УДК 517.956

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. В. Садчиков, А. Д. Баев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.03.2010 г.

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи в полупространстве для одного класса псевдодифференциальных уравнений. Установлены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений таких краевых задач.
Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, априорная оценка, псевдодифференциальный оператор, краевая задача.

Abstract. Boundary value problems in the semi-space for a class of the pseudo-differential equations are considered. A priori coercive estimates and theorems of existence of solutions of such boundary value problems are established.
Keywords: degenerating elliptic equation, a priori estimate, pseudo-differential operator, boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая при исследовании краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку краевых задач и их коэрцитивную разрешимость.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. В работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4] были изучены обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Асимптотические свойства решений эллиптических уравнений и систем были исследованы В. А. Кондратьевым [5]. В работах В. П. Глушко [6], [7] была доказана коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах С. Л. Соболева. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Руковишникова, А. Г. Ереклинцева [8].

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [9], [10]. Затем ряд результатов для вырождающихся эллиптических уравнений был получен С. З. Левендорским [11], С. А. Исхоковым [12]. Общие краевые задачи при произвольно сильном характере вырождения в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений были изучены в [13]. Краевые задачи Дирихле для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений при произвольно сильном характере вырождения в полупространстве были изучены в [14].

В настоящей работе установлены априорные оценки и теоремы существования решений краевых задач Дирихле в полупространстве для нового класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным по t символом из класса $S^{m}_{\alpha,\delta}$ и производную по t первого порядка. Доказательство основных теорем основано на свойствах весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^{m}_{\alpha,\delta}$. Эти свойства получены в [15]. Частным случаем задач, рассмотренных в этой работе, являются задачи, исследованные в работах [13], [14].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t\in R^1_+$, удовлетворяющую условию 1.

Условие 1. $\alpha(t)\in C^\infty(R^1_+)$ $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$, $\alpha(t)=\mathrm{const}$ при $t\ge d>0$ для некоторого $d>0$.

Следуя работе [16], рассмотрим на функциях $u(t)\in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$ интегральное преобразование

$$F_\alpha\left[u(t)\right](\eta)=\int_0^{+\infty}u(t)\exp\left(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.\qquad(1)$$

С преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ преобразование (1) связано равенством $F_\alpha\left[u(t)\right](\eta)=$ $=F_{\tau\to\eta}\left[u_\alpha(\tau)\right]$, $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, где $t=\varphi^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [16] показано, что для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\left\|F_\alpha\left[u(t)\right](\eta)\right\|_{L_2\left(R^1\right)}=\sqrt{2\pi}\left\|u\right\|_{L_2\left(R^1_+\right)}$, что позволяет рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Обозначим расширенное интегральное преобразование через F_α. Обозначим через F^{-1}_α обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha[w(\eta)](t)=$ $=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\big|_{\tau=\varphi(t)}$. На функциях $u(t)\in C_0^\infty\left(R^1_+\right)$ справедливо равенство $F_\alpha\left[D^j_{\alpha,t}u\right](\eta)=\eta^jF_\alpha\left[u\right](\eta)$, $j=1,2,\ldots$, где $D_{\alpha,t}=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$.

Следуя работе [16], определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$, $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, $H_s(R^{n-1})$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}\left(R^n_+\right)$ (s — действительное) состоит из тех локально интегрируемых в R^n_+ функций $\mathrm{v}(x,t)$ ($x\in R^{n-1},t\in R^1_+$), для которых конечна норма

$$\left\|\mathrm{v}\right\|^2_{s,\alpha}=\int_{R_n}\left(1+\left|\xi\right|^2+\eta^2\right)^s\ \left|F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\mathrm{v}(x,t)\right]\right|^2d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}\left(R^n_+\right)$ $(s\ge 0,\ q>1)$ состоит из функций $\mathrm{v}(x,t)\in H_{s,\alpha}\left(R^n_+\right)$, для которых конечна норма

$$\left\|\mathrm{v}\right\|_{s,\alpha,q}=\{\sum_{l=0}^{\left[s/q\right]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\left(1+\left|\xi\right|^2+\eta^2\right)^{\frac{s-ql}{2}}\times$$
$$\times F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t\,\mathrm{v}]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac12}.$$

Определение 3. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное число) состоит из всех локально интегрируемых в R^{n-1} функций $g(x)$, для которых конечна норма $\left\|g\right\|_s=\left\|F^{-1}_{s\to x}[(1+\left|\xi\right|^2)^{\frac{s}{2}}F_{x\to\xi}[g]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}=F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K^{(\sigma)}\left(t,D_x,D_{\alpha,t}\right)\mathrm{v}=$ $=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda\left(t,\xi,\eta\right)F_\alpha F_{x\to\xi}[\mathrm{v}\left(x,t\right)]]$.

Символ весового псевдодифференциального оператора $\lambda(t,\xi,\eta)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 2. Функция $\lambda(t,\xi,\eta)\in C^\infty\left(R^{n+1}_+\right)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{\partial^j}{\partial\eta^j}\lambda\left(t,\xi,\eta\right)\right|\le c_{jk}\left(1+\left|\xi\right|^2+\eta^2\right)^{\frac12(q-j+\delta k)},$$
$$j=0,1,\ldots,$$

где постоянные $c_{jk}>0$ не зависят от $t\in R^1_+$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$, $\delta\in[0;1)$, $q>1$.

Обозначим класс функций $\lambda(t,\xi,\eta)$, удовлетворяющих условию 2, через $S^\sigma_{\alpha,\delta}$. Такой класс символов $\lambda(t,\xi,\eta)$ при $\delta=0$ был исследован в [13], а при $\delta\in[0;1)$ в [15].

Рассмотрим операторы $A^\pm(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=K^{(q)}_\pm(t,D_x,D_{\alpha,t})v-\frac{\partial v}{\partial t}$, где $K^{(q)}_\pm(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_\pm(t,\xi,\eta)$, которые удовлетворяют условию 2 при $q>1$, а также следующему условию:

Условие 3. Функции $\lambda_\pm(t,\xi,\eta)\in C^\infty(R^{n+1}_+)$ и при всех $t\in(0;+\infty)$, $(\xi,\eta)\in R^n$ справедливы оценки $\pm\operatorname{Re}\lambda_\pm(t,\xi,\eta)\ge c(1+\left|\xi\right|^2+\eta^2)^{\frac{q}{2}}$ с некоторой константой $c>0$, $q>1$.

Рассмотрим в R^n_+ задачу вида

$$A^-(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f,\qquad(2)$$

$$v(x,+0)=g(x).\qquad(3)$$

Наряду с задачей (2)—(3) рассмотрим уравнение

$$A^+(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f.\qquad(4)$$

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $s \geq 0,\ q > 1$ — действительные числа, выполнены условия 1—3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (2)—(3), принадлежащего пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|g\|_{s+\frac{q}{2}} + \|v\|_{L_2(R_+^n)}), \qquad (5)$$

а для любого решения $v(x,t)$ уравнения (4), принадлежащего пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|v\|_{L_2(R_+^n)}), \qquad (6)$$

с постоянными $c_1 > 0,\ c_2 > 0,$ не зависящими от $v, f, g.$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, $g(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда существует оператор $R_-: H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \to H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ такой, что функция $R_- f(x,t)$ удовлетворяет условию (3) и справедливо равенство

$$A^- R_- = I + T_- R_-,$$

где I — единичный оператор, а порядок оператора T_- в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $q-1$. Пусть $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, тогда существует оператор $R_+: H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \to H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ такой, что $A^+ R_+ = I + T_+ R_+$, причем порядок оператора T_+ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $q-1$.

Оператор R_- называется правым регуляризатором задачи (2)—(3), а оператор R_+ называется правым регуляризатором уравнения (4). Если справедливы априорные оценки (5) и (6), то правые регуляризаторы являются и левыми регуляризаторами.

Наряду с задачей (2)—(3) рассмотрим задачу

$$A^-(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) - r_1 v(x,t) = f(x,t), \qquad (7)$$

$$v(x,+0) = g(x). \qquad (8)$$

Рассмотрим также уравнение

$$A^+(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) + r_1 v(x,t) = f(x,t). \qquad (9)$$

Здесь $r_1 > 0$ — некоторое число.

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\operatorname{Re}\mu > \mu_0 > 0$, где μ_0 — достаточно большое число. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (7)—(8), принадлежащего пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|g\|_{s+\frac{q}{2}}),$$

а для любого решения $v(x,t)$ уравнения (9), принадлежащего пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, справедлива априорная оценка $\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_2 \|f\|_{s,\alpha,q}$ с постоянными $c_1 > 0,\ c_2 > 0,$ не зависящими от $v, f, g.$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда, если $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, $g(x) \in H_{s+\frac{q}{2}}(R^{n-1})$, то существует единственное решение задачи (7)—(8), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Если $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, то существует единственное решение уравнения (9), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Доказательство теорем 1—4 основано на свойствах весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^{\sigma}_{\alpha,\delta}$.

Изложим кратко схему доказательства теорем 1—4.

Наряду с пространством $H_{s,\alpha}\left(R_+^n\right)$ рассмотрим пространство $\widetilde{H}_{s,\alpha}\left(R_+^1\right)$ функций $u(t)$, в котором норма, зависящая от параметра $|\xi|,\ \xi \in R^{n-1}$, определяется равенством

$$\|u\|^2_{s,\alpha,|\xi|} = \int_{R^1} \left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^s \left|F_\alpha[u](\eta)\right|^2 d\eta.$$

Обозначим $\|u\| = \|u\|_{L_2(R_+^1)}$.

Наряду с операторами $A^{\pm}$ рассмотрим операторы

$$A^{\pm}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(\xi,t) = K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t})u - \partial_t u$$

$$A_p^{\pm}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(\xi,t) =$$

$$= \frac{1}{p}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(\xi, D_{\alpha,t})u + K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t})u - \partial_t u,$$

$$A_{p,\mu}^{\pm}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = \frac{1}{p}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(\xi, D_{\alpha,t})u +$$

$$+ \mu K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t})u \pm (1-\mu)u - \partial_t u,$$

где $K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t}) = F_{x\to\xi}[K_{\pm}^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})]$, $K_{\pm}^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{\pm}(t, \xi, \eta)$, удовлетворяющим условиям 2, 3, $\mu \in [0,1]$, $p = 1, 2, \ldots, r_0 > 0$ — целое число, $2r_0 \geq q > 1$, $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$. Весовой псевдодифференциальный оператор $\Lambda_{\pm}^{2r_0}(\xi, D_{\alpha,t})u = \pm F_\alpha^{-1}[(1 + |\xi| + \eta)^{2r_0} F_\alpha[u]]$.

Рассмотрим также операторы

$$\widehat{A}^{\pm,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t})u - \partial_t u \pm r_1 u,$$

$$\widehat{A}_p^{\pm,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u =$$

$$= \frac{1}{p}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(\xi, D_{\alpha,t})u + K_{\pm}^{(q)}(t, \xi, D_{\alpha,t})u - \partial_t u \pm r_1 u,$$

$$\widehat{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=\frac{1}{p}\Lambda^{2r_0}_{\pm}(\xi,D_{\alpha,t})u+$$
$$+\mu K^{(q)}_{\pm}(t,\xi,D_{\alpha,t})u\pm(1-\mu)u-\partial_t u\pm r_1u,$$

где $r_1>0$ — некоторое число.

Рассмотрим операторы

$$\Phi_{p,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})=$$
$$=\frac{1}{p}\Lambda^{2r_0}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})+\mu\Lambda^{q}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})+(1-\mu)I,$$

и обозначим

$$\Phi_{p,\mu}(\xi,0)=\varphi(p,\mu,\xi)I,$$
$$\widetilde{N}_{s,p,\mu,\xi}u=\{\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{p^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u\right\|^2_{s+2r_0j-q(l-j),\alpha,|\xi|}+$$
$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|})\}^{\frac{1}{2}}.$$

Изложим кратко схему доказательства теорем 1 и 3. Утверждения этих теорем вытекают из совокупности следующих вспомогательных утверждений, доказательство которых основано на свойствах весовых псевдодифференциальных операторов из класса $S^{\sigma}_{\alpha,\delta}$, $\delta\in[0;1)$, исследованных в [15].

Лемма 1. Пусть $\mu\in[0,1]$, $p=1,2...,\xi\in R^{n-1}$, $s\ge 0$. Пусть выполнены условия 1—3. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{q,p,\mu,\xi}u\le c\left(\left\|\widehat{A}^{\pm}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp\right.$$
$$\left.\mp\varphi(p,\mu,\xi)|u(0)|^2+(\mu^2+\frac{\mu}{p}+\mu(1-\mu))\|u\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\right),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $p,\mu,v,u(t)$, $s_0\in R^1$ — любое действительное число.

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{q,p,\mu,\xi}u\le$$
$$\le c\left(\left\|\widehat{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\right\|^2\mp\varphi(p,\mu,\xi)|u(0)|^2\right),\tag{10}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от p,μ,v,u.

Лемма 2. При выполнении условий леммы 1 для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,p,\mu,\xi}u\le c\left(\widetilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi}\widehat{A}^{\pm}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t})u\mp\right.$$
$$\left.\mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(1+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(p,\mu,\xi)|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u\right\|_{s_1,\alpha,|\xi|}\right),$$

где $s_1\in R^1$ — любое действительное число, $s\ge 0$ — действительное число.

Следствие 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s\ge 0$ справедлива оценка

$$\widetilde{N}^2_{s+q,p,\mu,\xi}u\le c\{\widetilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi}\widehat{A}^{\pm}_{p,\mu}u\mp$$
$$\mp\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\varphi^{2l+1}(p,\mu,\xi)(1+|\xi|^2)^{s-ql}|u(0)|^2+\|u\|^2\}.$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,p,\mu,\xi}u\le c\{\widetilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi}\widehat{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\mp$$
$$\mp\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\varphi^{2l+1}(p,\mu,\xi)(1+|\xi|^2)^{s-ql}|u(0)|^2\}.$$

Здесь $s\ge 0$ — действительное число.

Следствие 4. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s\ge 0$ справедлива оценка

$$\|u\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|}\le c\{\left\|\widehat{A}^{\pm}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t})u\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|}\mp$$
$$\mp(1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2+\|u\|^2\}.\tag{11}$$

Здесь константа $c>0$ не зависит от ξ,u,t. Оператор $\widehat{A}^{\pm}_{p,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определен выше,

$$\|u\|_{s,\alpha,q,|\xi|}=$$
$$=\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{q}\right]}\left\|F^{-1}_{\alpha}[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{s-ql}{2}}F_{\alpha}[\partial_t^l u]]\right\|^2_{L_2(R^1_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство (11) вытекает из (10) при $\mu=1$, $p=+\infty$, если воспользоваться тождеством $\varphi(+\infty,1,\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}$ и неравенством

$$c^{-1}\|u\|_{s,\alpha,q,|\xi|}\le\widetilde{N}^2_{s,+\infty,1,\xi}u\le c\|u\|_{s,\alpha,q,|\xi|}$$

Следствие 5. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\|u\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|}\le c\{\left\|\widehat{A}^{\pm,r_1}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|}\mp$$
$$\mp(1+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\},\tag{12}$$

где константа $c > 0$ не зависит от ξ, u, t.

Утверждение следствия 5 вытекает из следствия 3 при $\mu = 1$, $p = +\infty$.

Так как множество $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geq 0$ — действительное число), то теоремы 1 и 3 достаточно доказать на функциях $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$. Но тогда функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$. Таким образом, теоремы 1 и 3 вытекают из оценок (11), (12).

Изложим кратко схему доказательства теорем 2 и 4.

Обозначим

$$N_{s,p,\mu} v = \left\{ \int\limits_{R^{n-1}} \tilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi} F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right] d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

где функционал $N_{s,p,\mu,\xi}$ определен выше, $p = 1, 2, \ldots$ и $\mu \in [0,1]$, $\xi \in R^{n-1}$.

Определение 4. Обозначим через $\hat{H}_s^\alpha\left(R_+^n\right)$ пространство функций, для которых конечна норма (13) при $p = 1, 2, \ldots$ и $\mu \in [0,1]$.

Рассмотрим в R_+^n задачу вида

$$\widehat{A}_p^{-,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v(x,t) = f(x,t), \quad (14)$$

$$v(x,t)\big|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим также уравнение

$$\widehat{A}_p^{+,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v(x,t) = f(x,t) \quad (16)$$

где $\widehat{A}_p^{\pm,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) = F_{x\to\xi}[\widehat{A}_p^{\pm,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)]$, операторы $\widehat{A}_p^{\pm,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)$ определены выше, $2r_0 \geq q > 1$, r_0 — натуральное число.

Лемма 3. Пусть $s \geq 0$, $\mu \in [0,1]$, $p = 1, 2, \ldots$. Пусть выполнены условия 1—3. Тогда при $r_1 \geq r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, для любой функции $v(x,t) \in \widehat{H}^\alpha_{s+q}(R_+^n)$, справедливо неравенство

$$N_{s+q,p,\mu} v \leq c_1 N_{s,p,\mu} \widehat{A}_{p,\mu}^{+,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v. \quad (17)$$

Если, кроме того, $v(x,t)\big|_{t=0} = 0$, то справедлива оценка

$$N_{s+q,p,\mu} v \leq c_2 N_{s,p,\mu} \widehat{A}_{p,\mu}^{-,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v, \quad (18)$$

где константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ не зависят от p, μ, v.

$$\widehat{A}_{p,\mu}^{\pm,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widehat{A}_{p,\mu}^{\pm,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)].$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1—3. Пусть $f(x,t) \in \widehat{H}^\alpha_s(R_+^n)$ ($s \geq 0$ — действительное число). Тогда при $r_1 \geq r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, существует единственное решение задачи (14)—(15) (уравнения (16)), принадлежащее $\widehat{H}^\alpha_{s+q}(R_+^n)$. Для этого решения справедлива априорная оценка (17) ((18)) при $\mu = 1$.

Теорема 5 доказывается с помощью продолжения по параметру $\mu \in [0;1]$.

Заметим, что при доказательстве теорем 2 и 4 достаточно рассматривать однородное условие при $t = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Из теоремы 5 следует существование и единственность решения $v_p(x,t)$ задачи (14)—(15), для которого справедлива оценка (18) при $\mu = 1$.

Можно доказать, что последовательность $\{v_p(x,t)\}_{p=1}^{+\infty}$ фундаментальна в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

$$0 = \left\| \widehat{A}_p^{-,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v_p - \widehat{A}_p^{-,r_1} v_l \right\|_{s,\alpha,q} \geq$$

$$\geq \left\| \widehat{A}^{-,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)\left(v_p - v_l\right) \right\|_{s,\alpha,q} - \quad (19)$$

$$-\frac{1}{p}\left\| \Lambda_\pm^{2r_0}(D_x, D_{\alpha,t}) v_p \right\|_{s,\alpha,q} - \frac{1}{l}\left\| \Lambda_\pm^{2r_0}(D_x, D_{\alpha,t}) v_l \right\|_{s,\alpha,q},$$

где $\widehat{A}^{-,r_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widehat{A}^{-,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)]$, а оператор $\widehat{A}^{-,r_1}(t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)$ определен выше.

Из (19) получим

$$\left\| v_p - v_l \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c\left(\frac{1}{p}\left\| v_p \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} + \frac{1}{l}\left\| v_l \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} \right).$$

Применив в правой части этого неравенства оценку (18) при $\mu = 1$ получим

$$\left\| v_p - v_l \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c\left(\frac{1}{p} N_{s+2r_0-q,p,1} f + \frac{1}{l} N_{s+2r_0-q,l,1} f \right) \leq$$

$$\leq c_1\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{l} \right) \|f\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}.$$

Из этой оценки получим фундаментальность последовательности $\{v_p(x,t)\}$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Так как пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ — полное, то существует такая функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, что $v(x,t) = \lim\limits_{p\to+\infty} v_p(x,t)$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Можно показать, что функция $v(x,t)$ является решением задачи (7)—(8) при $g(x) = 0$.

Аналогично устанавливается существование решения уравнения (9). Таким образом, получаем справедливость утверждения теоремы 4 для задачи (7)—(8). Аналогично доказывается справедливость этой теоремы для уравнения (9).

Рассмотрим теперь операторы

$$\widehat{A}^{\pm,r_1}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v=\widehat{A}^{\pm}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v\pm r_1v,$$

где операторы $\widehat{A}^{\pm}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены выше.

$$\widehat{A}^{\pm,r_1}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=F^{-1}_{\xi\to x}[\widehat{A}^{\pm,r_1}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)],$$

$$\widehat{A}^{\pm}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v=K^{(q)}_{\pm}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v-\partial_t v.$$

Из теоремы 4 следует, что существует единственное решение задачи (7)—(8) при $r_1\geq r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число. Обозначим через $R^-_{r_1}$ — оператор, обратный оператору, порожденному задачей (7)—(8).

$$R^-_{r_1}(F,G)=v,\ \ v(x,t)\big|_{t=0}=G(x).$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\widehat{A}^{-}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)R^-_{r_1}(F,G)=$$

$$=\widehat{A}^{-,r_1}R^-_{r_1}(F,G)+r_1R^-_{r_1}(F,G)=$$

$$=F(x,t)+r_1R^-_{r_1}(F,G),$$

причем $R^-_{r_1}(F,G)\big|_{t=0}=G(x)$.

Из этого равенства и априорной оценки (5) следует, что построенный оператор R^-_r является правым регуляризатором задачи (2)—(3). Аналогично доказывается существование регуляризатора для уравнения (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. — 1951. —Т. 77, № 2. — С. 181—183.

2. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885—887.

3. *Михлин С. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19—48.

4. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513—568.

5. *Кондратьев В. А.* Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях / В. А. Кондратьев // Труды конференции им. И. Г. Петровского. — М., 2006. — Вып. 25. — С. 98—111.

6. *Глушко В. П.* Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, вып. 3. — С. 87—88.

7. *Глушко В. П.* Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. — 1970. — Т. 23. — С. 113—178.

8. *Рукавишников В. А.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 12. — С. 1680—1689.

9. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455—491.

10. *Вишик М. И.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29—56.

11. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483—501.

12. *Исхоков С. А.* О Гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением / С. А. Исхоков // Докл. Академии наук. — 2001. — Т. 378, № 3. — С. 306—309.

13. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727—728.

14. *Баев А. Д.* О разрешимости общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Вестник Самарского гос. ун-та, серия «Естественные науки». — 2008. — №3 (62). — С. 40—50.

15. *Баев А. Д.* Об одном классе весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом / А. Д. Баев, П. В. Садчиков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2009. — № 2. — С. 16—20.

16. *Баев А. Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044—1046.

Садчиков Павел Валерьевич — преподаватель кафедры уравнений в частных производных и теорий вероятностей Воронежского государственного университета, тел. (4732)208618, e-mail: sadch@freemail.ru

Баев Александр Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, декан математического факультета Воронежского государственного университета, тел. (4732) 208553, e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Sadchikov Pavel V. — the teacher of chair of partial differential equations in private derivatives and probability theory, Voronezh state university, tel. (4732)208618, e-mail: sadch@freemail.ru

Baev Alexandr D. — the doctor of physical and mathematical sciences, professor, the dean of mathematical faculty, Voronezh state university, tel. (4732) 208553, e-mail: alexsandrbaev@mail.ru