УДК 517.925.52

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛАНДАУ—АДАМАРА ДЛЯ ГЛАДКИХ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Перов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 03.02.2010 г.

Аннотация. Известные классические неравенства типа Ландау—Адамара для скалярных функций переносятся на векторные функции со значениями в банаховом пространстве.
Ключевые слова: неравенства Ландау-Адамара, банахово пространство.

Abstract. Known classical inequalities of Landau—Adamar type for scalari functions transfer on vector functions with meaning in Banach`s space.
Key words: inequalities Landau-Hadamard, Banach space.

Пусть J — некоторый промежуток числовой прямой $\mathbb{R}$ (конечный или бесконечный). Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство, норма элемента x которого записывается как $|\,x\,|$. Обозначим через $L(J,\mathbb{B})$ банахово пространство всех измеримых ограниченных в существенном векторных функций $x(t): J \to \mathbb{B}$ с нормой [1, с. 103] *

$$||\,x\,||\,J = vraisup_{t\in J}\,|\,x(t)\,|\,.$$

Пусть $x(t): J \to \mathbb{B}$ есть некоторая некоторая непрерывная ограниченная векторная функция; предположим, что она непрерывно дифференцируема и $\dot{x}(t): J \to \mathbb{B}$ не только непрерывна, но и ограничена; предположим, далее, что производная $\dot{x}(t)$ представима в виде интеграла Бохнера с переменным верхним пределом некоторой векторной функции $f(t): J \to \mathbb{B}$ из $L(J,\mathbb{B})$; в этом случае $\dot{x}(t)$ дифференцируема почти всюду на J и $\ddot{x}(t) = f(t)$. Для краткости введём обозначения

$$\mu_0 =||\,x\,||\,J,\ \mu_1 =||\,\dot{x}\,||\,J,\ \mu_2 =||\,\ddot{x}\,||\,J.$$

Первая теорема относится к тому случаю, когда промежуток J есть конечный отрезок $[a,b]$ числовой прямой $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *(сравни с* [2, с. 388 — 389]). *Пусть векторная функция $x(t):[a,b] \to \mathbb{B}$ удовлетворяет перечисленным выше неравенствам. Тогда: если*

$$b - a \le 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}}, \tag{1}$$

то справедлива аддитивная оценка

$$\mu_1 \le \frac{2}{b-a}\mu_0 + \frac{b-a}{2}\mu_2, \tag{2}$$

и эта оценка точная; если

$$b - a > 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}}, \tag{3}$$

то справедлива мультипликативная оценка

$$\mu_1 \le 2\sqrt{\mu_0\mu_2}, \tag{4}$$

и эта оценка также является точной.

∘ Доказательство основано на известной формуле

$$x(s) - x(t) - \dot{x}(t)(s-t) = w(t,s), \tag{5}$$

где

$$w(t,s) = \int_t^s (s-\sigma)\ddot{x}(\sigma)d\sigma. \tag{6}$$

Здесь $a \le t,\ s \le b$ и интеграл понимается в смысле Бохнера. Так как

$$|\,w(t,s)\,| \le \left|\int_t^s (s-\sigma)\right| d\sigma\,||\,\ddot{x}\,||\,[a,b] =$$

$$= \frac{1}{2}(t-s)^2\ ||\,\ddot{x}\,||\,[a,b],$$

то

$$|\,w(t,s)\,| \le \frac{1}{2}\mu_2(t-s)^2. \tag{7}$$

Возьмём произвольную точку t из отрезка $[a,b]$ и её зафиксируем. Обозначим через $[\alpha,\beta]$ произвольный отрезок, лежащий в отрезке $[a,b]$ и содержащий точку t. Полагая в формуле (5) сначала $s=\alpha$, а затем $s=\beta$, получаем

$$x(\alpha) - x(t) - x^{\cdot}(t)(\alpha - t) = w(t,\alpha),$$
$$x(\beta) - x(t) - x^{\cdot}(t)(\beta - t) = w(t,\beta).$$

Вычитая почленно из второй строки первую, находим

$$x(\beta) - x(\alpha) - \dot{x}(t)(\beta - \alpha) = w(t, \beta) - w(t, \alpha), \quad (8)$$

откуда в силу оценки (7) вытекает, что

$$| x(\beta) - x(\alpha) - \dot{x}(t)(\beta - \alpha) | \le \le \frac{1}{2}\{(\beta - t)^2 + (t - \alpha)^2\}. \quad (9)$$

Так как на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеем $(\beta - t)^2 + (t - \alpha)^2 \le (\beta - \alpha)^2$, то из (9) получаем важную оценку

$$\left| \frac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha} - \dot{x}(t) \right| \le \frac{1}{2}\mu_2(\beta - \alpha). \quad (10)$$

Из (10) находим

$$| \dot{x}(t) | \le \frac{| x(\beta) - x(\alpha) |}{\beta - \alpha} + \frac{1}{2}\mu_2(\beta - \alpha),$$

что так как $| x(\beta) - x(\alpha) | \le | x(\beta) + | x(\alpha) | \le 2\mu_0$ даёт нам

$$| \dot{x}(t) | \le \frac{2}{\beta - \alpha}\mu_0 + \frac{\beta - \alpha}{2}\mu_2. \quad (11)$$

Полагая в последней оценке $\alpha = a$ и $\beta = b$, окончательно получаем

$$| \dot{x}(t) | \le \frac{2}{b - a}\mu_0 + \frac{b - a}{2}\mu_2. \quad (12)$$

Из оценки (12) в силу наших обозначений немедленно вытекает оценка (2) без каких-либо ограничений на длину отрезка $[a, b]$, то есть предположение (1) пока нами не было исключено.

Если выполнено условие (1), то оценка (2) точная. Она достигается на скалярной функции $x(t) : [a, b] \to \mathbb{B}$ [2, с. 390]

$$x(t) = -\frac{\mu_2}{2}(t - a)^2 + \left(\frac{2}{b - a}\mu_0 + \frac{b - a}{2}\mu_2 \right)(t - a) - \mu_0, \quad a \le t \le b,$$

что проверяется непосредственно.

Пусть теперь выполнено условие (3). Положим

$$h = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}}.$$

Тогда $0 < h < b - a$. Возьмём произвольную точку t из отрезка $[a, b]$ и её зафиксируем. Обозначим через $[\alpha, \beta]$ произвольный отрезок, лежащий в отрезке $[a, b]$ и содержащий точку t, длина которого равна $h : \beta - \alpha = h$.

Рассмотрим сужение векторной функции $x(t)$ на отрезок $[\alpha, \beta]$. Согласно оценке (12) имеем

$$| \dot{x}(t) | \le \frac{2}{h}\mu_0 + \frac{h}{2}\mu_2, \quad \alpha \le t \le \beta. \quad (14)$$

Отметим, что в данном случае всегда согласно (13)

$$\frac{2}{h}\mu_0 + \frac{h}{2}\mu_2 = 2\sqrt{\mu_0\mu_2}. \quad (15)$$

Оценка (14) принимает вид

$$| \dot{x}(t) | \le 2\sqrt{\mu_0\mu_2}, \quad (16)$$

откуда немедленно вытекает оценка (4).

Если выполнено условие (3), то оценка (4) точная. Она достигается на скалярной функции [2, с. 391]

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_2}{2}(t - a)^2 + 2\sqrt{\mu_0\mu_2}(t - a) - \mu_0 \\ \qquad \text{при } a \le t \le a + h, \\ \mu_0 \ \text{при } a + h \le t \le b, \end{cases}$$

что проверяется непосредственно.

Оценки (2) и (4) могут быть использованы при доказательстве теоремы Эсклангона для ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка в банаховом пространстве (например, по схеме как это сделано в [3, с. 17 — 20]). •

Вторая теорема относится к тому случаю, когда промежуток J является бесконечным.

Теорема 2. *(сравни с* [2, с. 389]). *Пусть векторная функция $x(t) : J \to \mathbb{B}$ удовлетворяет перечисленным выше предположениям. Тогда: если $J = [0, +\infty)$, то*

$$\mu_1 \le 2\sqrt{\mu_0\mu_2}; \quad (17)$$

если $J = (-\infty, +\infty)$, то

$$\mu_1 \le \sqrt{2\mu_0\mu_2}. \quad (18)$$

∘ Пусть $J = [0, +\infty)$. Подберём число h так, чтобы $h^2 = 4\mu_0 / \mu_2$. Возьмём произвольную точку t из промежутка J и её зафиксируем. Обозначим через $[a, b]$ произвольный отрезок, лежащий в промежутке J и содержащий точку t, длина которого равна $h : \beta - \alpha = h$. Тогда для сужения функции $x(t)$ на отрезок $[a, b]$ справедлива оценка (12)

$$| \dot{x}(t) | \le \frac{2}{b - a}\mu_0 + \frac{b - a}{2}\mu_2,$$

из которой вытекает, что

$$|\,\dot{x}(t)\,| \le \frac{2}{h}\mu_0 + \frac{h}{2}\mu_2 = 2\sqrt{\mu_0\mu_2}.$$

Последнее в силу выбора числа h. Так как точка t — произвольная точка промежутка J, то из получаемого нами неравенства вытекает оценка (17).

Точность её показывается некоторым видоизменением функции, приведённой после формулы (16).

Пусть теперь $J = (-\infty, +\infty)$. Подберём число $k > 0$ так, чтобы $k^2 = 2\mu_0 / \mu_2$. Возьмём произвольную точку t из промежутка J и её зафиксируем. Рассмотрим отрезок $[\alpha, \beta]$ где $\alpha = t - k$ и $\beta = t + k$. Согласно оценке (9)

$$|\,x(t+k) - x(t-k) - \dot{x}(t)2k\,| \le \mu_2 k^2,$$

откуда вытекает, что

$$\left|\frac{x(t+k) - x(t-k)}{2k} - \dot{x}(t)\right| \le \frac{1}{2}\mu_2 k.$$

Так как $|\,x(t+k) - x(t-k)\,| \le 2\mu_0$, то из полученного неравенства получаем оценку

$$|\,\dot{x}(t)\,| \le \frac{\mu_0}{k} + \frac{1}{2}\mu_2 k = \sqrt{2\mu_0\mu_2}.$$

Последнее в силу выбора числа k. Так как точка t — произвольная точка промежутка J, то из полученного нами неравенства вытекает оценка (18).

Анализ доказательства показывает, что если μ_0 и μ_2 — конечные числа, то и $\dot{x}(t) : J \to \mathbb{B}$ есть ограниченная функция и имеют место оценки (17) и (18) соответственно. •

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — Москва: ИЛ, 1962. — 832 с.

2. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полна. — М.: ИЛ, 1948. — 456 с.

3. *Красносельский М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М.: Наука, 1970. — 352 с.

Перов Анатолий Иванович — д. ф.-м. н., профессор кафедры нелинейных колебаний ВГУ, тел. (4732) 208-649, e-mail: anperov@mail.ru

Perov Anatoly I. — professor, chair of nonlinear oscillations of Voronezh State Universiry, tel. (4732) 208-649, e-mail: anperov@mail.ru