B}(L_{2,\pi})$, определяемые формулами (10), (11), образуют допустимую тройку $(\mathcal{B}(L_{2,\pi}),J,\Gamma)$ для оператора A.*

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее воспользуемся результатами статьи [10]. Пусть $(\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}),J,\Gamma)$ — построенная в предыдущем параграфе допустимая тройка, причем трансформаторы $J,\Gamma:\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})\to\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ допускают расширение на $\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$ (см. формулы (12), (13)). Тогда имеет место равенство [4]

$$(A-B)\exp\Gamma B = \\ = \exp\Gamma B(A - JB - \phi_1(ad_{\Gamma B})B - \phi_2(ad_{\Gamma B})JB), \tag{22}$$

где $ad_X Y = XY - YX$, $X,Y\in\mathfrak{L}_A(L_{2,\pi})$, , $\phi_1,\phi_2,\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — целые функции, определяемые как $\phi_1(z)=\phi(z)-\exp(-z)$, $\phi_2(z)=1-\phi(z)$, $\phi(z)=z^{-1}(1-\exp(-z))$, $z\in\mathbb{C}$, а $\phi_1(ad_{\Gamma B})$ и $\phi_2(ad_{\Gamma B})$ — функции от линейного оператора $ad_{\Gamma B}$ [4]. В следующей теореме под $ad^n_{\Gamma B}$ понимается степень оператора $ad_{\Gamma B}$ в обычном смысле.

Теорема 2. *Оператор $A-B$ подобен оператору $A-JB-B_1=A-\widetilde{B}$, где*

$$B_1 = \sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n+1}ad^n_{\Gamma B}B}{(n-1)!(n+1)} + \\ +\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}ad^n_{\Gamma B}JB}{(n+1)!}\in\mathfrak{S}_2(L_{2,\pi}). \tag{23}$$

Доказательство. Из формулы (22) следует подобие операторов $A-B$ и $A-JB-\phi_1(ad_{\Gamma B})B-\phi_2(ad_{\Gamma B})JB$. Разложив функцию $\exp(-z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля, получим, что $\phi_1(z)=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{(n-1)!(n+1)}$, а $\phi_2(z)=\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{(n+1)!}$. Отсюда справедлива формула (23). Наконец, принадлежность оператора B_1 идеалу операторов Гильберта-Шмидта следует из леммы 2. □

Применив преобразование подобия вида (22) еще раз, уже к оператору $A - \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, и проведя рассуждения, аналогичные доказательству предыдущей теоремы, получим

Теорема 3. Оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - JB_1 - \widetilde{B}_1$, где

$$\widetilde{B}_1 = \sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^{n+1} ad^n_{\Gamma\widetilde{B}}\widetilde{B}}{(n-1)!(n+1)} + \sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^{n+1} ad^n_{\Gamma\widetilde{B}} J\widetilde{B}}{(n+1)!}.$$

Обозначим через TrX спектральный след оператора $X \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, где $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ — идеал ядерных операторов (т.е. операторов с конечным следом) [7]. Пусть $L_{bc} \mid ImP_n$ и $L^0_{bc} \mid ImP_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — сужения операторов $L_{bc} = A - B$ и $L^0_{bc} = A$ на подпространство, образованное образом проектора P_n. Это подпространство двумерно в периодическом и антипериодическом случаях и одномерно при граничных условиях Дирихле (см. формулы (7) и (8)).

Теорема 4. *Для оператора L_{bc} справедлива следующая формула регуляризованного следа:*

$$\sum_{n\in Z}\Big(Tr(L_{bc} \mid ImP_n) - Tr(L^0_{bc} \mid ImP_n) + +Tr(P_nJBP_n) + Tr(P_nCP_n)\Big) = 0, \tag{24}$$

где $C = \frac{1}{2}((\Gamma B)B - B(\Gamma B))$.

Доказательство. Из теоремы 3 оператор $A - B$ подобен оператору $A - JB - JB_1 - \widetilde{B}_1$. Согласно теореме 2, $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Тогда для трансформаторов $J, \Gamma :\to \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ будет выполняться, что $J\tilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$, $\Gamma\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$. Так как произведение двух операторов Гильберта—Шмидта есть ядерный оператор, (см. [7]), $ad^n_{\Gamma\widetilde{B}}\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, $ad^n_{\Gamma\widetilde{B}}J\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, $\widetilde{B}_1 \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, $n \ge 1$. В силу того, что $Tr(XY - YX) = 0$, где $XY, YX \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, получим, что $Tr\widetilde{B}_1 = 0$. Далее, $ad^n_{\Gamma B}B \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ при $n \ge 2$, а $ad^n_{\Gamma B}JB \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ для $n \ge 1$. Так как у ядерного оператора матричный и спектральный следы совпадают, т.е. $Tr(JX) = Tr(X)$, $X \in \mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$, получим, что $Tr(JB_1 - C) = Tr(JB_1 - \frac{1}{2}((\Gamma B)B - B(\Gamma B))) = 0$. Итак, формула (24) доказана. □

Теперь встает задача посчитать $Tr(P_nJBP_n)$ и $Tr(P_nCP_n)$. В дальнейшем будем использовать операторные матрицы (X_{ij}) оператора X, составленные из операторных блоков $X_{ij} = P_iXP_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. В случае $bc = dir$, т.е. когда размерность образа ImP_k каждого ортопроектора P_k $(k \in \mathbb{Z})$ равна 1 (см. формулы (8)),

$$X_{ij}x = \left(P_iXP_j\right)x = \left(XP_jx, e_i\right)e_i = = (Xe_j, e_i)(x, e_j)e_i = (x_{ij})(x, e_j)e_i, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

где (x_{ij}) — Числовая матрица оператора X относительно базиса e_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $bc \in \{per, ap\}$, т.е. $\dim ImP_k = 2(k \in \mathbb{Z})$ (см. формулу (7)), то будем рассматривать блочные числовые матрицы

$$(\tilde{x}_{ij}),\ i, j \in \mathbb{Z},$$

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{pmatrix} (Xe^1_j, e^1_i) & (Xe^2_j, e^1_i) \\ (Xe^1_j, e^2_i) & (Xe^2_j, e^2_i) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $e^1_i, e^2_i i \in \mathbb{Z}$, — ортонормированный базис в $\operatorname{Im} P_i$, $i = 1, 2$.

Пусть p_m, q_m — коэффициенты Фурье функций P и Q, т.е.

$$P(x) = \sum_{m\in Z} p_m e^{i2mx},\ \ Q(x) = \sum_{m\in Z} q_m e^{i2mx}.$$

Рассмотрим периодический случай $bc = per$. Вычислим матрицу оператора B (см. (4)) с помощью формулы (25).

$$(Be^1_k, e^1_n) = 0,$$

$$(Be^2_k, e^1_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P(t)e^{-2i(k+n)t}dt = p_{-(k+n)},$$

$$(Be^1_k, e^2_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q(t)e^{2i(k+n)t}dt = q_{k+n},$$

$$(Be^2_k, e^2_n) = 0.$$

Значит, матрица $(\tilde{b}_{ij})$ оператора B в периодическом случае имеет вид

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & p_{-(i+j)} \\ q_{i+j} & 0 \end{pmatrix},$$

Из формулы (11) следует, что матрица $(\widetilde{\Gamma b}_{ij})$ оператора ΓB имеет вид

$$\widetilde{\Gamma b}_{ij} = \frac{1}{2(i-j)}\begin{pmatrix} 0 & p_{-(i+j)} \\ q_{i+j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, из двух предыдущих формул следует, что матрица оператора $B\Gamma B$ будет выглядеть следующим образом:

$$(\widetilde{b\Gamma b})_{ij} = \sum_{k\ne j} \tilde{b}_{ik}\widetilde{\Gamma b}_{kj} =$$

$$= \sum_{k\ne j} \frac{1}{2(k-j)}\begin{pmatrix} p_{-(i+k)}q_{k+j} & 0 \\ 0 & q_{i+k}p_{-(k+j)} \end{pmatrix}.$$

Аналогично матрица оператора $(\Gamma B)B$ будет выражаться как

$$((\widetilde{\Gamma b})b)_{ij} = \sum_{k\neq j}\widetilde{\Gamma b}_{ik}\tilde{b}_{kj} =$$

$$= \sum_{k\neq j}\frac{1}{2(i-k)}\begin{pmatrix} p_{-(i+k)}q_{k+j} & 0 \\ 0 & q_{i+k}p_{-(k+j)} \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение последовательность

$$\omega_j = p_{-j}q_j,\ j\in\mathbb{Z}. \tag{26}$$

Тогда диагональная матрица оператора $D_{per} = \frac{1}{2}J((\Gamma B)B - B(\Gamma B))$ имеет вид

$$(\tilde{d}_{per})_{nn} = -\sum_{k\neq 0}\frac{1}{2k}\begin{pmatrix} \omega_{2n+k} & 0 \\ 0 & \omega_{2n+k} \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{Z}. \tag{27}$$

Из формулы (10) следует представление диагональной матрицы $(\widetilde{Jb}_{ij})$ оператора JB:

$$\widetilde{Jb}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & p_{-2i} \\ q_{2i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда собственные значения оператора JB имеют вид $\{\pm\sqrt{\omega_{2n}}\}$.

В антипериодическом случае, т.е. при $bc = ap$, используя формулу (6) можно получить, что диагональная матрица оператора $D_{ap} = \frac{1}{2}J((\Gamma B)B - B(\Gamma B))$ будет выглядеть следующим образом:

$$(\tilde{d}_{ap})_{nn} = -\sum_{k\neq 0}\frac{1}{2k}\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{2n+k} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{2n+k} \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{Z}, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\omega}_n = p_{-n+1}q_{n-1},\ j\in\mathbb{Z}. \tag{29}$$

Собственные значения оператора JB имеют вид $\{\pm\sqrt{\tilde{\omega}_{2n}}\}$.

Рассмотрим случай $bc = dir$. Матрица (b_{ij}) оператора B будет иметь вид

$$b_{nj} = (Bs_n, s_j) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi P(t)e^{i(n+j)t}dt + \int_0^\pi Q(t)e^{-i(n+j)t}dt\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{-\frac{n+j}{2}} + q_{\frac{n+j}{2}}), & n+j\in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}(\tilde{p}_{-\frac{n+j+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+j+1}{2}}), & n+j\in 1+2\mathbb{Z}. \end{cases} =$$

$$= \theta_{n+j},$$

где $\tilde{p}_j,\ \tilde{q}_j,\ j\in\mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функций $E(-1)P,\ E(1)Q\in L_{2,\pi}(\mathbb{R}),\ t\in\mathbb{R}$, (см. формулу (5)) по ортонормированному базису $e_k(s) = \exp 2iks,\ k\in\mathbb{Z}$,

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_{-\frac{n}{2}} + q_{\frac{n}{2}}), & n\in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}(\tilde{p}_{-\frac{n+1}{2}} + \tilde{q}_{\frac{n+1}{2}}), & n\in 1+2\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{30}$$

Тогда диагональная матрица оператора $\mathrm{D}_{dir} = \frac{1}{2}J((\Gamma B)B - B(\Gamma B))$ представима в виде

$$(\tilde{d}_{dir})_{nn} = -\sum_{k\neq 0}\tfrac{\theta^2_{2n+k}}{k},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Собственные значения оператора JB равны $\{\theta_{2n}\}$.

Таким образом, из вида собственных значений оператора JB следует, что $Tr(P_nJBP_n) = 0$ при $bc\in\{per, ap\}$ и $Tr(P_nJBP_n) = \theta_{2n}$, если $bc = dir$. Из формул (27), (28), (31) получаем, что $Tr(P_nC_{per}P_n) = -2\sum_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}$, $Tr(P_nC_{ap}P_n) = -2\sum_{k\neq 0}\frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k}$, $Tr(P_nC_{dir}P_n) = -\sum_{k\neq 0}\frac{\theta^2_{2n+k}}{k}$, а значит из теоремы 4, учтя вид спектра невозмущенного оператора L^0_{bc} (см. § 1), следует теорема 5.

В ней, а также в последующих теоремах, будем использовать следующие обозначения. Через $\hat{\lambda}^{bc}_n$, $bc\in\{per, ap\}$, $n\in\mathbb{Z}$, обозначим число $\frac{1}{2}Tr(L_{bc}\mid ImP_n)$, т.е. половину суммы собственных значений сужения оператора L_{bc} на образ проектора P_n, а через λ^{dir}_n — собственное значение оператора L_{dir}.

Теорема 5. *Справедливы следующие формулы регуляризованных следов:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\hat{\lambda}^{per}_n - 2n - \sum_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}\right) = 0, \tag{32}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\hat{\lambda}^{ap}_n - (2n-1) - \sum_{k\neq 0}\frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k}\right) = 0, \tag{33}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\lambda^{dir}_n - n + \theta_{2n} - \sum_{k\neq 0}\frac{\theta^2_{2n+k}}{k}\right) = 0, \tag{34}$$

где последовательности (ω_n), $(\tilde{\omega}_n)$, (θ_n) определены соответственно формулами (26), (29), (30).

Теорема 6. *Пусть ряды* $\sum_{n\in Z}\sum_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}$, $\sum_{n\in Z}\sum_{k\neq 0}\frac{\tilde{\omega}_{2n+k}}{2k}$, $\sum_{n\in Z}\sum_{k\neq 0}\frac{\theta^2_{2n+k}}{k}$ *абсолютно сходятся. В частности, пусть найдется такое число $a > \frac{1}{2}$ и конечные константы $C_1, C_2 > 0$, что*

$$|\,p_n\,|\le\frac{C_1}{1+|\,n\,|^a},\ \ |\,q_n\,|\le\frac{C_2}{1+|\,n\,|^a}. \tag{35}$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\hat{\lambda}^{per}_n - 2n\right) = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{\lambda}_n^{ap}-(2n-1)\right)=0, \qquad (37)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_n^{dir}-n+\theta_{2n}\right)=0. \qquad (38)$$

Пусть, кроме того, ряды Фурье функций P и Q сходятся в точке $x_0=0$. В частности (см. [11]), функции P и Q дифференцируемы в нуле справа и в точке π слева. Тогда формулу (38) *можно записать в виде*

$$\sum_{n\in Z}\left(\lambda_n^{dir}-n\right)=-\frac{1}{4}(P(x_0+0)+ \qquad (39)$$
$$+P(x_0-0)+Q(x_0+0)+Q(x_0-0)).$$

Если, к тому же, $P(0)=P(\pi)$ и $Q(0)=Q(\pi)$, то (38) *преобразуется в*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_n^{dir}-n\right)=-\frac{1}{2}(P(0)+Q(0)). \qquad (40)$$

Доказательство. Пусть $bc=per$. Если выполнены условия (35), то, по признаку сравнения положительного числового ряда (с неравенством), повторный ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{|\omega_{2n+k}|}{|2k|}$ сходится или расходится одновременно с повторным рядом $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{|2n+k|^{2a}|k|}$, $a>\frac{1}{2}$. Для данного $a>\frac{1}{2}$ найдутся такие числа $c>\frac{1}{2}$, $b>0$, что справедливо неравенство $|2n+k|^a\geq|2n|^c|k|^b$, из которого следует, что $\frac{1}{|2n+k|^a|k|}\leq\frac{1}{|2n|^{\alpha}|k|^{\beta}}$, где $\alpha>1$, $\beta>1$. Значит, по признаку сравнения (с неравенством), ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{|2n+k|^{2a}|k|}$, а значит и исходный ряд, сходятся. Из абсолютной сходимости повторного ряда следует, что суммирование можно проводить в любом порядке, а значит $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{\omega_{2n+k}}{2k}=\sum\limits_{k\neq 0}\frac{1}{k}m_{n\in Z}\omega_{2n+k}=0$. Аналогично в случаях $bc=ap$, $bc=dir$. Таким образом, из теоремы 5 следуют доказываемые равенства. □

Введем понятие свертки функций $f*g$, $f,g\in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$, определяемой формулой $(f*g)(t)=\int\limits_0^{\pi}f(s)g(t-s)ds.$

В следующей теореме будут использоваться следующие обозначения: $E(t)$, $t\in\mathbb{R}$ — группа операторов из $L_{2,\pi}$, определяемых формулой (5); P^- — функция из $L_{2,\pi}$, определяемая как $P^-(t)=P(-t)$, $t\in\mathbb{R}$; $F:L_{2,\pi}(\mathbb{R})\to L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ — оператор, который каждой функции $g\in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ ставит в соответствие функцию $(Fg)(t)=\frac{1}{2}(g(t)+g(t+\frac{\pi}{2}))$; $f\in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ — функция, при $t\in[0,\pi)$ имеющая вид $f(t)=i(t-\frac{\pi}{2})$. Пусть $f_1,f_2,f_3:L_{2,\pi}(\mathbb{R})\to L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ — функции, имеющие вид

$$f_1=F((P^-*Q)f),$$
$$f_2=F((E(-2)P^-*E(2)Q)f),$$
$$f_3=\frac{1}{4}\Big(F((P^-*P^-+2P^-*Q+Q*Q)f+ \qquad (41)$$
$$+(E(-1)P^-*E(-1)P^-+2E(-1)P^-*$$
$$*E(1)Q+E(1)Q*E(1)Q)E(1)f)\Big).$$

Теорема 7. *Если ряды Фурье функций f_1,f_2,f_3, заданных формулами (41), сходятся в точке нуль (в частности, эти функции дифференцируемы в нуле), то справедливы следующие формулы регуляризованных следов:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{\lambda}_n^{per}-2n\right)=f_1(0), \qquad (42)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{\lambda}_n^{ap}-(2n-1)\right)=f_2(0), \qquad (43)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_n^{dir}-n+\theta_{2n}\right)=f_3(0). \qquad (44)$$

Для формулы (44) справедливы уточнения, аналогичные формулам (39) и (40) для (38).

Доказательство. Пусть $bc=per$. Выразим $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\neq 0}\frac{p_{-(2n+k)}q_{2n+k}}{2k}$ через функции P и Q. Во-первых, заметим, что $(P^-*Q)(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}p_{-k}q_ke^{2ikt}$. Тогда $\sum\limits_{k\neq 0}\frac{p_{-(2n+k)}q_{2n+k}}{2k}=-\sum\limits_{k\neq 0}\frac{p_{-(2n-k)}q_{2n-k}}{2k}=((P^-*Q)f)_{2n}$ — $2n$-ый коэффициент Фурье функции $(P^-*Q)f$, где $f\in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$ — почти периодическая периода π функция, коэффициенты Фурье которой выражаются как $f_k=-\frac{1}{2k}$. При $t\in[0,\pi)$ эта функция имеет вид $f(t)=i(t-\frac{\pi}{2})$.

Рассмотрим линейный оператор $F:L_{2,\pi}(\mathbb{R})\to L_{2,\pi}(\mathbb{R})$, заданный формулой $\tilde{g}(t)=(Fg)(t)=\frac{1}{2}(g(t)+g(t+\frac{\pi}{2}))$, $g\in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$. Тогда коэффициент Фурье функции $\tilde{g}$ будет иметь вид

$$\tilde{g}_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}g(t)e^{-2ikt}dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}g(t+\frac{\pi}{2})e^{-2ikt}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}g(t)e^{-2ikt}dt+$$

$$+e^{ik\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(t)e^{-2ikt}dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}g(t-\pi)e^{-2ikt}dt\right)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)e^{-2ikt}dt + e^{ik\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)e^{-2ikt}dt =$$

$$= \begin{cases} g_n, & n \in 2\mathbb{Z}, \\ 0, & n \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

Таким образом $\tilde{g}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{2k}e^{4ikt}$. Значит

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\neq 0} \frac{p_{-(2n+k)}q_{2n+k}}{2k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}((P^- * Q)f)_{2n} =$$

$$= (F((P^- * Q)f))(0).$$

Из предыдущего выражения и формулы (32) следует (42).

Если $bc = ap$, то из формулы (6) следует, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\neq 0} \frac{p_{-(2n+k)+1}q_{2n+k-1}}{2k} =$$

$$= F((E(-2)P^- * E(2)Q)f)(0).$$

Используя (33), получим (43).

Пусть теперь $bc = dir$.

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\theta_{2n+k}^2}{k} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{(p_{-(j+n)} + q_{j+n})^2}{8j} +$$

$$+\sum_{j\in Z}\frac{(\tilde{p}_{-(j+n)} + \tilde{q}_{j+n})^2}{4(2j-1)}.$$

Отсюда, проведя аналогичные периодическому случаю рассуждения, получим формулу (44). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В. А.* Следы операторов / В. А. Садовничий, В. Е. Подольский // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61. — № 5. — с. 89—156.

2. *Mityagin B. S.* Spectral expansions of one dimensional periodic Dirac operators / B. S. Mityagin // Dyn. Partial Differ. Equ. — 2004. — V. 1. — № 2. — P. 125—191.

3. *Джаков П.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака / Джаков П., Митягин Б. С. // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61. — № 4. — с. 77—182.

4. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

5. *Баскаков А. Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые, смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50. — № 3. — С. 435—457.

6. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущённых неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Известия РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 3—32.

7. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн — М.: Наука, 1965. — 448 с.

8. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов / А. Г. Баскаков // Известия ВУЗов. — 1984. — № 3. — С. 3—11.

9. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер — М.: Мир, 1982. — 488 с.

10. *Пыркова М. С.* Метод подобных операторов в спектральном анализе возмущенных линейных операторов и некоторых классов дифференциальных операторов: дисс... канд. физ.-мат. наук / М. С. Пыркова — Воронеж, 2006.

11. *Колмогоров А. Н* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1976. — 543 с.

Щербаков Александр Олегович — студент кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, ВГУ, тел. 8 910 345 56 91, e-mail: shcherbakovAO@list.ru

Shcherbakov Alexander O. — student, Voronezh State University, tel. 8 910 345 56 91, e-mail: shcherbakovAO@list.ru.