УДК 514; 517.5

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^2$

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 05.03.2010 г.

Аннотация. В работе обсуждается задача описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 2-мерного комплексного пространства. Проинтегрировано семейство матричных алгебр Ли, соответствующих одному классу однородных поверхностей. Уравнения полученных поверхностей имеют сходство с уравнениями логарифмических спиралей.
Ключевые слова: комплексное пространство, аффинное преобразование, однородное многообразие, векторное поле, алгебра Ли.

Abstract. The problem of description of affinely homogeneous real hypersurfaces of 2-dimensional complex space is considered in the article. The family had been integrated of matrix Lie algebras that correspond to one class of homogeneous surfaces. The equations of the surfaces obtained are similar to the logarithmic spirals equations.
Keywords: complex space, affine transformation, homogeneous manifold, vector field, Lie algebra.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что логарифмические спирали

$$1 = |z| e^{B \arg z}, z = x + iy, B \in \mathbb{R} \tag{1}$$

являются аффинно-однородными кривыми в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y (см., например, [1]).

При этом аффинные преобразования плоскости $\mathbb{R}^2$, перемещающие точки любой спирали вдоль кривой, являются аффинными и в комплексном смысле.

При описании аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ возникают естественные обобщения кривых (1). Например, трубчатая поверхность

$$M = \gamma + i\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$$

над любой аффинно-однородной кривой $\gamma \in \mathbb{R}^2$ (и, в частности, над любой логарифмической спиралью) аффинно-однородна в $\mathbb{C}^2$.

Ниже показано, что возможны обобщения другого рода. Мы строим семейство аффинно-однородных поверхностей пространства $\mathbb{C}^2$, уравнения которых

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z| e^{B \arg z}, B \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

в координатах (z, w) этого пространства естественно связаны с уравнением (1).

Отметим, что полное описание аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ пока не получено. Семейство поверхностей (2) является новым примером однородных многообразий.

1. АЛГЕБРА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, КАСАТЕЛЬНЫХ К ОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Классификацию однородных поверхностей можно строить с использованием техники канонических уравнений и матричных алгебр Ли по схеме, описанной в работах [2]—[3]. Обозначая комплексные координаты пространства $\mathbb{C}^2$ через z и w, выделим вещественную и мнимую части второй из них: $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$.

Рассмотрим вещественно-аналитическую гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением

$$\begin{gathered} v = F(z, \bar{z}, u) = \\ = |z|^2 + \varepsilon(z^2 + \bar{z}^2) + \sum_{k+l+2m \geq 3} f_{klm} z^k \bar{z}^l u^m. \end{gathered} \tag{3}$$

В случае её однородности алгебра линейных векторных полей вида

$$Z = (A_1 z + A_2 w + p)\frac{\partial}{\partial z} + (B_1 z + B_2 w + q)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{4}$$

касательных к поверхности, имеет размерность, не меньшую, чем 3.

При этом для каждого такого поля выполняется условие касания этим полем обсуждаемой поверхности

$$\mathrm{Re}\left\{Z(\Phi)\right\}_{|M} = 0. \qquad (5)$$

Здесь $\Phi = -v + F(z,\bar{z},u)$ – определяющая функция искомой поверхности M, не известная в начале рассуждений. Мы будем в дальнейшем выделять также вещественную и мнимую части у переменной z, так что $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$, а функцию $F(z,\bar{z},u)$ будем записывать также в виде $F(x,y,u)$.

Изучение уравнения (5) в зависимости от коэффициентов исходного уравнения (3) позволяет получить большое количество алгебр требуемого вида. Эти алгебры удобно представлять в матричной форме, сопоставляя полю (4) матрицу вида

$$\mathrm{Z}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & p \\ B_1 & B_2 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Ниже изучается одно семейство таких алгебр (полученное совместно с Лободой А. В.). Базисом каждой 3-мерной алгебры из этого семейства являются матрицы

$$\mathrm{E}_1=\begin{pmatrix} 2r-4it & i(itr-2-2r^2) & 1 \\ 4i & 4r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{E}_2=\begin{pmatrix} 2t & 2+itr & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$\mathrm{E}_3=\begin{pmatrix} -i(2+itr) & -r(2+itr) & 0 \\ 0 & -i(2+3itr) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $t=\sqrt{2}$, r — параметр семейства, являющийся произвольным вещественным числом.

Коммутационные соотношения для алгебр (7) имеют вид:

$$\left[E_1,E_2\right] = 2tE_1 + 2rE_2 - 4E_3,$$
$$\left[E_1,E_3\right] = -2trE_1 - 2r^2E_2 + 4rE_3,$$
$$\left[E_2,E_3\right] = 0.$$

Основным результатом нашей работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. Существует семейство аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$, являющихся интегральными многообразиями для алгебр векторных полей вида (7). Каждая поверхность этого семейства задаётся (с точностью до аффинных преобразований) уравнением (2).

Доказательство теоремы, связанное с изучением алгебр (7) и соответствующих им однородных поверхностей, мы разобьем на две части.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБР (7) ПРИ $r \neq 0$

Соответствующая базисным матрицам (7) система уравнений (5) получается слишком громоздкой.

Для упрощения задачи интегрирования системы уравнений с частными производными предлагается перейти к другому семейству алгебр, подобных исходному семейству.

Матрицу подобия свяжем с диагонализацией матрицы E_1.

Собственные значения матрицы E1: $\lambda_1 = -2it,\ \lambda_2 = 6r-2it,\ \lambda_0 = 0$.

При $r \neq 0$ они различны, и потому существуют три собственных вектора, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0$:

$$X=\begin{pmatrix} it+2r \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} -it+r \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix} ir \\ 1 \\ 2i-3tr \end{pmatrix}.$$

Тогда предлагается рассмотреть подобие с матрицей

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix} it+2r & -it+r & ir \\ -2i & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 2i-3tr \end{pmatrix}.$$

При таком подобии матрицы базиса (7) примут более простой вид:

$$D_1 = \mathrm{C}^{-1}E_1\mathrm{C}=\begin{pmatrix} -2it & 0 & 0 \\ 0 & 6r-2it & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \mathrm{C}^{-1}E_2\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \mathrm{C}^{-1}E_3\mathrm{C}=\begin{pmatrix} it-2i & 0 & 0 \\ -2tr & 3tr-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти базисные матрицы мы ещё преобразуем, переходя к базису D_1^*, D_2^*, D_3^*. Каждая из матриц D_k^* нового базиса является линейной комбинацией (с вещественными коэффициентами) старых базисных матриц:

$$D_1^* = D_1,\ D_2^* = \frac{-1}{6r}D_1 + \frac{1}{3t}D_2 + \frac{t}{6r}D_3,$$

$$D_3^* = \frac{1}{6r}D_1 + \frac{1}{6t}D_2 - \frac{t}{6r}D_3,$$

так что

$$D_1^* = \begin{pmatrix} -2it & 0 & 0 \\ 0 & 6r-2it & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot$$

Интегрировать уравнения (5), отвечающие таким базисным матрицам алгебры, будет удобно.

Матрицам $D_1^* - D_3^*$ соответствуют следующие векторные поля:

$$D_1^* = -2itz\frac{\partial}{\partial z} + (6r-2it)w\frac{\partial}{\partial w},$$

$$D_2^* = z\frac{\partial}{\partial z},\ D_3^* = z\frac{\partial}{\partial w}.$$

В соответствии с уравнением (5) получаем для D_1^*, D_2^*, D_3^* систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left\{(2ty - 2txi)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} - i\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) + \right. \\ \left. + \left((6ur + 2tF) + i(6rF - 2ut)\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} + i\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{(x+iy)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x} - i\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)\right\} = 0 \\ \operatorname{Re}\left\{(x+iy)\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} + i\right)\right\} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Упрощая систему, получим:

$$\begin{cases} 2ty\dfrac{\partial F}{\partial x} - 2tx\dfrac{\partial F}{\partial y} + (6ur + 2tF)\dfrac{\partial F}{\partial u} - \\ -(6rF - 2ut) = 0 \\ x\dfrac{\partial F}{\partial u} - y = 0 \\ x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Будем решать систему поочередно, постепенно уменьшая количество уравнений и число переменных в системе.

Решим второе уравнение системы (9) . Его общее решение имеет вид:

$$F = u\cdot\frac{y}{x} + G(x,y), \qquad (10)$$

где G – произвольная аналитическая функция от двух переменных.

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-uy}{x^2} + \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{u}{x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{y}{x}.$$

Перепишем третье уравнение системы (9) с учетом полученного решения (10):

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

Переходя к полярной системе, связанной с координатами x,y, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\rho\frac{dG}{d\rho} = 0$$

Его решение имеет вид:

$$G = H(\varphi) = H(\arctan\frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x}) = g(\xi),$$

где g — произвольная аналитическая функция переменной $\xi = \dfrac{y}{x}$.

Тогда, подставляя полученную формулу для G в (10), имеем:

$$F = u\cdot\frac{y}{x} + g(\frac{y}{x}),$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-uy}{x^2} + \frac{-y}{x^2}g',\ \ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{u}{x} + \frac{1}{x}g',\ \ \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{y}{x}.$$

Перепишем первое уравнение системы (9) с учетом полученных решений. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{2t\xi - 6r}{2t(\xi^2+1)}.$$

Общим решением этого ОДУ является следующая функция:

$$g = C_1\cdot\sqrt{\xi^2+1}\cdot e^{\left(\frac{-3r\cdot\arctan\xi}{t}\right)}.$$

Возвращаясь к первоначальным координатам с учетом всех замен, которые мы вводили, получим следующее уравнение искомой поверхности:

$$v = u\cdot\frac{y}{x} + C_1\cdot\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot e^{\left(\frac{-3r\arctan\frac{y}{x}}{t}\right)}.$$

Умножая обе части уравнения на x, получим:

$$-\operatorname{Im}(z\cdot\overline{w}) = |z|\cdot e^{B\cdot\arg z},$$

где

$$B = \frac{-3.r}{t} \neq 0. \qquad (11)$$

Используя далее аффинное преобразование, мы получим требуемое уравнение:

$$\operatorname{Re}(z\cdot\overline{w}) = |z|e^{B\cdot\arg z}.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ АЛГЕБРЫ (7) В СЛУЧАЕ $r=0$

В этом случае исходный базис E_1, E_2, E_3 упростится до вида

$$\mathrm{E}_1=\begin{pmatrix}-4it & -2i & 1\\ 4i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathrm{E}_2=\begin{pmatrix}2t & 2 & i\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{E}_3=\begin{pmatrix}-2i & 0 & 0\\ 0 & -2i & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а коммутационные соотношения для алгебр (12) примут вид:

$$[E_1, E_2] = 2tE_1 - 4E_3,$$
$$[E_1, E_3] = 0,\ [E_2, E_3] = 0.$$

Перейдём от алгебры (12) к подобной ей алгебре с матрицей подобия

$$C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{i}{2} & -t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Новый базис новой алгебры запишем в виде:

$$D_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix}2t & 0 & 2t\\ i & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$D_3 = \begin{pmatrix}-2i & 0 & -2i\\ 0 & -2i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Тогда матрицам $D_1 - D_3$ соответствуют следующие векторные поля:

$$D_1 = (z+1)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$D_2 = 2t(z+1)\frac{\partial}{\partial z} + (iz+i)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad (14)$$
$$D_3 = -2i(z+1)\frac{\partial}{\partial z} - 2iw\frac{\partial}{\partial w}.$$

Система уравнений, соответствующая этим полям, имеет вид:

$$\begin{cases} (x+1)\dfrac{\partial F}{\partial u} = y \\ 2t(x+1)\dfrac{\partial F}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial F}{\partial y} - y\dfrac{\partial F}{\partial u} = x+1. \\ y\dfrac{\partial F}{\partial x} + (x+1)\dfrac{\partial F}{\partial y} + F\dfrac{\partial F}{\partial u} = -u \end{cases} \qquad (15)$$

Общим решением первого уравнения системы (15) будет

$$F = \frac{u}{x+1}\cdot y + G(x,y) \qquad (16)$$

где G – произвольная аналитическая функция от двух переменных.

С учетом полученного решения и замены $\begin{cases} x+1=\xi \\ y=\eta \end{cases}$ получим новую систему:

$$\begin{cases} 2t\xi\dfrac{\partial G}{\partial \xi} + 2t\eta\dfrac{\partial G}{\partial \eta} = -\left(\dfrac{\xi^2+\eta^2}{\xi}\right) \\ \eta\dfrac{\partial G}{\partial \xi} - \xi\dfrac{\partial G}{\partial \eta} = -\dfrac{\eta}{\xi}G \end{cases}.$$

В полярной системе, связанной с координатами ξ,η, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2t\dfrac{\partial G}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\cos\varphi} \\ \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} = \operatorname{tg}\varphi G \end{cases}. \qquad (17)$$

Общее решение второго уравнения системы (17) имеет вид:

$$G = \frac{H(\rho)}{\cos\varphi},$$

где H – произвольная аналитическая функция переменной ρ (ρ – полярный радиус).

Первое уравнение системы (17) примет вид:

$$H'(\rho) = \frac{1}{2t}.$$

Решением этого ОДУ является следующая функция:

$$H(\rho) = \frac{1}{2t} \cdot \rho + C.$$

Возвращаясь к первоначальным координатам с учетом всех замен, которые мы вводили, получим следующую функцию:

$$v = u \cdot \frac{y}{x} + \frac{(x^2 + y^2) + C\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Умножая обе части уравнения на x, получим:

$$-\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w}) = |z|^2 + C.|z|, \text{ C} - \text{const}.$$

Аффинным преобразованием эта поверхность сводится к виду

$$\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = |z|$$

т.е. к виду (2) при $r = 0$.

4. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СЕМЕЙСТВА (2)

Для завершения доказательства аффинной однородности построенных поверхностей достаточно указать семейство аффинных преобразований, действующих транзитивно на этих поверхностях.

Эти преобразования можно получить за счет рассмотрения матричных экспонент от базисных полей алгебры (7).

Преобразование

$$\varphi_1 = \begin{cases} z^* = \lambda z \\ w^* = e^{6sr}.\lambda w \end{cases}, \qquad (18)$$

где $\lambda = e^{-2sti}$, $|\lambda| = 1$, полученное как $\exp(sE_1)$, ($s \in \mathbb{R}$ – произвольное число) сохраняет поверхность

$$\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w}) + |z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot \arg z} = 0. \qquad (19)$$

В самом деле, при такой замене

$$\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w}) \to \operatorname{Im}(\lambda z \cdot \overline{\lambda e^{6rs} w}) = e^{6rs}.\operatorname{Im}(z \cdot \overline{w}).$$

Аналогично,

$$|z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot \arg z} \to |\lambda z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot \arg(\lambda z)} =$$

$$= |z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot (\arg z + \arg \lambda)} =$$

$$= |z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot \arg z} \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot (-2st)} = e^{6rs} \cdot |z| \cdot e^{\frac{-3.r}{t} \cdot \arg z}.$$

Преобразования

$$\varphi_2 = \begin{cases} z^* = e^s z \\ w^* = w \end{cases} \qquad (20)$$

и

$$\varphi_3 = \begin{cases} z^* = z \\ w^* = sz + w \end{cases}, \qquad (21)$$

полученные как экспоненты от полей sE_2, sE_3, , очевидно, тоже сохраняют поверхность (2).

Ясно также, что сдвиговые части (третьи столбцы) базисных матриц (7) любой из рассмотренных алгебр образуют трехмерное вещественное пространство. Это соответствует транзитивному действию на изучаемых 3-мерных поверхностях преобразований (18), (20), (21).

Замечание. Можно показать, что коэффициенты канонических уравнений (3) для поверхностей (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon = \frac{1}{2},\ f_{101} = 0,\ f_{002} = -1,\ f_{102} = \frac{B \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

Коэффициент f_{102} является в этой ситуации аффинным инвариантом поверхности. Следовательно, все поверхности (2) попарно аффинно различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия / Широков А. П. // Широков П. А. М.: Физматгтз. — 1959. — 319 с.

2. *Лобода А. В., Ходарев А. С.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства // «Известия ВУЗов. Математика» 2003, № 10. С. 38—50.

3. *Лобода А. В.* Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства А. В. Лобода // Вестник ВГУ. Сер. «Физика. Математика». 2009, №. 2. С. 71—91.

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг — аспирант кафедры высшей математики, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, тел. 71-53-62, e-mail: thuyduongpy@yahoo.com

Nguyen Thi Thuy Duong — post-graduate student, chaire of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, tel. 71-53-62, E-mail: thuyduongpy@yahoo.com