УДК 539.374

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ С КОНЦЕНТРАТОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

А. А. Никулина, А. Н. Спорыхин

Воронежский государственный университет.

Поступила в редакцию 16.03.2010 г.

Аннотация: Исследуется напряженно-деформированное состояние толстой плиты, ослабленной круговым отверстием радиуса a, на внешней поверхности которой действуют сдвиговые усилия интенсивностью τ, а контур отверстия свободен от усилий.
Ключевые слова: пластичность, упруго-вязко-пластическое тело, плоская деформация.

Abstract: The article studies mode of deformation of thick slab, weakened by round hole with radius a, on the outer surface of which is applied shearing forces τ, but hole outline is free from stress.
Keywords: plasticity, elastoviscoplastic body, flat-strained state.

Пусть бесконечная толстая пластина (рис. 1) с круговым отверстием радиуса a находится под действием сдвиговых усилий τ.

Предположим, что пластическая зона начинает зарождаться на контуре отверстия. При этом в пластической зоне материал пластины описывается моделью упруго-вязко-пластического тела [1], а в упругой зоне моделью несжимаемого упругого тела. Рассмотрим случай плоской деформации.

Система уравнений для определения напряженно-деформированного состояния поставленной задачи в полярной системе координат (r,θ) состоит из:

В пластической зоне $a \le r \le \gamma$

уравнений равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0\\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0\end{gathered} \qquad (1)$$

условия пластичности

$$\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)^2 + (\tau_{r\theta} - c\varepsilon_{r\theta}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{r\theta}^p)^2 = k^2 \qquad (2)$$

ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{gathered}d\varepsilon_r^p = d\tilde{\lambda}\left(S_r - c\varepsilon_r^p - \eta\dot{\varepsilon}_r^p\right)\\ d\varepsilon_\theta^p = d\tilde{\lambda}\left(S_\theta - c\varepsilon_\theta^p - \eta\dot{\varepsilon}_\theta^p\right)\\ d\varepsilon_{r\theta}^p = d\tilde{\lambda}\left(\tau_{r\theta} - c\varepsilon_{r\theta}^p - \eta\dot{\varepsilon}_{r\theta}^p\right)\\ S_r = -S_\theta = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\end{gathered} \qquad (3)$$

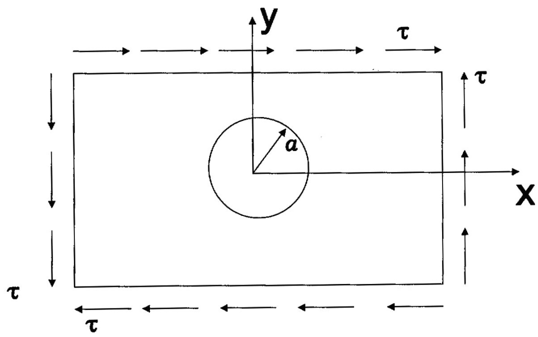

Рис. 1. Пластина под действием сдвиговых усилий

условия несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \qquad (4)$$

соотношений для полных деформаций

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p,\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p,\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta}^e + \varepsilon_{r\theta}^p \qquad (5)$$

закона Гука

$$S_r = 2\mu\varepsilon_r^e,\ S_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta^e,\ S_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}^e \qquad (6)$$

соотношений Коши

$$\begin{gathered}\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r},\\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]\end{gathered} \qquad (7)$$

В упругой зоне полная система уравнений состоит из уравнений (1), (4), (6), (7).

Граничные условия:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \text{ при } r = a \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}\sigma_r = \tau\sin 2\theta,\ \sigma_\theta = -\tau\sin 2\theta,\ \tau_{r\theta} = \tau\cos 2\theta\\ \text{при } r \to \infty\end{gathered} \qquad (9)$$

На неизвестной упругопластической границе γ предполагаем выполнение условий сплошности, т.е.:

$$\left.\begin{array}{c} u_r^e - u_r^p = 0,\ u_\theta^e - u_\theta^p = 0 \\ \sigma_r^e = \sigma_r^p,\ \sigma_\theta^e = \sigma u_\theta^p \\ \tau_{r\theta}^e = \tau_{r\theta}^p \end{array}\right\} \text{ при } r = \gamma \qquad (10)$$

В приведенных выше соотношениях c — коэффициент упрочнения; k — предел текучести; η — коэффициент вязкости; $\varepsilon_1^1,\ \dot{\varepsilon}_1^2$ — компоненты тензора деформаций и скоростей деформаций; μ — параметр Ламе; $d\lambda$ — скалярный положительный множитель. Верхние индексы p или e обозначают принадлежность величин к пластической или упругой областям.

Приведенная система уравнений для пластической зоны (1)—(7) и, соответственно, упругой зоны (1), (4), (6), (7) при условиях (8)—(10) представляет собой замкнутую математическую задачу.

Решение задачи проведем полуобратным методом Сен-Венана [2]. Приведенная выше задача является статически неопределимой. Предположим, исходя из вида граничных условий (9), что $\sigma_r = -\sigma_\theta$, получим статически определенную задачу в упругой зоне.

Пусть функции напряжений в упругой зоне имеют вид

$$\begin{array}{c} \sigma_r = \varphi(r)\sin 2\theta,\ \sigma_\theta = -\varphi(r)\sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} = -\psi(r)\cos 2\theta \end{array} \qquad (11)$$

Подставляя (11) в уравнения равновесия (1) получаем систему уравнений для определения φ и ψ

$$\frac{d\varphi}{dr} + \frac{2}{r}(\varphi - \psi) = 0,\ \ \frac{d\psi}{dr} + \frac{2}{r}(\psi - \varphi) = 0$$

откуда находим

$$\varphi(r) = \frac{c_1}{r^4} + \frac{c_2}{2},\ \ \psi(r) = -\frac{c_1}{r^4} + \frac{c_2}{2},\ \ c_1, c_2 = \text{const}$$

из граничных условий (9) следует, что $c_2 = 2\tau$, таким образом

$$\sigma_r = \left(\frac{c_1}{r^4} + \tau\right)\sin 2\theta,\ \ \tau_{r\theta} = \left(-\frac{c_1}{r^4} + \tau\right)\cos 2\theta \qquad (12)$$

из закона Гука (6), привлекая при этом (4) и (12) получаем

$$\begin{array}{c} \varepsilon_r = \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{c_1}{r^4} + \tau\right)\sin 2\theta \\ \varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = -\dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{c_1}{r^4} + \tau\right)\sin 2\theta \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2\mu}\left(-\dfrac{c_1}{r^4} + \tau\right)\cos 2\theta \end{array} \qquad (13)$$

из первого и второго соотношений (13), учитывая (7), находим компоненты перемещений u_r и u_θ

$$\begin{array}{c} u_r = \dfrac{1}{2\mu}\left(-\dfrac{c_1}{3r^3} + r\tau\right)\sin 2\theta + c_3(\theta) \\ u_\theta = \dfrac{1}{2\mu}\left(\dfrac{c_1}{3r^3} + r\tau\right)\sin 2\theta - \int c_3(\theta)d\theta + c_4(r) \end{array} \qquad (14)$$

третье соотношение Коши (7) согласно (14) запишется так:

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{c_1}{r^4} + \tau\right)\cos 2\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}c_3'(\theta) + c_4'(r) - \frac{1}{r}\left(-\int c_3(\theta)d\theta + c_4(r)\right)\right].$$

Положим $c_3 = c_4 = 0$, тогда это выражение для $\varepsilon_{r\theta}$ совпадает с третьим соотношением (13). Очевидно, что при этом так же выполняется условие несжимаемости (4).

Таким образом, напряженно-деформированное состояние в упругой зоне определяется соотношениями (12)—(14) где $c_3 = c_4 = 0$.

Прежде чем перейти к определению решения в пластической зоне проведем анализ начала образования пластических зон. При этом, не ограничивая общность рассуждений, рассмотрим условия пластичности Мизеса $S_{ij}S_{ij} = 2$, которое в нашем случае в безразмерном виде таково

$$\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2 = 1.$$

Для определения направления возникновения пластических зон необходимо найти значения угла θ, при котором функция $f(\theta) = S_r^2(\theta) + \tau_{r\theta}^2$ достигает максимума, равного 1.

Анализ показал, что т.к. $\theta \in [0, 2\pi]$, то при $c_1 > 0$ точками максимума являются $\theta = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

Таким образом, пластическая область возникает вдоль тех радиальных направлений, где $S_r^e = \sigma_r^e$ — максимальны, а $\tau_{r\theta} = 0$.

Учитывая это, а так же то, что $\tau_{r\theta} = 0$ при $r = a$ (в месте зарождения пластической зоны), предположим, что $\tau_{r\theta} = 0$ во всей пластической области, тогда согласно (10) получим

$$\tau_{r\theta}^2\Big|_{r=\gamma} = 0.$$

Откуда, согласно (12) получаем

$$c_1 = \tau\gamma^4. \qquad (15)$$

Т.к. пластическая область возникает преимущественно вдоль направлений $\theta = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$, то будем рассматривать задачу в пластической области как осесимметричную.

Из условия несжимаемости (4), учитывая (14) получаем

$$u = \frac{c_5}{r}. \qquad (16)$$

Из условия непрерывности перемещений (10) на упругопластической границе γ имеем

$$c_5 = \frac{\tau\gamma^2(\theta)}{3\mu}\sin 2\theta. \qquad (17)$$

Из соотношений (5)—(7) получаем

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p = -\frac{c_5}{r^2} - \varepsilon_r^p$$

$$S_r = 2\mu\varepsilon_r^e = -2\mu\left(\frac{c_5}{r^2} - +\varepsilon_r^p\right).$$

Условие пластичности (2) тогда запишется в форме

$$\eta\dot{\varepsilon}_r^p + (c + 2\mu)\varepsilon_r^p = \chi - \frac{2\mu c_5}{r^2},$$

где $\chi = -k$ при $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ — растягивающие радиальные напряжения и сжимающие угловые; $\chi = k$ при $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ — сжимающие радиальные напряжения и растягивающие угловые.

Откуда, при условии, что $\varepsilon_r^p\big|_{t=0} = 0$ получаем

$$\varepsilon_r^p = \frac{\chi}{c+2\mu}\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\left(1 - \frac{1}{r^2}\frac{2\mu c_5}{\chi}\right). \qquad (18)$$

Т.к. $\sigma_r - \sigma_\theta = 4\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p\right)$, то привлекая соотношения (7), (16), (18) и подставляя полученное выражение в уравнение равновесия (1) получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 4\mu\left[-\frac{c_5}{2r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\frac{2\mu c_5}{\chi}\right)\right] = 0,$$

откуда следует

$$\sigma_r = 4\mu\left[-\frac{c_5}{2r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu}\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\ln r + \frac{1}{2r^2}\frac{2\mu c_5}{\chi}\right)\right] + c_6$$

$$\sigma_\theta = 4\mu\left[\frac{c_5}{2r^2} + \frac{\chi}{c+2\mu}\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\ln r + 1 - \frac{1}{2r^2}\frac{2\mu c_5}{\chi}\right)\right] + c_6.$$

Постоянная интегрирования c_6 определяется из граничных условий (8) $\sigma_r = 0$ на контуре отверстия при $r = a$.

Таким образом, поле напряжений в пластической зоне определяется соотношениями

$$\begin{gathered}\sigma_r = 4\mu\left[-\frac{c_5}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{\chi}{c+2\mu}\times\right.\\ \left.\times\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\left(\ln\frac{r}{a} + \frac{\mu c_5}{\chi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)\right)\right]\\ \sigma_\theta = 4\mu\left[\frac{c_5}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{\chi}{c+2\mu}\times\right.\\ \left.\times\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\left(\ln\frac{r}{a} + 1 - \frac{\mu c_5}{\chi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2}\right)\right)\right].\end{gathered} \qquad (19)$$

Из условия сопряжения (10) радиальных напряжений на упругопластической границе γ, привлекая при этом (12), (15), (17), (19), получаем уравнение для определения упругопластической границы в виде

$$\begin{gathered}4\mu\left[-\frac{\tau}{6\mu}\left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)\sin 2\theta + \frac{\chi}{c+2\mu}\left(1 - e^{-\frac{2\mu+c}{\eta}t}\right)\times\right.\\ \left.\times\left(\ln\frac{\gamma}{a} + \frac{\tau}{3\chi}\left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)\sin 2\theta\right)\right] = 2\tau\sin 2\theta.\end{gathered} \qquad (20)$$

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3.

На рис. 2 представлены положения упругопластической границы γ (области пластического деформирования) при $0 < t \le 1$. При этом, контур 1 соответствует времени $t = 0.0001$, контур 2 — $t = 0.001$, контур 3 — $t = 1$. Значения физико-механических параметров принимались следующими: упрочнение $c = 0.2$, коэффициент вязкости $\eta = 0.001$, модуль сдвига $\mu = 1$, внутренний радиус $a = 1$, сдвиговые усилия $\tau = 2$.

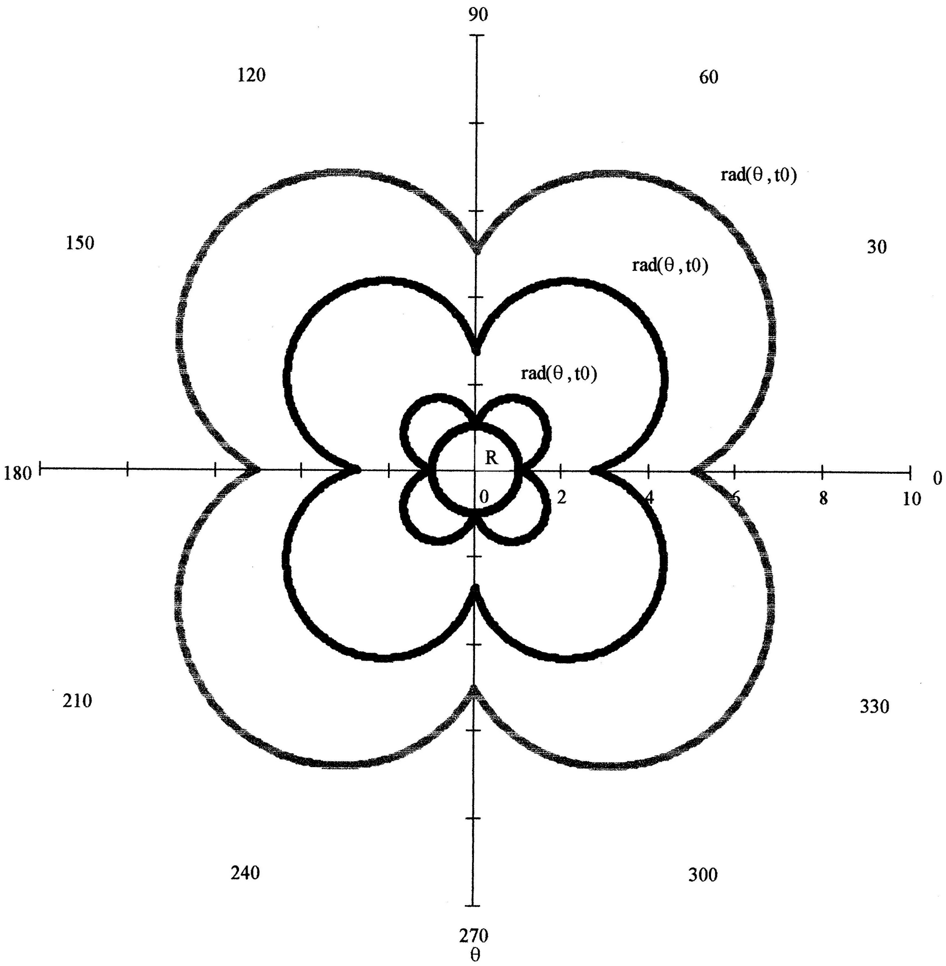

Рис. 2. Положения упругопластической границы

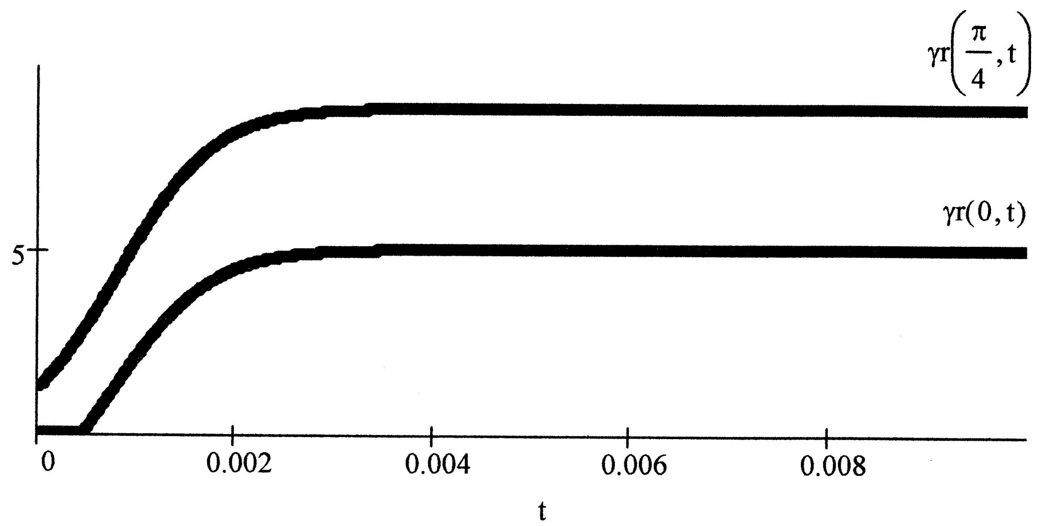

Рис. 3. Распространение упругопластической границы вдоль радиального направления $\dfrac{\pi}{6}$

На рис. 3 представлено распространение упругопластической границы вдоль радиального направления $\dfrac{\pi}{6}$ с течением времени при тех же значениях параметров.

Анализ показал, что пластическая зона развивается преимущественно вдоль диагональных направлений (рис. 2). Развитие пластической области происходит за небольшой промежуток времени (рис. 3), по прошествии которого, достигнув максимальных размеров, не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д.* Неодномерные задачи упруго-вязко-пластичности с неизвестной границей. — Воронеж: ВГУ, 2004 г. — 175 с.

2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. — М.: Наука. 1969 г. — 416 с.

Никулина Анастасия Анатольевна — аспирантка, Воронежский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики, тел.: (4732) 208-763, e-mail: N_nastasya@mail.ru

Спорыхин Анатолий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики, тел.:(4732) 20-87-63, e-mail: mech@amm.vsu.ru

Nikulina Anastasia A. — Voronezh State University, the department of theoretical and applied mechanics, tel.: (4732) 208-763, e-mail: N_nastasya@mail.ru

Sporykhin Anatoly N. — Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of Voronezh State University, the department of theoretical and applied mechanics, tel.: (4732) 208-763, e-mail: mech@amm.vsu.ru