УДК 519.34: 539.3

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА

И. Я. Новиков, Г. Ю. Северин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.03.2010 г.

Аннотация. В статье описан уникальный алгоритм построения системы ортогональных финитных функций для решения уравнения Кортевега-де-Фриза методом конечных элементов. Результат проектирования на соответствующее конечномерное подпространства — система обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей.
Ключевые слова. Метод конечных элементов, Ортогональные финитные функции, условие Стренг—Фикса.
Abstract. In article the unique algorithm of construction of system orthogonal finite functions for the decision of the equation of the Korteveg-de-Fries is described by a method of finite elements. The result of designing on corresponding subspaces is system of the ordinary differential equations with a diagonal matrix.
Key Words. method of finite elements, orthogonal compact V. L. Leontev's type functions, Streng-Fix condition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мощным средством перехода от непрерывной системы с бесконечным числом степеней свободы к дискретной системе является метод конечных элементов (МКЭ). При построении приближённых решений уравнений с частными производными с помощью метода конечных элементов (МКЭ) исходное уравнение сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Функции, используемые в МКЭ, должны обладать рядом свойств, чтобы получить достаточную точность и, по возможности, максимально сократить количество арифметических операций. Эти функции должны быть финитными, или, хотя бы иметь хорошую локализованность. Гладкость таких функций должна быть адекватна предполагаемой гладкости точного решения. Слишком хорошая гладкость аппроксимирующих функций, как, например, у атомарных up-функций Рвачёва [1], вредна для аппроксимации решений, у которых гладкость нарушается (например — на границе области). Система функций, используемая в МКЭ, должна обладать хорошими аппроксимационными свойствами. Точности порядка h бывает недостаточно. Приходится уточнять такое приближение, например, с помощью экстраполяции Ричардсона [2], что не всегда возможно. Кроме того, полученная после применения МКЭ система обыкновенных дифференциальных уравнений должна быть максимально простой, т.е. линейной, с ленточной матрицей, желательно, — с диагональным преобладанием [3]. Если система получилась нелинейной, то точность теряется ещё и при её решении метод Адамса или Мултона. Если после проектирования система получилась линейной, то она обычно имеет плохообусловленную матрицу, при обращении которой опять же теряется точность. Также желательно, чтобы для задания функций, используемых в МКЭ, была бы приведена простая явная формула.

В этой работе предлагается развитие идеи В. Л. Леонтьева [4] — непосредственного построения систем ортогональных финитных функций вида $\{f(\frac{x-x_j}{h})\}_{j=0}^{m}$ на основе сдвигов одной функции

$$f(x)=\begin{cases} a_l x^{2l}+a_{l-1}x^{2l-2}+\ldots+a_1x^2+1, & x\in[-1,1],\\ 0, & x\in(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty).\end{cases}$$

На простом примере описывается алгоритм построения системы ортогональных финитных функций, адаптированной для решения уравнения Кортевега-де-Фриза. На этом примере видно, как строить такие системы ОФФ для достаточно широкого класса задач с частными производными. Функция $f(x)$ будет чётной, что сильно упрощает метод. Построенная система функций будет трижды непрерывно дифференцируемой и удовлетворять четырём специальным условиям, благодаря чему в результате проектирования на соответствующее конечномерное подпространство для функций-амплитуд матрица системы будет иметь диагональный вид. Поэтому, так как при предложенном здесь подходе для различных h не нужно будет каждый раз решать систему дифференциальных уравнений больших размеров (эта система расщепляется), можно сразу ограничиться точностью порядка h, даже, вообще говоря, точностью степени h^α $(\alpha > 0)$.

Необходимо всё же сразу указать, что главную вычислительную трудность имеет синтез функции $f(x)$. Она будет строиться приближённо (один раз приближённо решается нелинейная алгебраическая система), так как в предложенной конструкции точное выполнение условия Стренга-Фикса, вообще говоря, невозможно.

2. СПЕЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА

Построим функцию $f(x)$ с носителем $[-1,1]$, порождающую систему функций $\{f(\frac{x-x_j}{h})\}_{j=0}^m$, на основе которой далее будет строиться приближённое решение уравнения Кортевега-де-Фриза (8)—(9). Пусть

$$f(x) = \begin{cases} a_l x^{2l} + a_{l-1}x^{2l-2} + \ldots + a_1 x^2 + 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases} \quad (1)$$

Неизвестные коэффициенты $a_1,\ldots,a_l$ многочлена определим далее из условий гладкости, ортогональности и приближённых условий Стренга—Фикса.

Потребуем выполнения 4 условия гладкости

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0.$$

Пусть также выполнены следующие 4 условия ортогональности в смысле $L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle f(x), f(x-1)\rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle f'''(x), f(x-1)\rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle f(x-1)f'(x), f(x-1)\rangle = 0, \quad (4)$$

$$\langle f(x)f'(x-1), f(x-1)\rangle = 0. \quad (5)$$

Эти 4 условия будут нужны для того, чтобы в результате проектирования на соответствующее конечномерное подпространство для функций-аплитуд получились обыкновенные линейные дифференциальные уравнения. Легко проверить интегрированием по частям, что (4) эквивалентно

$$\langle f(x)f'(x-1), f(x-1)\rangle = 0. \quad (6)$$

Из чётности $f(x)$ следует, что в (2)—(6) можно заменить $f(x-1)$ на $f(x+1)$:

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(x+1)\rangle &= \langle f'''(x), f(x+1)\rangle = \\ &= \langle f(x+1)f'(x), f(x+1)\rangle = \\ &= \langle f(x)f'(x+1), f(x+1)\rangle = 0.\end{aligned} \quad (7)$$

Позаботимся теперь о хороших аппроксимационных свойствах системы ОФФ. Известно ([5], [6]), что если функция $f(x)$ с носителем $[-1,1]$ принадлежит W_2^{p+1}, то эквивалентны следующие условия:

1) $\hat{f}(0) \neq 0$, но $\hat{f}$ имеет нули порядка p в других точках, кратных 2π, т.е.

$$D^\alpha \hat{f}(2\pi j) = 0,\ 0 \in \mathbb{Z},\ \alpha| \leq p.$$

2) Если $|\alpha| \leq p$, то

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^\alpha f(t-j)$$

полином от $t_1,\ldots,t_k$ с главным членом ct^α, $c \neq 0$.

3) Для каждой функции $u(x) \in W_2^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ существуют такие коэффициенты w_j, что при $h \to 0+$ выполнены неравенства

$$\| u - \sum_j w_j f_j \|_{W_2^S} \leq c_s h^{p+1-s} \| u \|_{W_2^{P+1}},$$

$$\sum_j | w_j |^2 \leq c \| u \|_{L_2}^2,\ 0 \leq s \leq p,$$

где постоянные c_s и c не зависят от $u(x)$ и от h. Показатель $p+1-s$ является наилучшим для рассматриваемых классов W_2^s и W_2^{p+1}.

В предложенной нами конструкции (1) даже условие $f(x) + f(x-1) \equiv 1$, необходимое для точности порядка h, накладывает на коэффициенты $a_1,\ldots,a_l$ в точности l условий. То есть с учётом условий гладкости и ортогональности для коэффициентов $a_1,\ldots,a_l$ получится переопределённая система.

Потребуем, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла приближённому условию Стренга-Фикса на отрезке $[0,1]$:

$$f(x) + f(x-1) \approx 1,$$

то есть

$$f(y^i) + f(y^i - 1) = 1,\ i = 1,\ldots,q,$$

где $y^1,\ldots,y^q$ сетка на отрезке $[0,1]$ (необязательно равномерная). Эти q условий линейным образом связывают коэффициенты $a_1,...,a_l$ функции $f(x)$.

Объединяя 4 условия гладкости, 4 условия ортогональности и последние q условий, получим алгебраическую систему уравнений для коэффициентов $a_1,...,a_l$. Этих коэффициентов $a_1,...,a_l$ необходимо взять $l := 8+q$. Численно решая полученную систему, в которой только 4 уравнения нелинейные (два квадратичных и два кубических), находим коэффициенты $a_1,...,a_l$. После этого нормируем в смысле L_2 найденную функцию.

3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕННОЙ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим уравнение Кортевега-де-Фриза с начальным условием:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in [0,T]. \end{cases} \qquad (8),\ (9)$$

На отрезке $[0,T]$ введём равномерную сетку с шагом h и узлами x_k, $(k=0,...,m)$, $x_0 = 0$, $x_k = T$. Приближённое решение задачи (8)—(9) будем искать в виде

$$U(t,x,h) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t) f(\frac{x-x_k}{h}). \qquad (10)$$

Подставим приближённое решение (10) в начальное условие (9) и умножим скалярно в смысле L_2 обе части полученного равенства на $f(\frac{x-x_j}{h})$ $(j=0,...,m)$. Исходя из финитности и чётности $f(x)$, условия ортогональности (2) и того, что $\| f(x) \|_{L_2} = 1$, получим

$$A_k(0) = \frac{\int\limits_{x_k-h}^{x_k+h} u_0(x) f(\frac{x-x_k}{h}) dx}{\int\limits_{x_k-h}^{x_k+h} u_0(x) f^2(\frac{x-x_k}{h}) dx} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} u_0(x_k+hs) f(s) ds}{\int\limits_{-1}^{1} u_0(x_k+hs) f^2(s) ds} = \qquad (11)$$

$$= \frac{2u_0(x_k)\int\limits_{-1}^{1} f(s)ds + h^2 u_0''(x_k) \int\limits_{-1}^{1} s^2 f(s) ds + O(h^4)}{2u_0(x_k) + h^2 u_0''(x_k)\int\limits_{-1}^{1} s^2 f^2(s) ds + O(h^4)}.$$

Подставим приближённое решение (10) в уравнение (8) и умножим скалярно в смысле L_2 обе части полученного равенства на $f(\frac{x-x_j}{h})$ $(j=0,...,m)$. Исходя из финитности $f(x)$ и ортогональности (2)—(7), получим

$$\frac{d}{dt} A_k(t) = \frac{\| f' \|^2_{L_2}}{h^3} A_k(t),$$

откуда

$$A_k(t) = A_k(0) \exp(\frac{\| f' \|^2}{h^3} t).$$

Приближённое решение, соответствующее сетке шага h, построено:

$$U(t,x,h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{2u_0(x_k)\int\limits_{-1}^{1} f(s)ds + h^2 u_0''(x_k) \int\limits_{-1}^{1} s^2 f(s) ds + O(h^4)}{2u_0(x_k) + h^2 u_0''(x_k)\int\limits_{-1}^{1} s^2 f^2(s) ds + O(h^4)}.$$

$$\cdot f(\frac{x-x_k}{h}) \exp(\frac{\| f' \|^2}{h^3} t).$$

При практической реализации предложенного метода компьютер нужен только для однократного приближённого синтеза функции f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рвачёв В. А.,Рвачёв В. А.* Теория приближений и атомарные функции / М.: Знание, 1978, 64 с.

2. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем / М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1979, 320 с.

3. *Блатов И. А., Стрыгин В. В.* Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем / Воронеж.: Изд-во ВГУ, 1997, 406 с.

4. *Леонтьев В. Л.* Ортогональные финитные функции и численные методы / Ульяновск: УлГУ, 2003, 178 с.

5. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / М.: Наука, 1981, 416 с.

6. *Новиков И. Я., Протасов В. А., Скопина М. А.* Теория всплесков / М.: Наука, 2005, 664 с.

Новиков Игорь Яковлевич — д.ф.-м. наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений ВГУ, тел. 8(4732)208771, e-mail: igor.nvkv@gmail.ru

Северин Григорий Юрьевич — к.ф.-м. наук, старший преподаватель кафедры математического и прикладного анализа ВГУ, тел. 8(4732)208348, e-mail: akg.77@mail.ru

Novikov Igor Yakovlevich — doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation aquations, Voronezh State University, tel: 8(4732)208771, E-mail: igor.nvkv@gmail.ru

Sewerin Grigory Yurievich — candidat of Sciences in Physics and Mathematics, senior teacher of the Department of mathematic and applied analysis, Phone: 8(4732)208348, e-mail: akg.77@mail.ru