УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ УТОЧНЕННОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

Т. Д. Семыкина, Л. П. Цуканова

Воронежский государственный университет
Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 30.03.2010 г.

Аннотация. Для трансверсально-анизотропных оболочек теория Кирхгофа—Лява не позволяет учесть анизотропные свойства материала, поэтому вводится уточненная итерационная теория [1], что значительно усложняет расчет оболочек с использованием общих уравнений. В работе выписывается полная энергия оболочки через деформации, определенные по уточненной теории. В качестве примера использования этого функционала и выбора допустимых перемещений приводится пологая сферическая оболочка.
Ключевые слова: оболочка, трансверсально-изотропный материал, уточненная итерационная теория, пологая сферическая оболочка.

Abstract. For transversal-isotropic shells theory of Kirhgofa—Lyava doesn't let to take into account the anisotropic characteristics of material, so the defined iterative theory [1] is introduced that extremely complicates the calculus of shells with the usage of common equations. The article traces out the full shell energy through deformation tested according to defined theory. As an example of using this function and choosing the permissible transferences flat spherical shell is used.
Key word: shell, transversal-isotropic material, defined iterative theory, flat spherical shell.

1. В отличие от расчета изотропных оболочек при учете анизотропных свойств материала частично отказываются от кинематических гипотез Кирхгофа-Лява, принимая наличие сдвиговых деформаций $e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ в виде [1]

$$e_{\alpha z} = \frac{1}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\varphi(\alpha,\beta),\qquad e_{\beta z} = \frac{1}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\psi(\alpha,\beta), \tag{1}$$

здесь α, β — криволинейная система координат в срединной поверхности оболочки, z — нормальное к оболочке направление, h — толщина оболочки, G' — модуль сдвига в плоскости, ортогональной срединной поверхности.

Определяя касательные напряжения, соответствующие деформациям (1) и определяя результирующие этих напряжений (поперечные силы Q_1 и Q_2), получим

$$\varphi = \frac{12}{h^3}Q_1^0,\ \ \psi = \frac{12}{h^3}Q_2^0. \tag{2}$$

Итерационная теория расчета предполагает, что Q_1^0 и Q_2^0 определяются согласно классической теории изотропных оболочек.

Деформация нормальных волокон e_z как и в гипотезах Кирхгофа-Лява принимается нулевой. Из сделанных предположений следует закон изменения перемещений по толщине оболочки и вид деформаций:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + (z - k_1 z^2)\chi_1 + \frac{h^2}{8AG'}\left[\left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{h^2}\right)\frac{\partial k_1\varphi}{\partial\alpha} + \left(z^2 - \frac{4z^4}{3h^2}\right)\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\varphi\right] + \frac{h^2\psi}{8BG'}\left[\left(z - \frac{4z^3}{3h^2} - \frac{k_2z^2}{2} - \frac{k_2z^4}{h^2}\right)\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \left(z^2 - \frac{4z^4}{3h^2}\right)\frac{\partial k_1}{\partial\beta}\right].$$

Для ε_β справедлива формула, аналогичная предыдущей после замены в ней местами α и β, A и B, φ и ψ, индексы *1* и *2*.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \omega + \left[z - \frac{z^2}{2}(k_1 + k_2)\right]\tau + \frac{h^2}{8G'}\frac{A}{B}\times \left[\left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi}{A}\right) - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{h^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{k_1\varphi}{A}\right) + \right.$$

$$+\left(z^2-\frac{4z^4}{3h^2}\right)(k_1-k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi}{A}\right)\Bigg]+$$
$$+\frac{h^2}{8G'}\frac{B}{A}\left[\left(z-\frac{4z^3}{3h^2}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\psi}{B}\right)-\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{h^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{k_2\psi}{B}\right)+\left(z^2-\frac{4z^4}{3h^2}\right)(k_2-k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\psi}{B}\right)\right], \quad (3)$$

здесь ε_1, ε_2, ω — деформации оболочки, выраженные через перемещения срединной поверхности по формулам классической теории оболочек.

Подсчитаем удельную энергию оболочки, чтобы в дальнейшем использовать это выражение в вариационном уравнении, при этом не учитываются известные из классической теории члены $e_{\alpha z}\cdot\tau_{\alpha z}$, $e_{\beta z}\cdot\tau_{\beta z}$.

$$V=\frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_\alpha e_\alpha+\sigma_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+\sigma_\beta e_\beta)dz. \quad (4)$$

Выразим напряжения в плоскости изотропии свойств материала с помощью закона Гука

$$\sigma_\alpha=\frac{E}{1-\nu^2}(e_\alpha+\nu e_\beta),\ \ \sigma_\beta=\frac{E}{1-\nu^2}(e_\beta+\nu e_\alpha),$$
$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{E}{2(1+\nu)}e_{\alpha\beta}.$$

Окончательно варьируемая часть удельной упругой энергии примет вид

$$V=\frac{1}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(e_\alpha^2+2\nu e_\alpha e_\beta+e_\beta^2+\frac{1-\nu}{2}e_{\alpha\beta}^2\right)dz. \quad (5)$$

После подстановки (3) в (5) функционал V принимает вид

$$\begin{aligned}
V=\frac{1}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\Bigg(&\varepsilon_1^2h-\frac{k_1h^3}{6}\varepsilon_1\chi_1+\frac{h^3}{12}\chi_1{}^2+\\
&+\frac{h^5}{80}k_1{}^2\chi_1{}^2+\varepsilon_2^2h-\frac{k_2h^3}{6}\varepsilon_2\chi_2+\frac{h^3}{12}\chi_2{}^2+\\
&+\frac{h^5}{80}k_2{}^2\chi_2{}^2-\frac{1-\nu}{2}\frac{\omega\tau h^3}{12}(k_1+k_2)+\\
&+\frac{1-\nu}{2}\left[\omega^2h+\tau^2\left(\frac{h^3}{12}+\frac{h^5}{320}(k_1+k_2)^2\right)\right]+\\
&+2\nu\left[\varepsilon_1\varepsilon_2h-\frac{k_2h^3}{12}\varepsilon_1\chi_2-\right.\\
&\left.-\frac{k_1h^3}{12}\varepsilon_2\chi_1+\chi_1\chi_2\left(\frac{h^3}{12}+\frac{k_1k_2h^5}{80}\right)\right]+\\
&+\frac{h^5}{4AG'}\varepsilon_1\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\varphi-\frac{7}{240}\frac{\partial k_1\varphi}{\partial\alpha}\right)+\\
&+\frac{h^5}{4BG'}\varepsilon_2\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\psi-\frac{7}{240}\frac{\partial k_2\psi}{\partial\beta}\right)+\\
&+\frac{h^5}{4BG'}\varepsilon_1\psi\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_1}{\partial\beta}-\frac{7}{240}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\\
&+\frac{h^5}{4AG'}\varepsilon_2\varphi\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_2}{\partial\alpha}-\frac{7}{240}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\\
&+\frac{h^5}{4AG'}\frac{1}{15}\left(\chi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\chi_2\varphi\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\\
&+\frac{h^5}{4BG'}\frac{1}{15}\left(\chi_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\chi_1\psi\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\\
&+2\nu\left[\frac{h^5}{8BG'}\varepsilon_1\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\psi-\frac{7}{240}\frac{\partial k_2\psi}{\partial\beta}\right)+\right.\\
&+\frac{h^5}{8AG'}\varepsilon_2\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\varphi-\frac{7}{240}\frac{\partial k_1\varphi}{\partial\alpha}\right)+\\
&+\frac{h^5}{8AG'}\varepsilon_1\varphi\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_2}{\partial\alpha}-\frac{7}{240}k_1\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\\
&+\frac{h^5}{8BG'}\varepsilon_2\psi\left(\frac{1}{15}\frac{\partial k_1}{\partial\beta}-\frac{7}{240}k_2\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\\
&+\frac{h^5}{8BG'}\chi_1\frac{1}{15}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{h^5}{8BG'}\frac{1}{15}\chi_2\psi\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\\
&\left.\frac{h^5}{8AG'}\chi_1\varphi\frac{1}{15}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{h^5}{8AG'}\chi_2\frac{1}{15}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right]+\\
&+\frac{1-\nu}{2}\frac{h^5}{4G'}\left[\frac{A}{B}\omega\times\right.\\
&\times\left[\frac{1}{15}(k_1-k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi}{A}\right)-\frac{7}{240}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{k_1\varphi}{A}\right)\right]+\\
&+\frac{B}{A}\omega\left[\frac{1}{15}(k_2-k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\psi}{B}\right)-\frac{7}{240}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{k_2\psi}{B}\right)\right]+\\
&\left.+\frac{1}{15}\frac{A}{B}\tau\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi}{A}\right)+\frac{1}{15}\frac{B}{A}\tau\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\psi}{B}\right)\right]\Bigg).
\end{aligned} \quad (6)$$

Вид функции V будет совпадать с удельной потенциальной энергией изотропной оболочки в рамках классической теории $(\varphi=\psi=0)$ с точностью до членов третьего порядка относительно толщины, что соответствует линейному распределению деформации в классической теории.

В формулу (6) для потенциальной энергии оболочки входят члены, содержащие производные от неизвестных функций u, w не выше второго порядка, что в общем случае дает возможность решать вариационное уравнение Лагранжа методом конечных элементов, принимая в качестве аппроксимирующих функций полиномы Эрмита.

При осесимметричном деформировании цилиндрических оболочек формула (6) переходит в формулу для удельной потенциальной энергии, полученную в [2].

Рассмотрим деформирование пологих симметричных оболочек из трансверсально-изотропного материала.

2. В качестве примера получим вариационное уравнение для пологой сферической оболочки. В рамках общепринятых гипотез для пологих оболочек вводятся полярные координаты в ортогональной к оси оболочки плоскости (r,θ) [3].

Ввиду пологости оболочки принимается $ds_1 = Ad\alpha = dr$, $ds_2 = Bd\beta = rd\theta$. Отсюда в новой системе координат можно принять $A = 1$, $B = r$.

Для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$, $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{R}$. При симметричном нагружении $\varphi = \varphi(r)$, $\psi = 0$.

Учитывая сказанное, для пологой оболочки (6) перепишется в виде

$$V = \frac{1}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_1^2 h + \frac{h^3}{12}\chi_1^{\ 2} - \frac{h^3}{6R}\varepsilon_1\chi_1 + \right.$$
$$+\chi_1^{\ 2}\frac{h^5}{80R^2} + 2\nu\left[\varepsilon_1\varepsilon_2 h - (\varepsilon_1\chi_2 + \varepsilon_2\chi_1)\frac{h^3}{12R} + \right.$$
$$\left.+\chi_1\chi_2\left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80R^2}\right)\right] + \varepsilon_2^{\ 2}h - \varepsilon_2\chi_2\frac{h^3}{6R} + \chi_2^{\ 2}\frac{h^3}{12} + \tag{7}$$
$$+\frac{h^5}{80R^2}\chi_2^{\ 2} + \frac{h^5}{4G'}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right)\left(\frac{1}{15}\chi_1 - \frac{7}{240R}\varepsilon_1\right) +$$
$$\left.+\frac{h^5}{4G'}\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right)\left(\frac{1}{15}\chi_2 - \frac{7}{240R}\varepsilon_2\right)\right].$$

Выпишем вариационное уравнение Лагранжа для пологой сферической оболочки

$$\delta(2\pi\int_{R_1}^{R_2} Vrdr - A_p) = 0, \tag{8}$$

здесь V вычисляется относительно кинематически допустимых перемещений, R_1, R_2 — границы изменения r, A_p — работа внешних заданных сил на кинематически допустимых перемещениях.

При задании вида кинематически допустимых перемещений необходимо учитывать решение для изотропной оболочки. В [4] рассмотрена задача о деформировании сферического колпачка под действием равномерного внутреннего давления. Решение получено в бесконечных числовых рядах по аргументу r.

По аналогии с изотропным решением допустимые перемещения $u(r)$, $w(r)$ $(v = 0)$ могут быть заданы в степенных рядах с неопределенными коэффициентами

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\left(\frac{r}{R}\right)^i,\ w = \sum_{i=0}^{\infty} B_i\left(\frac{r}{R}\right)^i. \tag{9}$$

Заметим, что в вершине купола при $r = 0$ $u = 0$, $\dfrac{dw}{dr} = 0$. Отсюда следует, что $A_0 = B_1 = 0$.

Для пологих сферических оболочек деформации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{dr} - \frac{w}{R},\ \varepsilon_2 = \frac{u}{r} - \frac{w}{R}; \\ \chi_1 &= -\frac{d^2w}{dr^2},\ \chi_2 = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (9) в (10), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R}\sum_{i=0}^{\infty}\left(iA_i - B_i\frac{r}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{i-1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R}\sum_{i=0}^{\infty}\left(A_i - B_i\frac{r}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{i-1}; \\ \chi_1 &= -\frac{1}{R^2}\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)B_i\left(\frac{r}{R}\right)^{i-2}, \\ \chi_2 &= -\frac{1}{R^2}\sum_{i=2}^{\infty} iB_i\left(\frac{r}{R}\right)^{i-2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно уточненным гипотезам функция φ с точностью до известного множителя совпадает с перерезывающей силой Q_1 (см. формулу (2)) для изотропной оболочки. Q_1 может быть выражено с помощью уравнения равновесия через моменты, которые, в свою очередь, определяются через кривизны, т.е. вторые производные от прогибов, следовательно, функция $\varphi(r)$ может быть выражена в виде аналогичных степенных рядов с известными коэффициентами:

$$\varphi(r)=\sum_{i=3}^{\infty}C_i\left(\frac{r}{R}\right)^i,$$

здесь C_i — коэффициенты, известные из решения для изотропной задачи.

После задания деформаций в виде (11) можно вычислить упругую энергию всего тела (с учетом симметричности деформированного состояния):

$$U=2\pi\int_0^{r_1}Vrdr, \tag{12}$$

здесь r_1 — размер проекции.

$$\begin{gathered}
U=\pi N\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_iA_j\frac{ij+1+2\nu i}{i+j}\xi^{i+j}-\right.\\
-2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}A_iB_j\frac{(i+1)(1+\nu)}{i+j+1}\xi^{i+j+1}+\\
\left.+2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}B_iB_j\frac{1+\nu}{i+j+2}\xi^{i+j+2}\right]+\\
+\pi D\left(\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}B_iB_j\frac{ij}{(i+j-2)R^2}\xi^{i+j-2}\times\right.\\
\times\left[1+(i-1)(j+2\nu-1)+\frac{3h^2}{20R^2}(2\nu+1)(i-1)\right]+\\
+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}A_iB_j\frac{1-ij+2ij^2+j^2}{(i+j-1)R^2}\xi^{i+j-1}- \qquad (13)\\
\left.-\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}B_iB_j\frac{j(j+2)}{(i+j)R^2}\xi^{i+j}\right)-\frac{h^5}{4G'R}\sum_{j=3}^{\infty}C_j(j+\nu)\times\\
\times\left[\sum_{i=2}^{\infty}B_i\frac{i(i-1)}{i+j-1}\xi^{i+j-1}+\frac{7}{240}\sum_{i=0}^{\infty}\left(A_i\frac{i}{i+j}\xi^{i+j}-\right.\right.\\
\left.\left.-B_i\frac{1}{i+j+1}\xi^{i+j+1}\right)\right]\pi N-\frac{h^5}{4G'R}\sum_{j=3}^{\infty}C_j(1+\nu j)\times\\
\times\left[\sum_{i=2}^{\infty}B_i\frac{i}{i+j-1}\xi^{i+j-1}+\right.\\
\left.+\frac{7}{240}\sum_{i=0}^{\infty}\left(A_i\frac{1}{i+j}\xi^{i+j}-B_i\frac{1}{i+j+1}\xi^{i+j+1}\right)\right]\pi N,
\end{gathered}$$

здесь $N=\dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\xi=\dfrac{r_1}{R}$.

В работу внешних сил подставляем перемещения в виде (9), после чего вычислим A_p по формуле

$$A_p=2\pi\int_0^{r_1}\sum_{i=0}^{\infty}\left[P_1(r)A_i\left(\frac{r}{R}\right)^i+P_n(r)B_i\left(\frac{r}{R}\right)^i\right]rdr, \tag{14}$$

где $P_1(r)$ — нагрузка, приложенная в радиальном направлении, $P_n(r)$ — в нормальном к оболочке направлении.

После задания этих нагрузок и интегрирования получим A_p в виде линейной функции неопределенных констант A и B.

С учетом (13) и (14) полная энергия $\Pi=U-A_p$ будет представлена в виде квадратичной функции параметров A и B, которые определяются из уравнения Лагранжа

$$\delta(U-A_p)=\frac{\partial(U-A_p)}{\partial A_i}\delta A_i+\frac{\partial(U-A_p)}{\partial B_i}\delta B_i=0. \tag{15}$$

Ввиду независимости A_i и B_i уравнение (15) переходит в систему линейных уравнений $\dfrac{\partial(U-A_p)}{\partial A_i}=0$, $\dfrac{\partial(U-A_p)}{\partial B_i}=0$.

Таким образом, для конкретных оболочек общее вариационное уравнение может быть преобразовано в вариационное уравнение для данного типа оболочек с учетом геометрии.

При выборе кинематически допустимых перемещений u и ω рекомендуется проанализировать решение для изотропной оболочки, после чего вариационное уравнение переходит в систему линейных алгебраических уравнений для определения констант, входящих в кинематически допустимые перемещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 448 с.

2. *Семыкина Т. Д., Лапырева Е. В.* Расчет трансверсально-изотропных оболочек. // Теоретическая и прикладная механика. — Минск.: БНТУ, 2006, вып. 21. — С. 134—136.

3. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. — Л.: Политехника, 1991. — 656 с.

4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматлит, 1963. — 636 с.

Семыкина Татьяна Дмитриевна — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики, тел.: (4732) 20-87-63, e-mail: mech@amm.vsu.ru.

Semykina Tat'yana D. — Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of Voronezh State University, the department of theoretical and applied mechanics, tel.: (4732) 208-763, e-mail: mech@amm.vsu.ru.

Цуканова Людмила Петровна — ст. преподаватель, Воронежский государственный технический университет, кафедра прикладной математики, тел. (4732) 75-61-57, e-mail: mech@amm.vsu.ru.

Tsukanova Ludmila P. — Voronezh State Technical University, the department of applied mathematics, tel. (4732) 756-157, e-mail: mech@amm.vsu.ru.