УДК 517.954.988.8

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ*

Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.03.2010 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с нелокальным интегральным условием на решение решается приближенно методом Галёркина, ориентированным на метод конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.
Ключевые слова: гильбертово пространство, метод Галеркина, параболическое уравнение, интегральное условие.

Abstract. In the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with nonlocal integral condition for the solution is resolved by approximate by the Galerkin's method. The established error estimations of approximate solutions, the convergence of approximate solution to exact solution and the orders of speed of convergence.
Keywords: Hilbert space, Galerkin method, parabolic equation, integral conditions.

ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧ

Предполагается, что задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \le M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \mathrm{Re}\, a(u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что для $u, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\| A \|_{V \to V'} \le M$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1].

В пространстве V' на $[0,T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T u(t)dt = \bar{u}. \qquad (2)$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и элемент $\bar{u}$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [2] установлена теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Предположим, что в задаче (2) функция* $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$, *а элемент* $\bar{u} \in D(A) = \{v \in V \mid Av \in H\}$. *Тогда существует единственная функция* $u(t)$ *такая, что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, *удовлетворяющая почти всюду на* $[0,T]$ *уравнению в (2), и выполняется интегральное условие. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0 \le t \le T} \| u(t) \|_H^2 + \int_0^T (\| u(t) \|_V^2 + \| u'(t) \|_{V'}^2) dt \le$$
$$\le M\{\| A\bar{u} \|_H^2 + (\int_0^T \| f(t) \|_H \, dt)^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V'}^2 \, dt\}.$$

Далее задача (2) решается приближенно методом Галеркина.

Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\| u_h \|_{V_h'} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\| v_h \|_V = 1$. Очевидно, что $\| u_h \|_{V_h'} \le \| u_h \|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [3] замечено , что

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты № 10-01-00276 и и № 09-01-92429-КЭ.

оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P_h} : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\| \overline{P_h} u \|_{V_h'} \leq \| u \|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{3}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P_h} u, v) = (u, P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [4].

Задаче (2) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу. Определенную на $[0, T]$ функцию $t \to u_m(t) \in V_m$ назовем приближенным решением задачи (2), найденным полудискретным методом Галеркина, если

$$u_{h'}(t) + A_h u_h(t) = \overline{P_h} f(t), \quad \int_0^T u_h(t) dt = \overline{u}_h. \tag{4}$$

В (4) оператор $A_h = \overline{P_h} A : V_h \to V_h$, а элемент $u_h \in V_h$ определим позже. Заметим, что задача (4) сводится к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Разрешимость задачи (4) устанавливается как и для задачи (2). Отметим также оценку [5]

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| u_h(t) \|_H^2 + \int_0^T \| u_h(t) \|_V^2 \, dt \leq$$
$$\leq K \{ \| u_h(0) \|_H^2 + \int_0^T \| P_h f(t) \|_{V_{h'}}^2 \, dt \}. \tag{5}$$

Определим необходимый в дальнейшем проектор Ритца. Из теоремы Лакса—Мильграмма [6] для любого элемента $u \in V$ следует существование единственного $u_h \in V_h$ такого, что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом, определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой, что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h). \tag{6}$$

Заметим, что из (6) для любого $u \in V$ следует равенство $A_h R_h u = \overline{P_h} A u$.

Отметим некоторые свойства оператора R_h, приведенные в [7]. Оператор R_h в пространстве V является линейным и ограниченным, причём выполняется оценка $\| R_h u \|_V \leq M \alpha^{-1} \| u \|_V$. Кроме того, для любого элемента $u \in V$ справедлива оценка

$$\| (I - R_h) u \|_V \leq M \alpha^{-1} \| (I - Q_h) u \|_V, \tag{7}$$

где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h.

Далее в задаче (4) считаем $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$.

МЕТОД ГАЛЕРКИНА ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРОЕКЦИОННЫМ ПОДПРОСТРАНСТВАМ

Лемма 1. *Пусть в задаче (4) элемент* $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (2), а* $u_h(t)$ *— решение задачи (4). Определим функцию* $z_h(t) = P_h u(t) - u_h(t)$. *Тогда* $z_h(0) = z_h(T)$.

Доказательство. К уравнению (2) применим $\overline{P_h}$. Учитывая соотношение $\overline{P_h} A u(t) = A_h R_h u(t)$, получим равенство $\overline{P_h} u'(t) + A_h R_h u(t) = \overline{P_h} f(t)$. Вычитая из него уравнение (4), будем иметь

$$z_h'(t) + A_h \{ R_h u(t) - u_h(t) \} = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) интегрируем от 0 до T.

$$z_h(T) - z_h(0) = A_h \int_0^T \{ R_h u(t) - u_h(t) \} dt = 0. \quad \square$$

Теорема 2. *Пусть* $u(t)$ *— слабое решение задачи (2), а* $u_h(t)$ *— решение задачи (4) такое, что* $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. *Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| P_h u(t) - u_h(t) \|_H^2 + \int_0^T \| R_h u(t) -$$
$$- u_h(t) \|_V^2 \, dt + \int_0^T \| \overline{P_h} u'(t) - u_h'(t) \|_{V_h'}^2 \, dt \leq \tag{9}$$
$$\leq K \int_0^T \| (P_h - R_h) u(t) \|_V^2 \, dt.$$

Доказательство. Равенство (8) умножим скалярно в пространстве H на $z_h(t)$. Получим

$$(z_h', z_h) + (A_h (R_h u - u_h), z_h) = 0. \tag{10}$$

Заметим, что

$$(A_h (R_h u - u_h), z_h) = a(R_h u - u_h, z_h) =$$
$$= a(R_h u - u_h, R_h u - u_h) + a(R_h u - u_h, P_h u - R_h u). \tag{11}$$

Тогда взяв от (10) с учетом (11) удвоенную вещественную часть, получим

$$\frac{d}{dt} \| z_h \|_H^2 + 2 \mathrm{Re} a(R_h u - u_h, R_h u - u_h) =$$
$$= 2 \mathrm{Re} a(R_h u - u_h, R_h u - P_h u).$$

Последнее равенство интегрируем от 0 до t и оцениваем.

$$\| z_h(t) \|_H^2 - \| z_h(0) \|_H^2 + 2\alpha \int_0^t \| R_h u(s) -$$
$$- u_h(s) \|_V^2 \, ds \leq 2 \int_0^t \| R_h u(s) -$$
$$- u_h(s) \|_V \| (R_h - P_h) u(s) \|_V \, ds \leq \alpha \int_0^t \| R_h u(s) -$$
$$- u_h(s) \|_V^2 \, ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \| (R_h - P_h) u(s) \|_V^2 \, ds.$$

Из последней оценки следует оценка

$$\max_{0\le t\le T}\| z_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \| R_h u(t) - u_h(t)\|_V^2\ dt \le \\ \le K\{\| z_h(0)\|_H^2 + \int_0^T \| (R_h - P_h)u(t)\|_V^2\ dt\}. \tag{12}$$

В (12) оценим $\| z_h(0)\|_H^2$. Из (2) и (4) следует равенство

$$z_h'(t) + A_h z_h(t) = \bar{P}_h A(P_h - I)u(t). \tag{13}$$

В таком случае, учитывая $z_h(0) = z_h(T)$, получим

$$z_h(0) = \exp\{-A_h T\} z_h(0) + \\ + \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\}\overline{P_h} A(P_h - I)u(t)dt. \tag{14}$$

В [2] показано, что $\| \exp\{-A_h T\}\|_{H\to H} \le \le \exp\{-\beta T\} < 1$ с некоторым $\beta > 0$. Тогда из (14) следует оценка

$$\| z_h(0)\|_H^2 = \| (I - \exp\{-A_h T\})^{-1} \times \\ \times \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\}\overline{P_h} A(P_h - I)u(t)dt\|_H^2 \le \\ \le (1 - \exp\{-\beta T\})^{-2} \| \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\} \times \\ \times \overline{P_h} A(P_h - I)u(t)dt\|_H^2 .$$

В последней строчке под знаком нормы стоит решение уравнения (13) с нулевым начальным условием, взятое в точке T. Учитывая оценку (5), получим

$$\| \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\}\overline{P_h} A(P_h - I)u(t)dt\|_H^2 \le \\ \le K\int_0^T \| \overline{P_h} A(P_h - I)u(t)\|_{V_h'}^2\ dt.$$

Напомним, что из (6) следует $\overline{P_h} Au(t) = \overline{P_h} AR_h u(t)$. Тогда, из (3) и ограниченности оператора $A : V \to V'$, следует оценка

$$\int_0^T \| \overline{P_h} A(P_h - I)u(t)\|_{V_h'}^2\ dt \le \\ \le \int_0^T \| A(P_h - R_h)u(t)\|_{V'}^2\ dt \le \\ \le M\int_0^T \| (P_h - R_h)u(t)\|_V^2\ dt.$$

Таким образом,

$$\| z_h(0)\|_H^2 \le C\int_0^T \| (P_h - R_h)u(t)\|_V^2\ dt. \tag{15}$$

Осталось воспользоваться (9) и получить оценку

$$\int_0^T \| z_h'\|_{V_h'}^2\ dt = \int_0^T \| A_h[R_h u(t) - u_h(t)]\|_{V_h'}^2\ dt \le \\ \le M\int_0^T \| R_h u(t) - u_h(t)\|_V^2\ dt. \tag{16}$$

Из последней оценки, (12) и (15) следует необходимая оценка (9). □

Приведем условия, позволяющие из оценки (9) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешности к нулю .

Пусть $\{V_h\}$ — последовательность конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\| (I - Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Заметим [8], что такая последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в пространстве H, и в пространстве V'.

Следствие 1. *Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств такая, что $\| P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда в условиях теоремы 2 при $h \to 0$*

$$\max_{0\le t\le T}\| u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \| u(t) - u_h(t)\|_V^2\ dt + \\ + \int_0^T \| u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\ dt \to 0. \tag{17}$$

Доказательство. Для любого $v \in V$ из (7) получим

$$\| (P_h - R_h)v\|_V \le \| P_h\|_{V\to V}\| (I - R_h)\|_V \le \\ \le \| P_h\|_{V\to V}\ M\alpha^{-1}\| (I - Q_h)v\|_V \to 0 \tag{18}$$

при $h \to 0$. Отсюда, из (9) и предельной плотности подпространств $\{V_h\}$ в пространствах V и H следует стремление к нулю первого и второго слагаемых в (17).

Далее для произвольного $u_h \in V_h$ получим оценку

$$\| u_h\|_{V'} = \sup |(u_h, v)| = \sup |(u_h, P_h v)| \le \\ \le \| u_h\|_{V_h'} \sup \| P_h v\|_V = \| u_h\|_{V_h'} \| P_h\|_{V\to V},$$

где все точные верхние границы берутся по $v \in V$ с $\| v\|_V = 1$. Отсюда для любого $v \in V'$ следует, что

$$\| \overline{P_h} v\|_{V'} \le \| P_h\|_{V\to V} \| \overline{P_h} v\|_{V_h'} \le \| P_h\|_{V\to V} \| v\|_{V'},$$

то есть $\| \overline{P_h}\|_{V'\to V'} \le \| P_h\|_{V\to V}$. Поэтому для всех $v \in V'$ при $h \to 0$

$$\| (I - \overline{P_h})v\|_{V'} = \| (I - \overline{P_h})(v - S_h v)\|_{V'} \le \\ \le (1 + \| P_h\|_{V\to V})\| (I - S_h)v\|_{V'} \to 0,$$

где S_h — ортопроектор в пространстве V' на V_h. Отсюда, из (9) и предельной плотности подпространств $\{V_h\}$ в пространствах V и V' следует сходимость к нулю и третьего слагаемого в (17). □

Укажем класс подпространств $\{V_h\}$ типа конечных элементов, для которых $\| P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены.

Для этого предположим существование гильбертова пространства E такого, что

$E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [9]). Например, если параболическое уравнение в области Ω определено дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то считаем $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, и $E = W_2^2(\Omega)$.

Относительно подпространств V_h предположим, что

$$\| (I - Q_h)v \|_V \le rh \| v \|_E \quad (v \in E). \tag{19}$$

Условие (19) является типичным для подпространств типа конечных элементов [10]. Например, для параболического уравнения второго порядка, одномерного по пространственным переменным, в качестве V_h можно взять подпространство кусочно-линейных функций. Из (19) для $v \in V$ получается [11] оценка (аналог леммы Обена-Нитше)

$$\| (I - Q_h)v \|_H \le r_1 h \| (I - Q_h)v \|_V . \tag{20}$$

Предположим также, что

$$\| v_h \|_V \le r_2 h^{-1} \| v_h \|_H \quad (v_h \in V_h). \tag{21}$$

В методе конечных элементов условие (21) означает [12] равномерное разбиение области пространственных переменных.

Из (20) и (21) следует оценка $\| P_h \|_{V\to V} \le r_1 r_2 + 1$ [13].

Из оценки (9) кроме сходимости (17) можно, учитывая предположения (19) и (21), для достаточно гладких решений получать и скорость сходимости погрешностей к нулю.

Предположим, что решение задачи (2) $u \in L_2(0,T;E)$. Тогда из (9), (7), (18), (19) и (21) получим

$$\int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_V^2 \, dt \le Kh^2 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \, dt.$$

Если же решение $u \in L_2(0,T;E) \cap C([0,T],V)$, то из (9), (7), (18), (20) и (21) следует

$$\max_{0\le t\le T} \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 \le$$
$$\le Kh^2 \{\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_V^2 + \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \, dt\}.$$

Теперь заметим [14], что из (20) следует оценка

$$\| (I - P_h)u \|_{V'} \le r_1 h \| (I - P_h)u \|_H , \tag{22}$$

которая позволяет получить оценку погрешности производных. Пусть решение $u \in L_2(0,T;E)$ и $u' \in L_2(0,T;H)$, то из (9), (7), (18), (19), (20), (22) и (21) следует оценка

$$\int_0^T \| u'(t) - u_h'(t) \|_{V'}^2 \, dt \le$$
$$\le Kh^2 \int_0^T (\| u(t) \|_E^2 + \| u'(t) \|_H^2) dt.$$

МЕТОД ГАЛЕРКИНА ПО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОЕКЦИОННЫМ ПОДПРОСТРАНСТВАМ

Далее покажем, что в случае достаточной гладкости $u(t)$ — решения задачи (2) сходимость (17) с оценками скорости сходимости выполняется для последовательности подпространств $\{V_h\}$ без условия, что $\| P_h \|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены.

Теорема 3. *Пусть $u(t)$ — решение задачи (2) такое, что $u' \in L_2(0,T;V)$, а $u_h(t)$ — решение задачи (5) такое, что $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. Тогда справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \max_{0\le t\le T} \| Q_h u(t) - u_h(t) \|_H^2 + \int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_V^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| \overline{P_h} u'(t) - u_h'(t) \|_{V_h'}^2 \, dt \le \\ \le K\{\int_0^T \| (I - Q_h)u'(t) \|_H^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| (I - Q_h)u(t) \|_V^2 \, dt\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что из предположения $u' \in L_2(0,T;V)$ следует $u \in C([0,T],V)$. Обозначим $y_h(t) = Q_h u(t) - u_h(t)$. Из (8) получим равенство

$$\begin{gathered} y_h'(t) + A_h y_h(t) = \\ = (Q_h - P_h)u'(t) + \overline{P_h} A(Q_h - I)u(t). \end{gathered} \tag{24}$$

Из (24), оценок (5) и (3), непрерывного вложения $H \subset V'$ и $\| P_h \|_{H\to H} = 1$ следует, что

$$\begin{gathered} \max_{0\le t\le T} \| y_h(t) \|_H^2 + \int_0^T \| y_h(t) \|_V^2 \, dt \le \\ \le K\{\| y_h(0) \|_H^2 + \int_0^T \| (Q_h - P_h)u'(t) \|_{V_h'}^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| \overline{P_h} A(Q_h - I)u(t) \|_{V_h'}^2 \, dt\} \le \\ \le K\{\| y_h(0) \|_H^2 + \int_0^T \| (Q_h - I)u'(t) \|_H^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| (Q_h - I)u(t) \|_V^2 \, dt\} \end{gathered} \tag{25}$$

В (25) необходимо оценить $\| y_h(0) \|_H$. Из (8) следует равенство

$$y_h'(t) + A_h\{R_h u(t) - u_h(t)\} = (Q_h - P_h)u'(t). \tag{26}$$

Так как $\int_0^T u_h(t)dt = R_h \overline{u}$, то, интегрируя (26), получим

$$y_h(T) - y_h(0) = \int_0^T (Q_h - P_h)u'(t)dt. \tag{27}$$

Из (27) и (24) следует

$$\begin{gathered} y_h(0) = \exp\{-A_h T\} y_h(0) + \int_0^T (P_h - Q_h)u'(t)dt + \\ + \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\}\{(Q_h - P_h)u'(t) + \\ + \overline{P_h} A(Q_h - I)u(t)\}dt. \end{gathered} \tag{28}$$

В (28) третье слагаемое в правой части есть решение уравнения (24) с нулевым начальным условием. Тогда, воспользовавшись оценкой (5), подобно оценки (25) получим

$$\begin{gathered} \| y_h(0) \|_H^2 = \\ = \| (I - \exp\{-A_h T\})^{-1} \{ \int_0^T (P_h - Q_h)u'(t)dt + \\ + \int_0^T \exp\{-A_h(T-t)\}[(Q_h - P_h)u'(t) + \\ + \overline{P_h} A(Q_h - I)u(t)]dt\} \|_H^2 \le \\ \le (1 - \exp\{-\beta T\})^{-2} C \{ \int_0^T \| (Q_h - I)u'(t) \|_H^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| (Q_h - I)u(t) \|_V^2 \, dt\}. \end{gathered} \tag{29}$$

Из (25) и (29) следует оценка первых двух слагаемых в левой части (23). Для получения оценки третьего слагаемого в (23) следует воспользоваться (16) и оценкой $\| R_h u \|_V \le M\alpha^{-1} \| u \|_V$. □

Следствие 2. *Пусть* $\{V_h\}$ *— предельно плотная в пространстве* V *последовательность конечномерных подпространств. Тогда в условиях теоремы 3 при* $h \to 0$

$$\max_{0 \le t \le T} \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 + \int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_V^2 \, dt + \\ + \int_0^T \| P_h u'(t) - u_h'(t) \|_{V_h'}^2 \, dt \to 0.$$

Доказательство следует из (23) и непрерывного вложения $V \subset H$. □

Предположим теперь, что пространства V_h удовлетворяют условию (19). Пусть решение задачи (2) такое, что $u \in L_2(0,T;E)$ и $u' \in L_2(0,T;V)$. Пусть также $u_h(t)$ — решение задачи (5) такое, что $\bar{u}_h = R_h \bar{u}$. Тогда из (23), принимая во внимание (20), получаются следующие оценки погрешностей:

$$\max_{0 \le t \le T} \| u(t) - u_h(t) \|_H^2 \le Kh^2 \{ \max_{0 \le t \le T} \| u(t) \|_V^2 + \\ + \int_0^T (\| u(t) \|_E^2 + \| u'(t) \|_V^2) dt\};$$

$$\int_0^T \| u(t) - u_h(t) \|_V^2 \, dt \le \\ \le Kh^2 \int_0^T (\| u(t) \|_E^2 + \| u'(t) \|_V^2) dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обэн Ж. П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. *Критская Е. А., Смагин В. В.* О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 222—225.

3. *Вайникко Г. М., Оя П. Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1269—1277.

4. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, — № 3. — С. 143—160.

5. *Смагин В. В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63—67.

6. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.

7. *Васильева Т. Е., Смагин В. В.* Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та Воронежского гос. у-та. Воронеж. 2001. С. 38—42.

8. *Смагин В. В., Сотников Д. С.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 193—198.

9. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

10. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

11. *Смагин В. В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115—123.

12. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. — Ереван. 1979. — 236 с.

13. *Смагин В. В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79—94.

14. *Смагин В. В.* Коэрцитивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 96 — 100.

Нгуен Тыонг Хуен — студентка Воронежского государственного университета, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, тел.: 208-771; e-mail: chie1092004@yahoo.com

Смагин Виктор Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета; тел.: 208-771; e-mail: smagin@math.vsu.ru.

Nguyen Thuong Huyen — student, Voronezh State University, Department of functional analysis and operation equations, tel: 208-771, e-mail: chie1092004@yahoo.com

Smagin Victor Vasilievich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University, tel: 208-771, e-mail: smagin@math.vsu.ru.