УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Е. Н. Свиридова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.03.2010 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению начально-краевой задачи, описывающей малые колебания экспоненциально стратифицированной жидкости во вращающейся системе координат. Жидкость стратифицирована вдоль оси Ox_3, совпадающей с осью вращения: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, где $\beta > 0$ — параметр стратификации. Доказано существование решения в пространствах интегрируемых функций С. Л. Соболева. Выписано два члена асимптотики при $t \to +\infty$ компонент решения задачи.
Ключевые слова: системы уравнений динамики жидкости, существование решения, асимптотическое поведение.

Abstract. This article is devoted to studying an initial-boundary value problem describing the small fluctuations of the exponentially stratified fluid in the rotating Cartesian system of coordinates. The fluid is stratified along the axis Ox_3 coinciding with the axis of rotation: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, where $\beta > 0$ is a parameter of stratification. The existence of solution is proved in Sobolev's spaces of integrated functions. Two terms of asymptotics of components of the solution are constructed.
Key words: differential equations, systems of differential equations, variable coefficients, existence of solution, asymptotic behavior.

В настоящей работе рассматривается модель задачи, описывающая двумерное движение стратифицированной жидкости, то есть такое, при котором компоненты решения не зависят от одной из пространственных переменных, x_1 или x_2 (для определенности — от x_2). Исследуемая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\right) = 0, \\ div\left(\rho_0\left(x_3\right)\bar{V}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 \in \mathbf{R}$, $x_3 > 0$, $t > 0$; $\bar{\alpha} = (0,0,\alpha)$ — вектор Кориолиса; ${\omega_0}^2 = 2\beta g$ — квадрат частоты Вейсяля-Брента, p — динамическое давление, $\rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в невозмущенном состоянии.

Следует отметить, что ранее нами было изучено двумерное движение жидкости в рамках несколько иной модели, принадлежащей математикам из МГУ А. Г. Свешникову, Ю. Д. Плетнер, Л. В. Перовой (далее — «модель Свешникова»). Отличие «модели Свешникова» от исследуемой системы (1) состоит в следующем: А. Г. Свешников, Ю. Д. Плетнер, Л. В. Перова предполагали, что учёт переменного коэффициента плотности $\rho_0\left(x_3\right)$ в уравнении неразрывности не является необходимым, поэтому четвертое уравнение системы, рассмотренной ими, имело вид: $div\bar{V} = 0$. В работе [1] этих авторов была доказана стабилизация решения при большом времени. Нами в работах [2], [3] при несколько других требованиях на функцию из граничных условий выписаны точные асимптотики компонент решения этой задачи. Настоящая модель изучена с целью выявления того, как с математической точки зрения проявится учет переменной плотности не только в уравнениях Эйлера, но и в уравнении неразрывности.

С помощью замены

$$\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1}p\,e^{2\beta x_3} \tag{2}$$

приходим от (1) к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0; \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta\sigma\right) = 0; \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} - 2\beta V_3 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Дополним систему (3) следующими начальными и граничными условиями:

$$V_k(x,0) = \frac{\partial V_3}{\partial t}(x,0) = 0,\ k = 1,2,3,\ \sigma(x,0) = 0,$$
$$V_3(x_1,x_3,t)\big|_{x_3=0} = \frac{-1}{\rho_0(0)}\frac{\partial \psi(x_1,t)}{\partial x_1}. \qquad (4)$$

Замечание. В силу условия соленоидальности, задаваемого четвертым уравнением системы, с компонентами V_1, V_3 вектора скорости $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ можно связать функцию тока $\Psi = \Psi(x_1, x_3, t)$ следующим соотношением: $\{V_1, V_3\} = \left\{\dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_3}, -\dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right\}$. Этим соотношением обусловлен вид граничного условия.

Обобщенное решение задачи строится с помощью преобразований Фурье и Лапласа. На основе полученного явного представления доказывается существование решения. Получение асимптотических представлений компонент решения задачи основано на изучении свойств фазовых функций в интегралах, возникающих при вычислении обратных преобразований Лапласа $L_{t\to\gamma}$ и Фурье $F_{x_1\to s_1}$, и применении метода стационарной фазы (см. [5]).

Приведем краткий обзор полученных для нашей модели результатов.

Предполагается, что функция $\psi(x_1,t)$ удовлетворяет следующим условиям

Условие 1. Функция $\psi(x_1,t)$ равномерно по $(x_1,t) \in \mathbf{R}_+^2$ ограничена: $|\psi(x_1,t)| \le c$.

Условие 2. В $L_1(\mathbf{R}\times(0;\infty))$ существуют следующая производная функции $\psi(x_1,t)$:

$$\chi_2(x_1,t) = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^2 \psi(x_1,t).$$

Условие 3. Имеет место оценка $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x_1|)\left|\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^2 \psi(x_1,t)\right| dx_1 < \infty.$

Условие 4. Функция $\psi(x_1,t)$ финитна по переменной $t > 0$, то есть $\psi(x_1,t) = 0$ при $t > N$.

Замечание. Из условий 1 и 4 следует, что существует $\delta > 0$ такое, что справедлива оценка $|\psi(x_1,t)| \le c\exp(-\delta t)$, $(x_1,t) \in \mathbf{R}_+^2$.

Введем нормы

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\rho = \left\{\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (1+t^2)\left|F_{x_1\to s_1}[f(x_1,t)]\right|^2 (1+s_1^{2\rho})\,ds_1dt\right\}^{1/2},$$

$$\langle\langle\langle g(x,t)\rangle\rangle\rangle^2_{L_2(\mathbf{R}^2\times(0;\infty))} = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^2}\left|e^{-2\beta x_3}g(x,t)\right|^2 dxdt.$$

Через $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}^3)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}_+{}^2)}$, $\|\cdot\|_{L_2(W_2^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))}$ будем обозначать стандартные нормы в соответствующих пространствах $L_2(\mathbf{R}^3)$, $L_2(\mathbf{R}_+{}^2)$, $L_2(W_2^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))$, где $W_2^\rho(\mathbf{R})$ — пространство Соболева—Слободецкого с индексом ρ на $\mathbf{R}$.

Проведено полное исследование всех компонент решения системы и оценка их норм в шкале пространств Соболева—Слободецкого методами, описанными в [2], [3]. Приведем результаты для компонент вектора скорости $V = (V_1, V_2, V_3)$. Справедливы следующие оценки

$$\langle\langle\langle V_1(x_1,x_3,t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))} \le$$
$$\le c\left\{\|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))} + \left\|\frac{\partial\psi(x_1,t)}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))} + \right.$$
$$\left. + \langle\langle\psi(x_1,t)\rangle\rangle_{-1/2} + \langle\langle\psi(x_1,t)\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$\langle\langle\langle V_2(x_1,x_3,t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))} \le$$
$$\le c\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,t)\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))} + \left\|\frac{\partial^2\psi(x_1,t)}{\partial t\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))} + \right.$$
$$\left. + \langle\langle\psi(x_1,t)\rangle\rangle_{-1/2} + \langle\langle\psi(x_1,t)\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$\langle\langle\langle V_3(x_1,x_3,t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))} \le$$
$$\le \|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))} + c\langle\langle\psi(x_1,t)\rangle\rangle_{1/2}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компонент вектора скорости решения задачи (3) — (4) справедливы следующие асимптотические представления

$$V_1(x,t) = m_1(x)\,t^{-3/2}\cdot$$
$$\cdot\sin\left(t\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 +$$
$$+\left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$m_1(x) = \frac{\exp(2\beta x_3)}{x_3^2\rho_0(0)}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega_0^2}};$$
$$V_2(x,t) = \frac{\alpha\exp(2\beta x_3)}{\rho_0(0)}\frac{1}{\pi}\frac{x_1^2-x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2} * \psi(x_1,0) +$$
$$+m_2(x)\,t^{-3/2}\cdot\cos\left(t\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 + \left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$m_2(x) = \frac{\exp(2\beta x_3)}{x_3^2\rho_0(0)}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega_0^2}};$$
$$V_3(x,t) = m_3(x)\,t^{-1}\cos(t\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 + \left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-3/2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$m_3(x) = -\frac{2\exp(2\beta x_3)}{\pi^2\rho_0(0)}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\cos(\lambda x_1)}{\left(1+\lambda^2\right)^2}\,d\lambda,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t) = \frac{\alpha^2\exp(2\beta x_3)}{\rho_0(0)}\frac{1}{\pi}\frac{x_1^2-x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2} *$$
$$*\psi(x_1,0) + m_4(x)\,t^{-5/2}\cdot\cos\left(t\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 + \left(1+|x_1|\right)\cdot$$
$$\cdot x_3^{-2}O\left(t^{-3}\right)\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$m_4(x) = -\frac{3\exp(2\beta x_3)}{\sqrt{2}x_3^2\rho_0(0)}\frac{1}{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega_0^2}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t) = -\frac{2\omega_0^2\exp(2\beta x_3)}{\rho_0(0)}\frac{1}{\pi}\frac{x_1x_3}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2} *$$
$$*\psi(x_1,0) + m_5(x)\,t^{-1}\cdot\sin(t\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 + \left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-3/2}\right)\cdot \quad (5)$$
$$\cdot\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$m_5(x) = \frac{4\omega_0\exp(2\beta x_3)}{\rho_0(0)}\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\cos(\lambda x_1)}{\left(1+\lambda^2\right)^2}d\lambda,$$

здесь $O\left(t^{-3/2}\right)$, $O\left(t^{-2}\right)$ и $O\left(t^{-3}\right)$ есть функции переменных $t>0$, $x_3 \ge 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, равномерно по $t \ge t_0 > 0$, $x_3 \ge 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соответственно оценкам: $\left|O(t^{-3/2})\right| \le ct^{-3/2}$, $\left|O(t^{-2})\right| \le ct^{-2}$, $\left|O(t^{-3})\right| \le ct^{-3}$.

Приведем вывод формулы асимптотического представления компоненты $V_3(x,t)$ из теоремы 1. Остальные представления доказываются аналогично.

АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТЫ РЕШЕНИЯ $\mathbf{V_3(x,t)}$ ПРИ $t \to \infty$

Используя для исследования системы (3) методы, аналогичные описанным в работах [2], [3], [4], доказываем, что компонента $V_3(x,t)$ решения имеет при $x_3 > 0$ представление

$$V_3(x_1,x_3,t) = \exp(2\beta x_3)\,F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)\right], \quad (6)$$

где

$$\hat{h}(s_1,s_3,\gamma) = \frac{2s_1s_3\widehat{\psi}(s_1,\gamma)}{\rho_0(0)\left({s_1}^2+{s_3}^2\right)} +$$
$$+\frac{2s_1s_3\widehat{\psi}(s_1,\gamma)}{\rho_0(0)\left({s_1}^2+{s_3}^2\right)^2}\frac{\left(\alpha^2-{\omega_0}^2\right){s_1}^2}{\gamma^2+\dfrac{\alpha^2{s_3}^2+{\omega_0}^2{s_1}^2}{{s_1}^2+{s_3}^2}},$$

причем $\widehat{\psi}(s_1,\gamma) = L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1\to s_1}\left[\psi(x_1,t)\right]\right]$, $L_{t\to\gamma}$ — преобразование Лапласа (с учётом начальных условий) и $F_{x_1\to s_1}$ — частичное преобразование Фурье.

Перепишем представление (6) компоненты $V_3(x,t)$ решения задачи (3), (4) при $x_3 > 0$ в виде

$$L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)\right] =$$
$$= 2s_1s_3\hat{\psi}(s_1,t)\rho_0^{-1}(0)\left({s_1}^2+{s_3}^2\right)^{-1} + \quad (7)$$
$$+\hat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\hat{E}(s,t),$$

где

$$\widehat{E}(s,t)=\frac{2s_3s_1^3\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{\rho_0(0)\left(s_1^{\ 2}+s_3^{\ 2}\right)^2}\cdot\frac{\sin[S(s_1,s_3)t]}{S(s_1,s_3)},$$
$$S(s_1,s_3)=\sqrt{\frac{\alpha^2s_3^{\ 2}+\omega_0^{\ 2}s_1^{\ 2}}{s_1^{\ 2}+s_3^{\ 2}}}. \quad (8)$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части представления (7) после обратного преобразования Фурье сохранит финитность компоненты своего представления $\psi(x_1,t)$, и, следовательно, не войдет в главные члены асимптотики, поэтому особое внимание следует уделить изучению второго слагаемого.

В силу условия 2 справедливо представление

$$\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}(s,t)=\widehat{\chi}_2(s_1,t)\underset{(t)}{*}\frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^2}\widehat{E}(s,t)=$$
$$=\widehat{\chi}_2(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{B}(s,t),$$

где

$$B(x,t)=F_{s\to x}^{-1}\left[\widehat{B}(s,t)\right]=$$
$$=\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^{\ 2}\right)}{2\pi^2\rho_0(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_3s_1^{\ 3}\sin[St]\exp\left[-i(x,s)\right]}{\left(1+s_1^2\right)^2\left(s_1^{\ 2}+s_3^{\ 2}\right)^2S}ds_1ds_3. \quad (9)$$

С помощью замены $s_1=\lambda\cos\theta,\ s_3=\lambda\sin\theta$ в представлении (9), приходим к равенству

$$B(x,t)=\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cos^3\theta\sin\left[tS(\theta)\right]}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\cos\left[\lambda\left(x_1\cos\theta+x_3\sin\theta\right)\right]}{\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^2}d\lambda d\theta,$$

где

$$\sin\left[tS(\theta)\right]=\sin\left[t\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}\right]=$$
$$=\mathrm{Im}\left[\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}\right)\right].$$

Фазовая функция $S(\theta)=\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}$ имеет на отрезке $[0;\pi]$ три критических точки $\theta_1=0,\ \ \theta_2=0.5\pi,\ \ \theta_3=\pi$. Устроим на $[0;\pi]$ разбиение единицы:

$$\eta_1(\theta)+\eta_2(\theta)+\eta_3(\theta)=1,$$
$$\eta_k(\theta)\in C^\infty([0;\pi]),\ k=1,2,3,$$
$$\eta_1(\theta)=\begin{cases}1,\theta\le\pi/4\\0,\theta\ge3\pi/8\end{cases};$$
$$\eta_2(\theta)=\begin{cases}1,3\pi/8\le\theta\le5\pi/8\\0,\theta\le\pi/4,\theta\ge3\pi/4\end{cases};$$
$$\eta_3(\theta)=\begin{cases}1,\theta\ge3\pi/4\\0,\theta\le5\pi/8\end{cases}.$$

Таким образом, требуется изучить асимптотики следующих интегралов

$$B_1(x,t,0)=c\cdot\mathrm{Im}\int_0^{3\pi/8}\eta_1(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\cdot$$
$$\cdot\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\exp\left(itS(\theta)\right)K(\theta)d\theta;$$
$$B_2\left(x,t,\frac{\pi}{2}\right)=c\cdot\mathrm{Im}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\eta_2(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\times$$
$$\times\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\exp\left(itS(\theta)\right)K(\theta)d\theta;$$
$$B_3(x,t,\pi)=c\cdot\mathrm{Im}\int_{5\pi/8}^{\pi}\eta_3(\theta)\cos^3\theta\sin\theta\times$$
$$\times\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\exp\left(itS(\theta)\right)K(\theta)d\theta;$$

где $K(\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\cos\left[\lambda\left(x_1\cos\theta+x_3\sin\theta\right)\right]}{\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^2}d\lambda,$

$c=\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{\pi^2}.$

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ $\mathbf{B}_1(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{0}),\ \mathbf{B}_3(\mathbf{x},\mathbf{t},\pi)$

Нами будет использовано следующее утверждение (см. [5], стр. 103):

Утверждение 1. Пусть $I=\left[x_0;x_0+\delta\right]$ — конечный отрезок, $\delta>0,\ f(x),\ S(x)\in C^\infty(I)$, $f^{(k)}(x_0+\delta)=0,\ k=0,1,2,\ldots$. Пусть функция $S(x)$ имеет на I единственную стационарную точку x_0 и $S^{(k)}(x_0)=0,\ \ 1\le k\le m-1$, $S^{(m)}(x_0)\ne0,\ m\ge2$. Тогда при $\lambda\to\infty$

$$F(\lambda,x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\delta}f(x)\exp\left(i\lambda S(x)\right)dx\sim$$
$$\sim\lambda^{-\frac{1}{m}}\exp\left(i\lambda S(x_0)\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{k}{m}},$$
$$a_k=\Gamma\left((k+1)m^{-1}\right)(k!m)^{-1}\times$$
$$\times\exp\left(i\pi(k+1)\delta(x_0)(2m)^{-1}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^k\times \quad (10)$$
$$\times\left[f(x)\left(\delta(x_0)\left(S(x)-S(x_0)\right)\right)^{-\frac{k+1}{m}}(x-x_0)^{k+1}\right]\Bigg|_{x=x_0},$$
$$\delta(x_0)=\operatorname{sgn}S^{(m)}(x_0).$$

С помощью данного утверждения находим асимптотики интегралов $B_1(x,t,0)$ и $B_3(x,t,\pi)$. Фазовая функция $S(\theta)=\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}$ имеет на отрезке $[0;3\pi/8]$ единственную стационарную точку $\theta=0$, на отрезке $[5\pi/8;\pi]$

— единственную стационарную точку $\theta = \pi$; $S''(0) = S''(\pi) = \dfrac{\alpha^2 - \omega_0^2}{\omega_0} > 0$ (в постановке задачи $\alpha^2 > \omega_0^2$); $f_j(\theta) = \dfrac{\eta_j(\theta)\cos^3\theta\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} K(\theta)$, $j = 1, 3$, причем выражения $K(0)$ и $K(\pi)$ дают абсолютно сходящиеся по λ интегралы: $K(0) = K(\pi) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\lambda\cos(\lambda x_1)}{(1+\lambda^2)^2} d\lambda.$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $f_j(0) = 0$, $j = 1, 3$. Следовательно, коэффициент a_0 в асимптотическом ряду (10) обращается в ноль. Найдем коэффициент a_1. Заметим, что первые производные функций $f_j(\theta)$, $j = 1, 3$, будут отличны от нуля в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ в том и только том случае, когда производная упадет на сомножитель $\sin\theta$, поэтому можем записать

$$f_j'(\theta) = \frac{\eta_j(\theta)\cos^4\theta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} K(\theta) + g(\theta),$$

где $g(0) = 0$.

Отсюда $f_1'(0) = \dfrac{1}{\omega_0}\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2} d\lambda = f_3'(\pi)$.

Применяя утверждение 1 к интегралам $B_1(x,t,0)$ и $B_3(x,t,\pi)$, получим

$$B_1(x,t,0) = B_3(x,t,\pi) = $$
$$= t^{-1}\cos(t\omega_0)\pi^{-2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda\cos(\lambda x_1)}{(1+\lambda^2)^2} d\lambda + O(t^{-3/2}). \quad (11)$$

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА $\mathbf{B_2(x,t,\pi/2)}$

Запишем $B_2(x,t,\pi/2)$ в виде

$$B_2(x,t,\pi/2) = \frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{2\pi^2} \times$$
$$\times \operatorname{Im}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\eta_2(\theta)\cos\theta\sin\theta\exp(itS(\theta))}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} \times$$
$$\times (K_1(\theta) + K_2(\theta))d\theta,$$

где

$$K_1(\theta) = $$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda\cos^2\theta\exp(i\lambda x_1\cos\theta)\exp(i\lambda x_3\sin\theta)}{(1+\lambda^2\cos^2\theta)^2} d\lambda,$$
$$K_2(\theta) = $$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda\cos^2\theta\exp(-i\lambda x_1\cos\theta)\exp(-i\lambda x_3\sin\theta)}{(1+\lambda^2\cos^2\theta)^2} d\lambda.$$

Рассмотрим $K_1(\theta)$. В этом интеграле сделаем замену переменной $\xi = \lambda\cos\theta$, $d\xi = \cos\theta d\lambda$ и проинтегрируем получившееся выражение по частям:

$$K_1(\theta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi\exp(ix_1\xi)\exp(ix_3\xi\sin\theta\cos^{-1}\theta)}{(1+\xi^2)^2} d\xi = $$
$$= \frac{\cos\theta}{ix_3\sin\theta}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi\exp(ix_1\xi)}{(1+\xi^2)^2} d\left(\exp\left(\frac{ix_3\xi\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right) = $$
$$= -\frac{\cos\theta}{ix_3\sin\theta}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(\frac{ix_3\xi\sin\theta}{\cos\theta}\right)\frac{\exp(ix_1\xi)}{(1+\xi^2)^2} d\xi - $$
$$- \frac{\cos\theta}{ix_3\sin\theta}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(\frac{ix_3\xi\sin\theta}{\cos\theta}\right)\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\exp(ix_1\xi)}{(1+\xi^2)^2}\right) d\xi.$$

Продолжая дальнейшее интегрирование по частям каждого из слагаемых в последнем представлении, будем иметь

$$K_1(\theta) = -\frac{\cos^2\theta}{x_3^2\sin^2\theta} + \frac{x_1\cos^3\theta}{x_3^3\sin^3\theta} - $$
$$-(x_1^2 + 4)\frac{\cos^4\theta}{x_3^4\sin^4\theta} + O\left(\frac{x_1^2\cos^5\theta}{x_3^5\sin^5\theta}\right).$$

Такой же результат получается и после интегрирования по частям $K_2(\theta)$.

Тогда

$$B_2\left(x,t,\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{x_3^2\pi^2}\operatorname{Im}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\eta_2(\theta)\cos^3\theta\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}\right)}{\sin\theta\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} d\theta + $$
$$+ \frac{x_1(\alpha^2 - \omega_0^2)}{x_3^3\pi^2}\operatorname{Im}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}\right)}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} d\theta + $$
$$+ \operatorname{Im}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\eta_2(\theta)(x_1^2 + 1)O(\cos^5\theta)\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}\right)}{x_3^4\sin^3\theta\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta + \omega_0^2\cos^2\theta}} d\theta.$$

Сделаем в получившихся интегралах замену $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$. Теперь мы изучаем асимптотику в точке $\varphi = 0$.

Из (11) и (13) с учетом представлений (6) и (7) получаем асимптотику компоненты $V_3(x,t)$ после переноса асимптотики на свертку в представлении (7) аналогично тому, как это было сделано в работах [2], [3].

$$B_2(x,t,\varphi=0) = \frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2\pi^2}\operatorname{Im}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\tilde{\eta}_2(\varphi)\sin^3\varphi\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}\right)}{\cos\varphi\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}}d\varphi +$$
$$+\frac{x_1\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{x_3^3\pi^2}\operatorname{Im}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\tilde{\eta}_2(\varphi)\sin^4\varphi\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}\right)}{\cos^2\varphi\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}}d\varphi + \tag{12}$$
$$+\operatorname{Im}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\tilde{\eta}_2(\varphi)\left(x_1^2+1\right)O\left(\sin^5\varphi\right)\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}\right)}{x_3^4\cos^3\varphi\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Заметим, что в первом интеграле представления (11) подынтегральная функция является нечетной, поэтому этот интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Во втором слагаемом, напротив, подынтегральная функция является четной. Воспользуемся этим и запишем интеграл в виде

$$B_{2,2}(x,t,\varphi=0) = 2\frac{x_1(\alpha^2-\omega_0^2)}{x_3^3\pi^2}\times$$
$$\times\operatorname{Im}\int_0^{\pi/4}\frac{\tilde{\eta}_2(\varphi)\sin^4\varphi\exp\left(it\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}\right)}{\cos^2\varphi\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi+\omega_0^2\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Применяя к данному интегралу утверждение 1 для стационарной точки $\varphi = 0$, получаем

$$B_{2,2}(x,t,\varphi=0) = \frac{3\sqrt{2}x_1^2}{\pi^{3/2}x_3^2}\frac{\alpha^{3/2}}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{3/2}}\times$$
$$\times\sin\left(t\alpha-\frac{\pi}{4}\right)t^{-5/2}+\frac{x_1^2}{x_3^2}O\left(t^{-3}\right).$$

Третье слагаемое в представлении (11) опять обращается в ноль в силу нечетности.

В итоге для интеграла $B_2(x,t,\pi/2)$ получено следующее асимптотическое представление

$$B_2(x,t,\pi/2) = \frac{3\sqrt{2}x_1^2}{\pi^{3/2}x_3^2}\frac{\alpha^{3/2}}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{3/2}}\times$$
$$\times\sin\left(t\alpha-\frac{\pi}{4}\right)t^{-5/2}+\frac{x_1^2}{x_3^2}O\left(t^{-3}\right). \tag{13}$$

Итак, нами построены точные асимптотики компонент решения задачи динамики, описывающей малые колебания экспоненциально стратифицированной жидкости во вращающейся системе координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перова Л. В., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской, бегущей по дну волной. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, — № 1. — С. 136—143.

2. *Свиридова Е. Н.* Асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 1. // Вест. ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 150—158.

3. *Свиридова Е. Н.* Асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 2. // Вест. ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2009. — № 2. — С. 101—111.

4. *Глушко А. В., Свиридова Е. Н.* Асимптотики решений двух задач динамики экспоненциально стратифицированной жидкости // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 2. С. 10—14.

5. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

Свиридова Елена Николаевна — аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета ВГУ; тел.: (4732) 460-678, e-mail: slena13@mail.ru

Sviridova Elena N. — Voronezh State University, Department of Mathematics, Chair of Partial Differential Equations and Theory of Probabilities, Post-graduate student; tel.: (4732) 460-678, e-mail: slena13@mail.ru