УДК 517.9

ОБ АТТРАКТОРАХ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЛАБОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

С. К. Кондратьев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.03.2010 г.

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование траекторного и глобального аттракторов для модели движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров.
Ключевые слова: слабоконцентрированные водные растворы полимеров, траекторный аттрактор, глобальный аттрактор.

Abstract. This paper establishes the existence of trajectory and global attractors for a model describing the motion of weak aqueous polymer solutions.
Keywords: weak aqueous polymer solutions, trajectory attractor, global attractor.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, движение несжимаемой жидкости единичной плотности описывается системой в форме Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = \mathrm{Div}\sigma + f, \quad (1.1)$$

$$\mathrm{div} v = 0, \quad (1.2)$$

где $v(x,t)$ — вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке x в момент времени t; $p(x,t)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t; $f(x,t)$ — вектор плотности внешних сил; $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$ — девиатор тензора напряжений (симметрическая матрица порядка n); символ Div означает вектор, компоненты которого равны дивергенции соответствующих строк матрицы.

В системе (1.1), (1.2) неизвестными являются v, p, σ, и общее число неизвестных превосходит число уравнений. Поэтому эта система обычно дополняется некоторыми соотношениями между девиатором тензора напряжений σ и тензором скорости деформации $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$,

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Такие соотношения называются *реологическими*; различные реологические соотношения описывают различные классы жидкостей. Самое известное реологическое соотношение имеет вид

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E}, \quad (1.3)$$

при котором система (1.1), (1.2) превращается в уравнения Навье—Стокса.

Реологическое соотношение (1.3) является адекватным для описания движения большей части встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей при умеренных скоростях. Однако оно неприменимо для жидкостей, обладающих *релаксационными* свойствами. В таких жидкостях равновесное состояние устанавливается не мгновенно после изменения внешних условий, а с некоторым запаздыванием, которое характеризуется значением *времени релаксации*. Это запаздывание объясняется процессами внутренней перестройки (например, связанными с магнитными свойствами жидкости).

В работе [1] для учёта релаксиционных свойств было предложено реологическое соотношение

$$\sigma = 2\nu\left(\mathcal{E} + \varkappa\nu^{-1}\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right), \quad (1.4)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, $\varkappa$ — время ретардации (положительные величины);

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

— полная производная по времени. После подстановки σ в уравнение (1.1) приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) + \nabla p = \mathrm{Div}\sigma + f, \quad (1.5)$$

© Кондратьев С. К., 2010

$$\operatorname{div} v = 0. \qquad (1.6)$$

Отличие системы от системы Навье—Стокса состоит в присутствии члена $\varkappa \operatorname{Div}(d\mathcal{E} / dt)$. Если течение жидкости близко к установившемуся, то этот дополнительный член оказывает малое влияние, и жидкость ведёт себя практически как ньютоновская. В случае же турбулетного или ламинарного пульсирующего течения (то есть при наличии местных ускорений) значение дополнительного члена возрастает, и движение значительно отличается от движения ньютоноской жидкости. Экспериментально было установлено (см. [2]), что именно такое поведение характерно для слабоконцентрированных водных растворов полимеров (полиэтиленоксида, полиакриламида), поэтому система (1.5), (1.6) стала называться *математической моделью движения слабоконцентрированных водных растворов полимеров*.

Уравнения (1.5), (1.6) будем рассматривать в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\big(n = 2,3\big)$. На границе области рассмотрим условие прилипания:

$$v\,|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.7)$$

Разрешимость в сильном и слабом смысле различных начально-граничных задач для системы (1.5), (1.6) рассматривалась во многих работах, например, [3]—[6], [7].

Мы ставим задачу исследовать существование аттракторов для системы (1.5)—(1.7), которую будем рассматривать только в автономном случае (плотность внешних сил f не зависит от времени). В связи с тем, что теорем единственности решения для рассматриваемой системы не установлено, классический подход к аттракторам, основанный на понятии полугруппы операторов, неприменим. В настоящей работе в рамках теории траекторных аттракторов для неинвариантного пространства траекторий (см. [8]) устанавливается существование траекторного и глобального аттракторов надлежащим образом выбранного пространства траекторий системы (1.5)—(1.7). Для введения пространства траекторий доказывается существование слабых решений в классе функций, удовлетворяющих определённой оценке.

В § 2 вводятся используемые функциональные пространства, а также некоторые обозначения.

В § 3 вводятся операторы, необходимые для слабой постановки задачи, определяется слабое решение и вводится аппроксимирующее уравнение.

В § 4 изложены основные понятия и теоремы теории траекторных аттракторов.

В § 5 исследуются свойства операторов, входящий в рассматриваемые операторные уравнения.

В § 6 выводится априорная оценка аппроксимирующего уравнения, которая лежит в основе теорем существования решений и траекторного аттрактора.

В § 7 доказываются теоремы существования решений.

В § 8 для системы (1.5)—(1.7) вводится пространство траекторий и доказывается, что оно обладает траекторным и глобальным аттрактором.

Размерность пространства n (равную 2 или 3), область Ω и физические параметры задачи ν, $\varkappa$ будем считать раз и навсегда зафиксированными, также как и плотность внешних сил f, которую будем считать элементом некоторого (определяемого в дальнейшем) пространства. На протяжении всей работы в одном и том же значении будет использоваться постоянная

$$\alpha = \frac{\nu}{K^2 + \varkappa},$$

где K — постоянная из неравенства Фридрихса (неравенство (2.2) ниже), определяемая областью Ω. Также выберем и навсегда зафиксируем число $\delta \in (0,1]$: оно потребуется, в частности, для введения пространства траекторий.

Автор выражает благодарность М. В. Турбину за ценные обсуждения.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для пространств суммируемых функций и соболевских будем пользоваться стандартными обозначениями.

Опишем шкалу пространств V^α (см. [9, гл. 3, § 4], а также [10], где в абстрактном виде изложена теория гильбертовых шкал). Обозначим $C_0^\infty(\Omega)$ множество бесконечно гладких финитных функций, носители которых содержатся в области Ω, и пусть

$$\mathcal{V} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \operatorname{div} v = 0\}.$$

Определим пространства V^0, V^1, V^2.

Пространство V^0 — это замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $(L_2(\Omega))^n$. Это

гильбертово пространство со скалярным произведением, индуцированным из $(L_2(\Omega))^n$. Отметим, что возможно определение этого пространства следующим образом:

$$V^0 = \{v \in (L_2(\Omega))^n : \operatorname{div} v = 0, (v,n)\,|_{\partial\Omega} = 0\}$$

(здесь дивергенция понимается в смысле распределений; корректность нормальной составляющей $(v,n)\,|_{\partial\Omega}$ доказывается в [11]).

Пространство V^1 — это замыкание множества $\mathcal{V}$ по норме пространства $(H^1(\Omega))^n$. Норма в этом пространстве задаётся формулой

$$\| u \|_1 := \| \nabla u \|_{L_2} \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

(если u — вектор-функция, то запись ∇u здесь и далее означает её матрицу Якоби). Тот факт, что определённый таким образом функционал является нормой, а не преднормой, следует из неравенства Фридрихса

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant K \| \nabla u \|_{(L_2(\Omega))^n} \quad (u \in H^1_0(\Omega)) \quad (2.2)$$

(здесь K — постоянная, не зависящая от u). Отметим, что при $n = 2,3$ имеет место компактное вложение $V^1 \Subset (L_4(\Omega))^n$.

Обозначим $V^2 = V^1 \cap (H^2(\Omega))^n$.

Известно разложение Вейля (см. [11]) пространства $(L_2(\Omega))^n$ в ортогональную сумму

$$(L_2(\Omega))^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega).$$

Пусть $\pi : (L_2(\Omega))^n \to V^0$ — ортопроектор. Рассмотрим оператор

$$A = -\pi\Delta. \quad (2.3)$$

Известно, что оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве V^0, является самосопряжённым положительным оператором с вполне непрерывным обратным; отсюда следует, что он имеет счётное множество собственных значений

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots;$$

соответствующие собственные функции обозначим e_k (они гладкие).

Рассмотрим множество

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{k=1}^{N} v_k e_k : N \in \mathbb{N},\ v_k \in \mathbb{R} \right\}$$

(здесь N зависит от v) и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha \left| v_k \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Эти нормы порождают скалярные произведения, которые будем обозначать $(\cdot,\cdot)_\alpha$; пространство V^α со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$ является гильбертовым.

Можно показать, что для пространств V^0, V^1, V^2 общее определение совпадает с данным выше.

При $\alpha \geqslant 0$ пространство V^α состоит из функций, принадлежащих V^0; при $\alpha < 0$ пространство V^α шире, чем V^0. Если $\alpha \geqslant 0$, то пространство $V^{-\alpha}$ естественно изометрично пространству, сопряженному к V^α (см. [10]; при $\alpha = 0$ получается теорема Рисса для V^0), поэтому эти пространства можно отождествить, что мы и будем делать. При $\alpha > \beta$ имеет место плотное вложение $V^\alpha \subset V^\beta$.

При $\alpha \geqslant 0$ имеет место непрерывное вложение $V^\alpha \subset (H^\alpha(\Omega))^n$, причем норма $\| \cdot \|_\alpha$ эквивалентна норме, индуцированной на V^α из $(H^\alpha(\Omega))^n$ (см. [9, гл. 3, § 4]). В частности, отсюда следует, что при $\alpha > \beta \geqslant 0$ имеет место компактное вложение $V^\alpha \Subset V^\beta$.

Нас будут особо интересовать пространства V^0, V^1, V^3 и сопряжённые к ним. Можно показать (см. [9, гл. 3, § 4]), что при $\alpha = 1$ норма (2.4) имеет выражение (2.1), а при $\alpha = 3$ норма определяется формулой

$$\| v \|_3 = \left(\int_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx \right)^{1/2}$$

(для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ порядка n полагаем $A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$).

Можно построить «максимальное замыкание» оператора A (см. [10]), которое будем обозначать той же буквой, и которое осуществляет топологический изоморфизм пространств V^α и $V^{\alpha-2}$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ действует по правилу

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx \ (u, v \in V^1).$$

Будем пользоваться стандартными обозначениями для пространств суммируемых функций на отрезке числовой оси со значениями в банаховом пространстве. Фактически самым широким из используемых пространств будет V^{-3}, и все производные по времени будут пониматься в смысле распределений $\mathfrak{D}(0,T;V^{-3})$.

Для определения слабого решения на отрезке введём следующие пространства:

$$W_1[0,T] = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})\}$$

с нормой

$$\| v \|_{W_1[0,T]} = \| v \|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \| v' \|_{L_\infty(0,T;V^{-1})};$$

и

$$W_2[0,T] = \{v : v \in C([0,T];V^3), \quad v' \in L_\infty(0,T;V^3)\}$$

с нормой

$$\| v \|_{W_2[0,T]} = \| v \|_{C([0,T];V^3)} + \| v' \|_{L_\infty(0,T;V^3)},$$

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$, и пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+,V^3)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2(0,T)$.

Большое значение имеет следующая теорема о компактности. Пусть $X_0 \Subset F \subset X_1$ — банаховы пространства, причём X_0 рефлексивно; пусть $T > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $\left(i = 1,2\right)$. Рассмотрим пространство

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) = \{u : u \in L_{p_0}(0,T;X_0), \quad u' \in L_{p_1}(0,T;X_1)\}$$

(производная понимается в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в X_1); норма в $W(0,T;p_1,p_2;X_0,X_1)$ задаётся формулой

$$\| u \|_W = \| u \|_{L_{p_0}(0,T;X_0)} + \| u' \|_{L_{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Теорема 2.1. *Если $p_0 < \infty$, то имеет место компактное вложение*

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) \Subset L_{p_0}(0,T;F);$$

если $p_0 = \infty$, $p_2 > 1$, то имеет место компактное вложение

$$W(0,T;p_0,p_1;X_0,X_1) \Subset C([0,T];F).$$

Доказательство можно найти, например, в [11].

Напомним также следующее определение. Пусть J — конечный или бесконечный интервал вещественной оси, $\bar{J}$ — его замыкание.

Определение 2.1. *Функция $u : \bar{J} \to E$ называется слабо непрерывной, если из $t_n \to t$, $t_n \in \bar{J}$ следует $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ слабо в E.*

Имеет место следующее утверждение о связи ограниченности и непрерывности функций.

Теорема 2.2. *Пусть E и E_0 — два банаховых пространства, таких что $E \subset E_0$, причем вложение непрерывно. Если функция u принадлежит $L_\infty(0,T;E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то и слабо непрерывна как функция со значениями в E.*

Доказательство теоремы можно найти в [11].

Ограничение на $\mathbb{R}_+$ функции g, определенной на $\mathbb{R}$, будем обозначать $\Pi_+ g$, а ограничение на отрезок $[0,T]$ функции g, определенной на $\mathbb{R}_+$, будем обозначать $\Pi_T g$.

Введём одно технически удобное обозначение. Пусть величины A и B зависят от $x,y,z,\ldots$. Будем писать

$$A \prec B \ (x,y,z,\ldots),$$

если существует постоянная c, не зависящая от $x,y,z,\ldots$, такая что неравенство

$$A \leqslant cB$$

выполняется при всех $x,y,z,\ldots$. Если не возникает недоразумения, то указание в скобках на параметры $x,y,z,\ldots$ будем опускать.

Отметим, что введённое отношение транзитивно и согласовано со сложением величин: если $A \prec B$ и $C \prec D$, то ясно, что $A + C \prec B + D$. Кроме того, из неравенства

$$1 + A \leqslant 2(1 + A^2)$$

следует, что

$$1 + A \prec 1 + A^2.$$

3. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АППРОКСИМАЦИЯ

Введём операторы, требующиеся для определения слабого решения:

$$B_1 : \left(L_4\left(\Omega\right)\right)^n \to V^{-1}, \ \left\langle B_1\left(u\right), \varphi \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \left(u \in \left(L_4\left(\Omega\right)\right)^n, \ \varphi \in \mathrm{V}^1\right);$$

$$B_2 : V^1 \to V^{-3}, \ \left\langle B_2\left(u\right), \varphi \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \ \left(u \in V^1, \ \varphi \in \mathrm{V}^3\right);$$

$$B_3 : V^1 \to V^{-3}, \ \left\langle B_2\left(u\right), \varphi \right\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \ \left(u \in V^1, \ \varphi \in \mathrm{V}^3\right).$$

Операторы определены корректно, так как в любом случае $u_i \in L_4(\Omega)$; $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}, \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, и в силу вложения $V^3 \subset (H^3(\Omega))^n$ также $\dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \in H^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ при $\varphi \in V^3$. Пусть также $J : V^{-1} \to V^{-3}$ — оператор вложения.

Будем рассматривать операторный аналог системы (1.5)—(1.7):

$$(J+\varkappa A)v' + \nu A v - B_1(v) - \\ -\frac{\varkappa}{2}B_2(v) - \frac{\varkappa}{2}B_3(v) = f. \qquad (3.1)$$

Плотность внешних сил f будем считать принадлежащей пространству V^{-1}.

Уравнение (3.1) получается из системы стандартным образом: в предположении, что имеется классическое решение (и правая часть f достаточно гладка), уравнение (1.5) умножается на пробную функцию $\varphi \in V^3$, после чего в некоторых членах производится интегрирование по частям; вследствие соленоидальности функции φ член ∇p исключается из уравнения. Подробнее см. в [7].

Определение 3.1. *Слабым решением* системы (1.5)—(1.7) или решением уравнения (3.1) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0,T]$, такую что уравнение (3.1) выполнено в $L_\infty([0,T];V^{-1})$. *Слабым решением* системы (1.5)—(1.7) или решением уравнения (3.1) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T>0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением уравнения (3.1) на этом отрезке.

Замечание 3.1. Из свойств операторов (см. п. 3 ниже) следует, что правая часть (3.1) принадлежит $L_\infty([0,T];V^{-1})$ для любой функции $v \in W_1[0,T]$.

Применив теорему 2.2 к пространствам V^1 и V^{-1}, приходим к выводу о вложении

$$W_1[0,T] \subset C_w([0,T];V^1).$$

Следовательно, для уравнения (3.1) имеет смысл начальное условие

$$v(0) = a \qquad (3.2)$$

с функцией $a \in V^1$.

Введем обозначение для экспоненциальной функции: для $\beta \in \mathbb{R}_+$ обозначим

$$e_\beta(t) = e^{\beta t}.$$

Рассмотрим аппроксимационную систему. Определим оператор

$$N: V^3 \to V^{-3},\ \langle Nu, \varphi\rangle = \\ = \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta\varphi)dx\ (u \in V^3,\ \varphi \in V^3)$$

и рассмотрим семейство уравнений, зависящее от параметра $\lambda \in [0,1]$

$$(J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N + \varkappa A)v' + \\ +\lambda\left(\nu A v - B_1(v) - \frac{\varkappa}{2}B_2(v) - \frac{\varkappa}{2}B_3(v)\right) = \lambda f, \qquad (3.3)$$

где $\varepsilon \in (0,1]$. Аппроксимацией уравнения (3.1) служит уравнение (3.3), соответствующее значению $\lambda = 1$:

$$(J+\varepsilon e_{-\alpha}N + \varkappa A)v' + \nu A v - \\ -B_1(v) - \frac{\varkappa}{2}B_2(v) - \frac{\varkappa}{2}B_3(v) = f. \qquad (3.4)$$

Семейство (3.3) рассматривается для того чтобы доказать разрешимость уравнения (3.4).

Фиксируем λ и ε.

Определение 3.2. *Решением* уравнения (3.3) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_2[0,T]$, такую что уравнение (3.3) выполнено в $L_\infty([0,T];V^{-3})$. *Решением* уравнения (3.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T>0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением уравнения (3.4) на этом отрезке.

Замечание 3.2. Из свойств операторов (см. п. 3 ниже) следует, что правая часть (3.3) принадлежит $L_\infty([0,T];V^{-3})$ для любой функции $v \in W_2[0,T]$.

Очевидно, для уравнений (3.3) имеет смысл начальное условие (3.2) с $a \in V^3$.

4. ТРАЕКТОРНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Пусть E, E_0 — банаховы пространства, $E \subset E_0$ (вложение непрерывно); также считаем, что пространство E рефлексивно.

Банахово пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ состоит из функций, существенно ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в пространстве E, и норма в этом пространстве определяется обычным образом:

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;E)} = vrai\max_{t\ge 0}\|u(t)\|_E.$$

Линейное пространство $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ состоит из непрерывных на полуоси $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в пространстве E_0. Сходимость в этом пространстве определяется как равномерная сходимость на каждом отрезке $[0,T]$, $T>0$. Топология, описанная с помощью такой сходимости, может быть задана метрикой

$$\|u-v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{\|u-v\|_{C([0,k];E_0)}}{1+\|u-v\|_{C([0,k];E_0)}}$$

Эта метрика инвариантна относительно сдвигов, но стоит отметить, что функционал $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}$ не является однородным.

Отметим следующее простое, но полезное утверждение.

Теорема 4.1. *Для того чтобы множество* $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *было относительно компактно в* $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $T > 0$ *множество* $\Pi_T P$ *было относительно компактно в* $C([0,T]; E_0)$.

В теории траекторных аттракторов главным образом нас будут интересовать функции класса $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$.

Замечание 4.1. Из теоремы 2.2 несложно вывести, что функции класса $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ принадлежат пространству $C_w(\mathbb{R}_+; E)$ функций, слабо непрерывных на $\mathbb{R}_+$ со значениями в E. В частности, отсюда следует, что для любой функции $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ значения $u(t)$ принадлежат пространству E при всех $t \in \mathbb{R}_+$; можно показать, что при этом

$$\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E . \tag{4.1}$$

Аналогичным образом определяются пространства $L_\infty(\mathbb{R}; E)$, $C(\mathbb{R}; E_0)$, отличающиеся от рассмотренных тем, что образующие их функции определены на всей числовой оси; в определении метрики пространства $C(\mathbb{R}; E_0)$ используются величины $\|u - v\|_{C([-k,k]; E_0)}$.

Рассмотрим *операторы сдвигов* $\mathbf{T}(h)$, каждый из которых функции g ставит в соответсвие функцию $\mathbf{T}(h)g$, такую что

$$\mathbf{T}(h)g(t) = g(t+h).$$

При $h \geqslant 0$ операторы $\mathbf{T}(h)$ являются линейными ограниченными в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ и линейными непрерывными в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$, а при произвольных $h \in \mathbb{R}$ — линейными ограниченными или непрерывными соответственно в $L_\infty(\mathbb{R}; E)$ и $C(\mathbb{R}; E_0)$. Легко видеть, что имеет место тождество $\mathbf{T}(h_1)\mathbf{T}(h_2) = \mathbf{T}(h_1 + h_2)$, а также что $\mathbf{T}(0)$ — тождественный оператор; это позволяет говорить, что семейство $\{\mathbf{T}(h) : h \geqslant 0\}$ является полугруппой, которая называется *полугруппой трансляций.*

Дадим основные определения.

Рассмотрим некоторое непустое множество

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E).$$

Будем называть это множество *пространством траекторий*, а его элементы — *траекториями.*

В приложениях в качестве пространства траекторий выступает, как правило, определенное множество решений некоторого уравнения, и при этом не играет роли, в каком именно смысле понимаются решения. Отметим также, что для одного и того же уравнения можно выбирать различные пространства траекторий. Единственное требование, накладываемое на пространство траекторий, состоит в том, что оно должно быть непустым (и состоять из функций класса $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$). Конечно, содержательность требует, чтобы траекторий существовало «достаточно много».

Определение 4.1. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется *притягивающим* (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|\mathbf{T}(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \to 0 \ (h \to \infty).$$

Определение 4.2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется *поглощающим* (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geqslant 0$, такое что при всех $t \geqslant h$ имеет место включение

$$\mathbf{T}(t)B \subset P.$$

Очевидно, любое поглощающее множество является притягивающим.

Определение 4.3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется *траекторным полуаттрактором* (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) имеет место включение $\mathbf{T}(t)P \subset P$ для всех $t \geqslant 0$;

(iii) множество P является притягивающим в смысле определения 4.1.

Определение 4.4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется *траекторным аттрактором* (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет условиям (i), (iii) определения 4.3, а также условию

(ii′) имеет место равенство $\mathbf{T}(t)P = P$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 4.5. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется *глобальным аттрактором* (в E_0) пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

(ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ выполняется условие притягивания

$$\sup_{u\in B}\inf_{y\in\mathcal{A}} \| u(t)-y \|_{E_0} \to 0 \ (t\to\infty);$$

(iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим, удовлетворяющим условиям (i) и (ii) (то есть $\mathcal{A}$ содержится в каждом множестве, удовлетворяющим этим условиям).

Замечание 4.2. Очевидно, что если существует минимальный траекторный аттрактор или глобальный аттрактор, то он единственный.

Глобальный аттрактор пространства траекторий является обобщением классического понятия аттрактора полугруппы.

Определение 4.6. *Ядром* множества $P \subset C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ называется множество

$$\mathcal{K}(P)=\{u\in L_\infty(\mathbb{R};E):\forall t\in\mathbb{R}\ \Pi_+T(t)u\in P\}.$$

Имеют место следующие теоремы о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов (см. [8]).

Теорема 4.2. *Пусть существует траекторный полуаттрактор P пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, имеют место соотношения*

$$\Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)\subset\mathcal{U}=\Pi_+\mathcal{K}(\mathcal{U})\subset\Pi_+\mathcal{K}(P)\subset P,$$

и ядро $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ относительно компактно в $C(\mathbb{R};E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R};E)$.

Теорема 4.3. *Пусть существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{U}$, и справедливы соотношения*

$$\mathcal{A}=\mathcal{U}(t),\ t\geqslant 0; \tag{4.2}$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)(t)\subset\mathcal{A}=\mathcal{K}(\mathcal{U})(t),\ t\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

5. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

В настоящем параграфе будут рассмотрены некоторые свойства операторов, введенных в § 2, 3.

Лемма 5.1. *Оператор A обладает следующими свойствами:*

(i) оператор $A: V^1\to V^{-1}$ является линейной изометрией;

(ii) оператор $A: L_p(0,T;V^1)\to L_p(0,T;V^{-1})$ $(T>0, 1\leqslant p\leqslant\infty)$ ограничен;

(iii) оператор $A: W_2[0,T]\to L_\infty(0,T;V^{-3})$ компактен.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения пространств V^α. Если $u\in L_p(0,T;V^1)$, то интегрируя равенство

$$\| Au(t)\|_{-1}=\| Au(t)\|_1$$

возведённое в степень p (если $p<\infty$) или переходя в этом равенстве к vrai max (если $p=\infty$), убеждаемся, что A действует в пространствах $L_p(0,T;V^1)\to L_p(0,T;V^{-1})$ и ограничен, то есть получаем утверждение (ii).

Для доказательства утверждения (iii) воспользуемся теоремой 2.1 для пространств $V^3 \Subset V^1\subset V^{-3}$. Рассмотрим вспомогательное пространство

$$Y:=\{v: v\in L_\infty(0,T;V^3), v'\in L_\infty(0,T;V^0)\}.$$

По теореме 2.1 оно компактно вложено в $C([0,T];V^1)$. Утверждение (iii) следует из того, что действие оператора A в рассматриваемых пространствах можно записать в виде композиции

$$W_2[0,T]\subset Y\Subset C([0,T];V^1)\subset L_\infty(0,T;V^1)\xrightarrow{A}$$
$$\xrightarrow{A} L_\infty(0,T;V^{-1})\subset L_\infty(0,T;V^{-3}),$$

и согласно (ii) оператор A в указанных пространствах действует непрерывно. ■

Лемма 5.2. *Оператор $J+\varkappa A$ обладает следующими свойствами:*

(i) оператор $J+\varkappa A: V^{-1}\to V^{-3}$ ограничен и биективен;

(ii) оператор $J+\varkappa A: L_\infty(0,T;V^{-1})\to L_\infty(0,T;V^{-3})$ $(T>0)$ ограничен.

Доказательство. Для доказательства (i) воспользуемся следующей теоремой из [10]:

Теорема 5.1. *Если самосопряженный положительно определённый оператор A имеет областью определения пространство H_l гильбертовой шкалы H_α, то его естественное расширение гомеоморфно отображает пространство $H_{l-\alpha}$ в пространства $H_{-\alpha}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant l$.* *

Рассмотрим оператор $I+\varkappa A$ с областью определения V^2, как и у оператора A. Этот оператор самосопряжен, потому что такими являются тождественный и A; собственные значения этого оператора суть $\{1+\varkappa\lambda_k\}$, где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора A, поэтому оператор $I+\varkappa A$ положительно опре-

* Из доказательства этого утверждения в [10] явствует, что в действительности речь идет об отображении *на*.

делен, и, таким образом, удовлетворяет условиям приведенной теоремы. Следовательно, оператор $I+\varkappa A$ осуществляет топологический изоморфизм пространств V^2 и V^0.

Для естественного расширения оператора $I+\varkappa A$ сохраним то же обозначение. Оператор $A^{3/2}$ осуществляет топологический изоморфизм пространств V^0 и V^{-3}, а также V^2 и V^{-1}, поэтому естественное расширение оператора $I+\varkappa A$ осуществляет топологический изоморфизм пространств V^{-1}, V^{-3}, так как это отображение может быть представлено в виде композиции

$$V^{-1} \overset{A^{-3/2}}{\to} V^2 \overset{I+\varkappa A}{\to} V^0 \overset{A^{3/2}}{\to} V^{-3}.$$

Для завершения доказательства утверждения (i) остаётся заметить, что в пространствах $V^{-1} \to V^{-3}$ естественное ограничение оператора $I+\varkappa A$ действует в соответствии с правилом

$$\langle (I+\varkappa A)u, \varphi\rangle = \int_\Omega u\varphi dx + \varkappa \int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx$$
$$(u \in V^1, \varphi \in V^3),$$

то есть совпадает с оператором $J+\varkappa A$.

Утверждение (ii) доказывается так же, как и его аналог в лемме 5.1. ■

Лемма 5.3. *Линейный оператор $J+\varepsilon N+\varkappa A : V^3 \to V^{-3}$ ограничен и биективен, и имеет место оценка*

$$\varepsilon \parallel u \parallel_3 \leqslant \parallel (J+\varepsilon N+\varkappa A)u \parallel_{-3} \leqslant \leqslant ((1+\varkappa C)+\varepsilon) \parallel u \parallel_3 \tag{5.1}$$

с постоянной C, зависящей только от области Ω.

Доказательство. В силу непрерывности вложений $V^3 \subset (L_2(\Omega))^n$ и $V^3 \subset V^1$ найдётся постоянная C, такая что имеют место неравенства

$$\parallel u \parallel^2_{(L_2(\Omega))^n} \leqslant C \parallel u \parallel^2_3, \quad \parallel \varphi \parallel^2_1 \leqslant C \parallel \varphi \parallel^2_3$$

Покажем ограниченность оператора $J+\varepsilon N+\varkappa A$. Для $u \in V^3$, $\varphi \in V^3$ имеем

$$\begin{gathered} |\langle (J+\varepsilon N+\varkappa A)u, \varphi\rangle| = \\ = \left| \int_\Omega u\varphi dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta\varphi) dx + \right. \\ \left. + \varkappa \int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx \right| \leqslant \parallel u \parallel_{(L_2(\Omega))^n} \parallel \varphi \parallel_{(L_2(\Omega))^n} + \\ + \varepsilon \parallel u \parallel_3 \parallel \varphi \parallel_3 + \varkappa \parallel u \parallel_1 \parallel \varphi \parallel_1 \leqslant \\ \leqslant C \parallel u \parallel_3 \parallel \varphi \parallel_3 + \varepsilon \parallel u \parallel_3 \parallel \varphi \parallel_3 + \\ + \varkappa C \parallel u \parallel_1 \parallel \varphi \parallel_1 = \\ = ((1+\varkappa)C+\varepsilon) \parallel u \parallel_3 \parallel \varphi \parallel_3 . \end{gathered} \tag{5.2}$$

Отсюда следует оценка

$$\parallel (J+\varepsilon N+\varkappa A)u \parallel_{-3} \leqslant ((1+\varkappa)C+\varepsilon) \parallel u \parallel_3,$$

совпадающая со вторым из доказываемых неравенств (5.1) и означающая ограниченность оператора.

Для доказательства биективности оператора $J+\varepsilon N+\varkappa A$ покажем, что уравнение

$$(J+\varepsilon N+\varkappa A)u = w \tag{5.3}$$

имеет единственное решение $u \in V^3$ при любой правой части $w \in V^3$. Воспользуемся следующей теоремой ([11, гл. 2, § 2]):

Теорема 5.2. *Пусть W — сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\parallel \cdot \parallel_W$), и пусть $a(u,v)$ — непрерывная билинейная форма на $W \times W$, которая коэрцитивна, т. е. существует $\alpha > 0$, такое что*

$$a(u,v) \geqslant \alpha \parallel u \parallel^2_W \quad \forall u \in W.$$

Тогда для каждого l из W' — пространства, сопряжённого к W, — существует один и только один элемент $u \in W$, такой что

$$a(u,v) = \langle l, v\rangle \ \forall v \in W.$$

Рассмотрим гильбертово пространство V^3 и билинейную форму

$$a : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R},$$
$$a(u,v) = \langle (J+\varepsilon N+\varkappa A)u, v\rangle.$$

Из теоремы Рисса следует, что для существования единственного решения уравнения (5.3) необходимо и достаточно существования для данного $l \in V^{-3}$ единственного $u \in V^3$, такого что

$$a(u,v) = \langle l, v\rangle \ \forall v \in V^3.$$

Оценка (5.2) даёт ограниченность и, следовательно, непрерывность формы a, поэтому согласно приведённой теореме достаточно установить коэрцитивность формы a. Действительно, для произвольного $u \in V^3$ имеем:

$$\begin{gathered} a(u,u) = \langle (J+\varepsilon N+\varkappa A)u, u\rangle = \\ = \int_\Omega u^2 dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta u) dx + \\ + \varkappa \int_\Omega \nabla u : \nabla u dx = \parallel u \parallel^2_{(L_2(\Omega))^n} + \\ + \varepsilon \parallel u \parallel^2_3 + \varkappa \parallel u \parallel^2_1 \geqslant \varepsilon \parallel u \parallel^2_3 . \end{gathered}$$

Коэрцитивность формы a, а значит, и биективность оператора $J+\varepsilon N+\varkappa A$ доказаны. Кроме того, из последней оценки получаем

$$\varepsilon \parallel u \parallel^2_3 \leqslant \langle (J+\varepsilon N+\varkappa A)u, u\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \parallel (J+\varepsilon N+\varkappa A)u \parallel_{-3} \parallel u \parallel_3,$$

откуда следует первое из неравенств (5.1). ■

Лемма 5.4. *Линейный оператор* $J+\varepsilon e_{-\beta}N+\varkappa A : L_\infty(0,T;V^3)\to L_\infty(0,T;V^{-3})$ $\beta\in(0,1]$ *ограничен и биективен.*

Доказательство. Убедимся, что оператор $J+\varepsilon e_{-\beta}N+\varkappa A$ действует в пространствах $L_\infty(0,T;V^3)\to L_\infty(0,T;V^{-3})$. Пусть $u\in L_\infty(0,T;V^3)$, тогда, используя неравенство (5.1), при почти всех $t\in(0,T)$ имеем

$$\| (J+\varepsilon e^{-\beta t}N+\varkappa A)u(t)\|_{-3}\leqslant$$
$$\leqslant (C_1+\varepsilon e^{-\beta t}+\varkappa C_2)\,\|u(t)\|_3\leqslant$$
$$\leqslant (C_1+\varepsilon+\varkappa C_1)\,\|u\|_{L_\infty(0,T;V^3)},$$

то есть функция $(J+\varepsilon e_{-\beta}N+\varkappa A)u$ действительно принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^{-3})$. Отсюда же получаем оценку

$$\| (J+\varepsilon e_{-\beta}N+\varkappa A)u\|_{L_\infty(0,T;V^{-3})}\leqslant$$
$$\leqslant (C_1+\varepsilon+\varkappa C_1)\,\|u\|_{L_\infty(0,T;V^3)},$$

означающую ограниченность оператора. ■

Лемма 5.5. *Отображение пространств* $[0,1]\times C([0,T];V^{-3})\to C([0,T];V^3)$, *действующее по правилу*

$$(\lambda,u)\mapsto (J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N+\varkappa A)^{-1}u \qquad (5.4)$$

непрерывно.

Доказательство. Отметим, что корректность определения отображения (5.4) гарантируется леммой 5.4.

I шаг. Покажем, что оператор $J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N+\varkappa A$ непрерывно зависит от $\lambda\in[0,1]$ по операторной норме пространства $\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^3),L_\infty(0,T;V^{-3}))$. Рассмотрим последовательность $\{\lambda_m\}\subset[0,1]$, $\lambda_m\to\lambda_0$. Для произвольной функции $g\in L_\infty(0,T;V^3)$ имеем:

$$\| ((J+\varepsilon e_{-\lambda_n\alpha}N+\varkappa A)-$$
$$-(J+\varepsilon e_{-\lambda_0\alpha}N+\varkappa A))g\|_{L_\infty(0,T;V^{-3})}=$$
$$=\varepsilon\operatorname{vrai}\max_{t\in[0,T]}\left\|(e^{-\lambda_n\alpha t}-e^{-\lambda_0\alpha t})Ng(t)\right\|_{V^{-3}}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\max_{t\in[0,T]}\left|e^{-\lambda_n\alpha t}-e^{-\lambda_0\alpha t}\right|\operatorname{vrai}\max_{t\in[0,T]}\|g(t)\|_{V^3}=$$
$$=\varepsilon\max_{t\in[0,T]}\left|e^{-\lambda_n\alpha t}-e^{-\lambda_0\alpha t}\right|\,\|g\|_{L_\infty(0,T;V^3)}$$

В силу произвольности g отсюда получаем

$$\| (J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)-$$
$$-(J+\varepsilon e_{-\lambda_0\alpha}N+\varkappa A)\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^3),L_\infty(0,T;V^{-3}))}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\max_{t\in[0,T]}\left|e^{-\lambda_m\alpha t}-e^{-\lambda_0\alpha t}\right|$$

Функция $(\lambda,t)\mapsto e^{-\lambda\alpha t}$ непрерывна на $[0,1]\times[0,T]$, поэтому

$$e^{-\lambda_m\alpha t}\rightrightarrows e^{-\lambda_0\alpha t}\ (\lambda_m\to\lambda_0)$$

равномерно по $t\in[0,T]$. Следовательно,

$$\| (J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)-$$
$$-(J+\varepsilon e_{-\lambda_0\alpha}N+\varkappa A)\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^3),L_\infty(0,T;V^{-3}))}\to 0$$
$$(m\to\infty),$$

что и требовалось.

II шаг. Покажем, что оператор $(J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)^{-1}$ непрерывно зависит от $\lambda\in[0,1]$ по операторной норме пространства

$$\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^{-3}),L_\infty(0,T;V^3)).$$

Действительно, это следует из того, что отображение

$$\lambda\mapsto(J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)^{-1}$$

является суперпозицией отображения

$$[0,1]\to\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^3),L_\infty(0,T;V^{-3})),$$
$$\lambda\mapsto J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A,$$

непрерывность которого установлена выше, и непрерывного отображения обращения оператора, действующего в пространствах

$$\operatorname{Isom}(L_\infty(0,T;V^3),L_\infty(0,T;V^{-3}))\to$$
$$\to\operatorname{Isom}(L_\infty(0,T;V^{-3}),L_\infty(0,T;V^3))$$

(по поводу непрерывности оператора обращения см. [12]).

III шаг. Докажем непрерывность отображения, фигурирующего в формулировке утверждения. Рассмотрим последовательности $\{\lambda_m\}\subset[0,1]$, $\lambda_m\to\lambda_0$, и $\{u_m\}\subset L_\infty(0,T;V^{-3})$, $u_m\to u_0$. Обозначим $\mathcal{T}_m=(J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)^{-1}$, тогда требуется доказать, что

$$\mathcal{T}_m u_m\to\mathcal{T}_0u_0.$$

Действительно, по ранее доказанному имеем

$$\|\mathcal{T}_m-\mathcal{T}_0\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^{-3}),L_\infty(0,T;V^3))}\to 0,$$

поэтому

$$\|\mathcal{T}_mu_m-\mathcal{T}_0u_0\|_{L_\infty(0,T;V^3)}\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathcal{T}_mu_m-\mathcal{T}_mu_0\|_{L_\infty(0,T;V^3)}+$$
$$+\|\mathcal{T}_mu_0-\mathcal{T}_0u_0\|_{L_\infty(0,T;V^3)}\leqslant$$
$$\leqslant\sup_m\|\mathcal{T}_m\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^{-3}),L_\infty(0,T;V^3))}\|u_m-$$
$$-u_0\|_{L_\infty(0,T;V^{-3})}+\|\mathcal{T}_m-$$
$$-\mathcal{T}_0\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,T;V^{-3}),L_\infty(0,T;V^3))}\|u_0\|_{L_\infty(0,T;V^{-3})}\to 0,$$

что и требовалось. ■

Лемма 5.6. *Оператор B_1 обладает следующими свойствами:*

(i) оператор $B_1 : (L_4(\Omega))^n \to V^{-1}$ непрерывен, и имеет место оценка

$$\| B_1(u) \|_{-1} \prec \| u \|^2_{(L_4(\Omega))^n}; \qquad (5.5)$$

(ii) отображение $B_1 : L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to L_\infty(0,T;V^{-1})$ непрерывно;

(iii) отображение $B_1 : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ компактно.

Доказательство. (i) Рассмотрим билинейный оператор

$$\mathcal{B}_1 : (L_4(\Omega))^n \times (L_4(\Omega))^n \to V^{-1},$$

$$\langle \mathcal{B}_1(u,v), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx$$

$$(u, v \in (L_4(\Omega))^n,\ \varphi \in V^1)$$

(оператор определён корректно, так как в подынтегральном выражении функции u_i и v_j принадлежат $L_4(\Omega)$, а функция $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ принадлежит $L_2(\Omega)$). Так как

$$B_1(u) = \mathcal{B}_1(u,u),$$

то для доказательства непрерывности отображения B_1 достаточно доказать непрерывность оператора $\mathcal{B}_1$, которая эквивалентна его ограниченности.

Для $u, v \in (L_4(\Omega))^n$, $\varphi \in V^1$ имеем оценку

$$|\langle \mathcal{B}_1(u,v), \varphi \rangle| = \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \| u_i \|_{L_4(\Omega)} \| v_j \|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \prec$$

$$\prec \| u \|_{(L_4(\Omega))^n} \| v \|_{(L_4(\Omega))^n} \| \varphi \|_1 \quad (u,v,\varphi),$$

откуда следует неравенство

$$\| \mathcal{B}_1(u,v) \|_{-1} \prec \| u \|_{(L_4(\Omega))^n} \| v \|_{(L_4(\Omega))^n} \quad (u,v), \qquad (5.6)$$

означающее ограниченность оператора $\mathcal{B}_1$. Кроме того, из этого неравенства следует неравенство (5.5).

Для доказательства (ii) достаточно установить ограниченность билинейного оператора

$$\mathcal{B}_1 : L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \times L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to$$

$$\to L_\infty(0,T;V^{-1}).$$

Пусть $u, v \in L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n)$. Из неравенства (5.6) следует, что при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\| \mathcal{B}_1(u(t),v(t)) \|_{-1} \prec \| u(t) \|_{(L_4(\Omega))^n} \| v(t) \|_{(L_4(\Omega))^n}$$

$$(u(t), v(t)),$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{B}_1$ действует в пространствах $L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \times L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \to L_\infty(0,T;V^{-1})$ и ограничен.

Для доказательства утверждения (iii) воспользуемся теоремой 2.1 для пространств $V^1 \Subset V^{3/4} \subset V^{-3}$. Рассмотрим вспомогательное пространство

$$Y := \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1), v' \in L_\infty(0,T;V^0)\}.$$

По теореме 2.1 оно компактно вложено в $C([0,T];V^{3/4})$. Отметим, что имеют место непрерывные вложения $V^{3/4} \subset (H^{3/4}(\Omega))^n \subset (L_4(\Omega))^n$ (последнее вложение непрерывно при $n = 2,3$ по теореме Соболева). Утверждение (iii) следует из того, что действие оператора B_1 в рассматриваемых пространствах можно записать в виде композиции

$$W_2[0,T] \subset Y \Subset C([0,T];V^{3/4}) \subset$$

$$\subset L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n) \overset{B_1}{\to} L_\infty(0,T;V^{-1}) \subset$$

$$\subset L_\infty(0,T;V^{-3}),$$

и согласно (ii) оператор B_1 в указанных пространствах действует непрерывно. ■

Лемма 5.7. *Отображения B_2, B_3 обладают следующими свойствами:*

(i) отображения $B_i : V^1 \to V^{-3}$ $(i = 1,2)$ непрерывны, и имеет место оценка

$$\| B_i(u) \|_{-3} \prec \| u \|_1^2 \quad (u \in V^1); \qquad (5.7)$$

(ii) отображения $B_i : L_\infty(0,T;V^1) \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ $(i = 1,2)$ непрерывны;

(iii) отображения $B_i : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3})$ $(i = 1,2)$ непрерывны и компактны.

Доказательство. Установим справедливость утверждений для оператора B_2; случай оператора B_3 рассматривается вполне аналогично.

(i) Как и при доказательстве предыдущей леммы рассмотрим билинейный оператор

$$\mathcal{B}_2 : V^1 \times V^1 \to V^{-3},$$

$$\langle \mathcal{B}_2(u,v), \varphi \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n \int_\Omega u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx$$

$$(u, v \in V^1,\ \varphi \in V^3)$$

Так как

$$B_2(u) = \mathcal{B}_2(u,u),$$

то для доказательства непрерывности отображения B_2 достаточно доказать непрерывность оператора $\mathcal{B}_2$, которая эквивалентна его ограниченности.

Для $u, v \in V^1$, $\varphi \in V^3$ имеем оценку

$$|\langle \mathcal{B}_2(u,v), \varphi\rangle| = \left| \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} \| u_k \|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_2(\Omega)} \prec$$

$$\prec \| u \|_{(L_4(\Omega))^n} \| v \|_1 \| \varphi \|_3 \prec \| u \|_1 \| v \|_1 \| \varphi \|_3$$

$$(u, v, \varphi),$$

откуда следует неравенство

$$\| \mathcal{B}_2(u,v) \|_{-3} \prec \| u \|_1 \| v \|_1 \quad (u,v), \tag{5.8}$$

означающее ограниченность оператора $\mathcal{B}_2$. Кроме того, из этого неравенства следует неравенство (5.5).

Для доказательства (ii) достаточно установить ограниченность билинейного оператора

$$\mathcal{B}_2 : L_\infty(0,T;V^1) \times L_\infty(0,T;V^1) \to$$
$$\to L_\infty(0,T;V^{-3}).$$

Пусть $u, v \in L_\infty(0,T;V^1)$. Из неравенства (5.8) следует, что при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\| \mathcal{B}_2(u(t), v(t)) \|_{-3} \prec \| u(t) \|_{V^1} \| v(t) \|_{V^1} \quad (t,u,v),$$

откуда следует, что оператор $\mathcal{B}_2$ действует в пространствах $L_\infty(0,T;V^1) \times L_\infty(0,T;V^1) \to$ $\to L_\infty(0,T;V^{-3})$ и ограничен.

Для доказательства утверждения (iii) воспользуемся теоремой 2.1 для пространств $V^3 \Subset V^1 \subset V^0$. Рассмотрим вспомогательное пространство

$$Y := \{v : v \in L_\infty(0,T;V^3),\ v' \in L_\infty(0,T;V^0)\}.$$

По теореме 2.1 оно компактно вложено в $C([0,T];V^1)$. Утверждение (iii) следует из того, что действие оператора B_2 в рассматриваемых пространствах можно записать в виде композиции

$$W_2[0,T] \subset Y \Subset C([0,T];V^1) \subset$$
$$\subset L_\infty(0,T;V^1) \xrightarrow{B_2} L_\infty(0,T;V^{-3}),$$

и согласно (ii) оператор B_2 в указанных пространствах действует непрерывно.

6. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Основной результат настоящего параграфа содержится в следующем утверждении.

Лемма 6.1. *Пусть v — решение уравнения (3.3) на отрезке $[0,T]$ $(T>0)$ при некоторых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место неравенство*

$$\| v(t) \|_1 + \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha t/2} \| v(t) \|_3 +$$
$$+ \| v'(t) \|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t} \| v'(t) \|_3 \leqslant \tag{6.1}$$
$$\leqslant R_1 \left(1 + \left(\| v(0) \|_1^2 + \varepsilon \| v(0) \|_3^2\right)\right) e^{-\lambda \alpha t}.$$

Если v — решение уравнения (3.3) на $\mathbb{R}_+$, то неравенство (6.1) выполняется при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$. Здесь постоянная R_1 зависит от параметров задачи (кроме ε, λ) и не зависит от v.

Для доказательства этого утверждения произведём оценки отдельных слагаемых, стоящих в левой части неравенства (6.1).

Лемма 6.2. *Пусть v — решение уравнения (3.3) на отрезке $[0,T]$ $(T>0)$ при некоторых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда при всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$\| v(t) \|_1^2 + \varepsilon e^{-\alpha t} \| v(t) \|_3^2 \prec 1 +$$
$$+ \left(\| v(0) \|_1^2 + \varepsilon \| v(0) \|_3^2\right) e^{-\lambda \alpha t} \quad (\lambda, \varepsilon, v, t). \tag{6.2}$$

Доказательство. Запишем уравнение (3.3) в виде интегрального тождества

$$\int_\Omega v'(t)\varphi dx - \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$
$$+ \lambda \nu \int_\Omega \nabla v(t) : \nabla \varphi dx +$$
$$+ \varepsilon e^{-\lambda \alpha t} \int_\Omega \nabla\left(\Delta v'(t)\right) : \nabla(\Delta \varphi) dx +$$
$$+ \varkappa \int_\Omega \nabla v'(t) : \nabla \varphi dx - \tag{6.3}$$
$$- \frac{\lambda \varkappa}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$
$$- \frac{\lambda \varkappa}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \lambda \langle f, \varphi \rangle$$

При t, принадлежащих множеству полной меры, это тождество выполняется при всех $\varphi \in V^3$. Преобразуем отдельные слагаемые в левой части:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i \partial x_k} dx =$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega v_k(t)\, \varepsilon_{ij}(v(t)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx =$$

$$= -\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k\left(t\right)\frac{\partial \varepsilon_{ij}\left(v\left(t\right)\right)}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx -$$
$$-\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial v_k\left(t\right)}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}\left(v\left(t\right)\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx =$$
$$= -\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k\left(t\right)\frac{\partial \varepsilon_{ij}\left(v\left(t\right)\right)}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx.$$

Таким образом, тождество (6.3) можно записать в виде

$$\int_{\Omega} v'(t)\varphi dx - \lambda\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx +$$
$$+\lambda\nu\int_{\Omega}\nabla v(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\int_{\Omega}\nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla(\Delta\varphi)\,dx +$$
$$+\varkappa\int_{\Omega}\nabla v'(t):\nabla\varphi\,dx +$$
$$+\lambda\varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v(t))}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx = \lambda\langle f,\varphi\rangle$$

При (почти) каждом $t\in[0,T]$ подставим $\varphi = v(t)$, получаем

$$\int_{\Omega} v'(t)v(t)dx - \lambda\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}dx +$$
$$+\lambda\nu\int_{\Omega}\nabla v(t):\nabla v(t)dx +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\int_{\Omega}\nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla(\Delta v)dx + \qquad (6.4)$$
$$+\varkappa\int_{\Omega}\nabla v'(t):\nabla v(t)dx +$$
$$+\lambda\varkappa\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}dx = \lambda\langle f,v(t)\rangle$$

Преобразуем члены в левой части:

$$\int_{\Omega} v'(t)v(t)dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial(v(t))^2}{\partial t}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(v(t))^2dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_0^2;$$
$$\int_{\Omega}\nabla\left(\Delta v'(t)\right):\nabla(\Delta v(t))dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla(\Delta v(t)):\nabla(\Delta v(t)))dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\nabla(\Delta v(t)):\nabla(\Delta v(t))dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_3^2;$$
$$\int_{\Omega}\nabla v'(t):\nabla v(t)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla v(t):\nabla v)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\nabla v(t):\nabla v(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_1^2;$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)v_j(t)\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}dx =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)\frac{\partial(v_j(t)^2)}{\partial x_i}dx =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v_j(t)^2dx =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\mathrm{div}v(t)\frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i}v_j(t)^2dx = 0;$$
$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i}dx =$$
$$= 2\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k}\mathcal{E}_{ij}(v)dx =$$
$$= 2\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega} v_k(t)\frac{\partial(\mathcal{E}_{ij}(v))^2}{\partial x_k}dx =$$
$$= -2\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial v_k(t)}{\partial x_k}(\mathcal{E}_{ij}(v))^2dx =$$
$$= -2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\mathrm{div}v(t)(\mathcal{E}_{ij}(v))^2dx = 0; \qquad (6.5)$$

(здесь мы воспользовались симметричностью тензора $\mathcal{E}$). Таким образом, тождество (6.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_0^2 + \frac{\varepsilon}{2}e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_3^2 +$$
$$+\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_1^2 + \lambda\nu\parallel v(t)\parallel_1^2 = \lambda\langle f,v(t)\rangle.$$

Умножим обе части на 2:

$$\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_1^2 +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_3^2 + 2\lambda\nu\parallel v(t)\parallel_1^2 = 2\lambda\langle f,v(t)\rangle.$$

Оценим правую часть. Имеем:

$$2\langle f,v(t)\rangle \leqslant 2\parallel f\parallel_{-1}\parallel v(t)\parallel_{V^1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\nu}\parallel f\parallel_{-1}^2 + \nu\parallel v(t)\parallel_1^2,$$

и, таким образом, получаем выполняющуюся при почти всех t оценку

$$\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_1^2 +$$
$$+\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\parallel v(t)\parallel_3^2 + 2\lambda\nu\parallel v(t)\parallel_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda}{\nu}\parallel f\parallel_{-1}^2 + \lambda\nu\parallel v(t)\parallel_1^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\| v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\| v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\| v(t)\|_3^2 + \lambda\nu\| v(t)\|_1^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\| f\|_{-1}^2 . \tag{6.6}$$

Рассмотрим на V^1 вспомогательную норму $\| u\|^2 = \| u\|_0^2 + \varkappa\| u\|_1^2$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_1$: из определения и из неравенства Фридрихса (2.2) следует оценка

$$\varkappa\| u\|_1^2 \leqslant \| u\|^2 \leqslant (K^2+\varkappa)\| u\|_1^2 .$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\| v(t)\|_0^2 + \varkappa\frac{d}{dt}\| v(t)\|_1^2 = \frac{d}{dt}\| v(t)\|^2;$$

и

$$\nu\| v(t)\|_1^2 \geqslant \frac{\nu}{K+\varkappa}\| v(t)\|^2 = \alpha\| v(t)\|^2;$$

таким образом, из неравенства (6.6) мы получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\| v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\| v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha\| v(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\| f\|_{-1}^2 .$$

В первом и третьем слагаемых левой части выполним подстановку $v(t) = \overline{v}(t)\exp(-\lambda\alpha t/2)$, имеем:

$$-\lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\| \overline{v}(t)\|^2 + e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\| \overline{v}(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\frac{d}{dt}\| v(t)\|_3^2 + \lambda\alpha e^{-\lambda\alpha t}\| \overline{v}(t)\|^2 \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\| f\|_{-1}^2 .$$

Умножив обе части неравенства на $\exp(\lambda\alpha t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\| \overline{v}(t)\|^2 + \varepsilon\| v(t)\|_3^2) \leqslant \frac{\lambda}{\nu}\| f\|_{-1}^2 e^{\lambda\alpha t}. \tag{6.7}$$

Предположим, что $\lambda \neq 0$. Проинтегрировав последнее неравенство, получаем при всех t

$$\| \overline{v}(t)\|^2 + \varepsilon\| v(t)\|_3^2 \leqslant \| v(0)\|^2 + \varepsilon\| v(0)\|_3^2 + \frac{1}{\alpha\nu}\| f\|_{-1}^2\left(e^{\lambda\alpha t}-1\right),$$

(это верно как при $\lambda > 0$, так и при $\lambda = 0$) и, умножив обе части на $\exp(-\lambda\alpha t)$, имеем:

$$\| v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\| v(t)\|_3^2 \leqslant \leqslant \frac{1}{\alpha\nu}\| f\|_{-1}^2 + \left(\| v(0)\|^2 + \varepsilon\| v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t}.$$

Отсюда и следует доказываемая оценка, так как в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ имеем

$$\| v(t)\|_1^2 + \varepsilon e^{-\alpha t}\| v(t)\|_3^2 \prec \prec \| v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\| v(t)\|_3^2 \prec \frac{1}{\alpha\nu}\| f\|_{-1}^2 + \left(\| v(0)\|^2 + \varepsilon\| v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t} \prec 1 + \left(\| v(0)\|_1^2 + \varepsilon\| v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t}$$

■

Лемма 6.3. *Имеет место оценка*

$$\left\| f - \nu Au + B_1(u) + \frac{\varkappa}{2}B_2(u) + \frac{\varkappa}{2}B_3(u)\right\|_{-3} \prec \prec 1 + \| u\|_1^2 \quad (u \in V^1). \tag{6.8}$$

Доказательство. В силу вложений $V^{-3} \subset V^{-1}$, $V^1 \subset (L_4(\Omega))^n$ имеем оценки $\| w\|_{V^{-3}} \prec \| w\|_{V^{-1}}$, $\| w\|_{(L_4(\Omega))^n} \prec \| w\|_{V^1}$. Используя леммы 5.1, 5.6, 5.7 для $u \in V^1$ получаем оценки

$$\| Au\|_{-3} \prec \| Au\|_{-1} \prec \| u\|_1 \prec 1 + \| u\|_1^2;$$

$$\| B_1(u)\|_{-3} \prec \| B_1(u)\|_{-1} \prec \| u\|_{(L_4(\Omega))^n}^2 \prec \| u\|_1^2;$$

$$\| B_i(u)\|_{-3} \prec \| u\|_1^2 \quad (i = 2,3).$$

С помощью этих неравенств получаем

$$\left\| f - \nu Au + B_1(u) + \frac{\varkappa}{2}B_2(u) + \frac{\varkappa}{2}B_3(u)\right\|_{-3} \leqslant \leqslant \|f\|_{-3} + \nu\|Au\|_{-3} + \|B_1(u)\|_{-3} + \frac{\varkappa}{2}\|B_2(u)\|_{-3} + \frac{\varkappa}{2}\|B_2(u)\|_{-3} \prec 1 + \| u\|_1^2,$$

что и требовалось. ■

Лемма 6.4. *Пусть v — решение уравнения (3.3) на отрезке $[0,T]$ $(T > 0)$. Тогда при почти всех $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$\| v'(t)\|_{-1} + \varepsilon e^{-\alpha t}\| v'(t)\|_{-3} \prec 1 + \left(\| v(0)\|_1^2 + \varepsilon\| v(0)\|_3^2\right)e^{-\lambda\alpha t} \quad (\lambda,\varepsilon,v,t). \tag{6.9}$$

Доказательство. Так как v является решением уравнения (3.3), то при почти всех $t \in [0,T]$ имеем

$$(J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t) = = \lambda\left(f - \nu Av(t) + B_1(v(t)) + \frac{\varkappa}{2}B_2(v(t)) + \frac{\varkappa}{2}B_3(v(t))\right).$$

Оценивая правую часть с помощью леммы 6.3, получаем неравенство

$$\| (J + \varepsilon e^{-\lambda\alpha t}N + \varkappa A)v'(t)\|_{-3} \prec 1 + \| v(t)\|_1^2 \quad (\lambda,\varepsilon,v,t).$$

Отсюда по лемме 5.3 получаем

$$\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}\parallel v'(t)\parallel_3 \prec 1+\parallel v(t)\parallel_1^2 \quad (\lambda,\varepsilon,v,t)\,(6.10)$$

Из уравнения (3.3) можно также выразить

$$(J+\varkappa A)v'(t)=N(\varepsilon e^{-\lambda\alpha t}v'(t))+$$
$$+\lambda\left(f-\nu Av(t)+B_1(v(t))+\frac{\varkappa}{2}B_2(v(t))+\frac{\varkappa}{2}B_3(v(t))\right).$$

Оценивая правую часть с помощью леммы 6.3 и неравенства (6.10) (учитывая ограниченность оператора $N:V^3\to V^{-3}$), имеем:

$$\parallel (J+\varkappa A)v'(t)\parallel_{-3}\prec 1+\parallel v(t)\parallel_1^2 \quad (\lambda,\varepsilon,v,t).$$

Оператор $(J+\varkappa A)^{-1}:V^{-3}\to V^{-1}$ ограничен, поэтому из последнего неравенства получаем

$$\parallel v'(t)\parallel_{-1}\prec 1+\parallel v(t)\parallel_1^2 \quad (\lambda,\varepsilon,v,t).$$

Складывая это неравенство с (6.10) и оценивая λ единицей получаем.

$$\parallel v'(t)\parallel_{-1}+\varepsilon e^{-\alpha t}\parallel v'(t)\parallel_3 \prec 1+\parallel v(t)\parallel_1^2 \quad (\lambda,\varepsilon,v,t)$$

Оценивая правую часть с помощью неравенства (6.2), получаем (6.9) ■

Лемма 6.1 очевидным образом следует из лемм 6.2, 6.4.

Доказательство леммы 6.1. Из неравенства (6.2) получаем

$$\parallel v(t)\parallel_1+\sqrt{\varepsilon}e^{-\alpha t/2}\parallel v(t)\parallel_3 \prec$$
$$\prec 1+\parallel v(t)\parallel_1^2+\varepsilon e^{-\alpha t}\parallel v(t)\parallel_3^2 \prec$$
$$\prec 1+(\parallel v(0)\parallel_1^2+\varepsilon\parallel v(0)\parallel_3^2)e^{-\lambda\alpha t}.$$

Отсюда и из (6.9) получаем требуемую оценку.

7. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим семейство операторов, зависящее от параметра $\lambda\in[0,1]$:

$$L_\lambda: W_2[0,T]\to L_\infty(0,T;V^{-3})\times V^3,$$
$$L_\lambda(v)=\big((J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N+\varkappa A)v',v(0)\big);$$

и оператор

$$K: W_2[0,T]\to L_\infty(0,T;V^{-3})\times V^3,$$
$$K(v)=\left(\nu Av-B_1(v)-\frac{\varkappa}{2}B_2(v)-\frac{\varkappa}{2}B_2(v),0\right);$$

Лемма 7.1. *При любом* $\lambda\in[0,1]$ *оператор* $L_\lambda: E_2(0,T)\to L_\infty(0,T;V^{-3})\times V^3$ *ограничен и обратим, обратный оператор* $L_\lambda(g,a)$ *непрерывен по совокупности переменных* $g\in L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a\in V^3$, $\lambda\in[0,1]$.

Доказательство. Ограниченность оператора L_λ следует из леммы 5.4. Чтобы доказать существование обратного оператора, рассмотрим уравнение

$$L_\lambda(v)=(g,a), \qquad (7.1)$$

где в правой части $g\in L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a\in V^3$, и получим явную формулу для решения этого уравнения. Уравнение (7.1) эквивалентно уравнению

$$(J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N+\varkappa A)v'=g, \qquad (7.2)$$

снабжённому начальным условием

$$v(0)=a. \qquad (7.3)$$

По лемме 5.4 из уравнения (7.2) можно выразить v':

$$v'=(J+\varepsilon e_{-\lambda\alpha}N+\varkappa A)^{-1}g, \qquad (7.4)$$

при этом $v'\in L_\infty(0,T;V^3)$. Проинтегрируем (7) с учётом начального условия (7.3), получим

$$v(t)=a+\int_0^t(J+\varepsilon e^{-\lambda\alpha s}N+\varkappa A)^{-1}g(s)ds \quad (7.5)$$

Таким образом, решение уравнения (7.1) дается формулой (7.5) и потому единственно.

Обратно, пусть функция v задана формулой (7.5). По лемме 5.4 подынтегральная функция принадлежит $L_\infty(0,T;V^3)$, поэтому $v\in C([0,T];V^3)$. Продифференцировав (7.5), получаем, что производная v' удовлетворяет уравнению (7) и, следовательно, принадлежит $L_\infty(0,T;V^3)$. Таким образом, $v\in W_2[0,T]$. Ясно, что v удовлетворяет уравнению (7.2) и начальному условию (7.3), поэтому v является решением уравнения (7.1).

Таким образом, обратимость оператора L_λ доказана, а формула (7.5) является явным выражением обратного оператора L_λ^{-1}.

Докажем непрерывность обратного оператора. Рассмотрим сходящиеся последовательности $g_m\to g_0$ в $L_\infty(0,T;V^{-3})$, $a_m\to a_0$ в V^3, $\lambda_m\to\lambda_0$.

Пусть $v_m=L_{\lambda_m}^{-1}(g_m,a_m)$. В соответствии с (7) имеем

$$v_{m'}=(J+\varepsilon e_{-\lambda_m\alpha}N+\varkappa A)^{-1}g_m,$$

и по лемме 5.5 получаем, что производные $v_{m'}$ сходятся к $v_{0'}$ в $L_\infty(0,T;V^3)$. Тогда для самих функций имеем

$$\parallel v_m-v_0\parallel_{C([0,T];V^3)}=\max_{t\in[0,T]}\left\|\left(a_m+\int_0^t v_{m'}(s)ds\right)-\right.$$
$$\left.-\left(a_0+\int_0^t v_{0'}(s)ds\right)\right\|_{V^3}\leqslant$$
$$\leqslant\parallel a_m-a_0\parallel_{V^3}+T\parallel v_{m'}-v_{0'}\parallel_{L_\infty(0,T;V^3)}\to 0.$$

Таким образом, последовательность $\{v_m\}$ сходится к v_0 в пространстве $W_2[0,T]$, и непрерывность обратного оператора доказана. ■

Лемма 7.2. *Оператор $K : W_2[0,T] \to L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3$ является компактным.*

Доказательство. Утверждение следует из компактности операторов A и B_i $(i = 1,2,3)$ в соответствующих пространствах (см. леммы 5.1, 5.6, 5.7). ■

Лемма 7.3. *На любом отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения* (3.4)*, удовлетворяющее начальному условию* (3.2) *с произвольным $a \in V^3$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство уравнений

$$L_\lambda v + \lambda K(v) = \lambda(f,a), \qquad (7.6)$$

зависящих от параметра $\lambda \in [0,1]$. Уравнения этого семейства эквивалентны уравнениям (3.3), снабжённым начальными условиями

$$v(0) = \lambda a;$$

в частности, уравнение (7.6), соответствующее значению параметра $\lambda = 1$, эквивалентно уравнению (3.4), снабжённому начальным условием (3.2). Из неравенства (6.1) следует, что решения этого семейства уравнений (если они существуют) удовлетворяют априорной оценке

$$\| v \|_{C([0,T];V^3)} + \varepsilon e^{-\alpha T} \| v' \|_{L_\infty(0,T;V^3)} \leqslant C,$$

где C — постоянная, не зависящая от λ (но зависящая, вообще говоря, от остальных параметров уравнения). Отсюда следует, что для решений выполняется также априорная оценка

$$\| v \|_{W_2[0,T]} \leqslant R, \qquad (7.7)$$

где постоянная R также не зависит от λ.

Воспользовавшись обратимостью оператора L_λ (лемма 7.1), перейдём от (7.6) к эквивалентному уравнению

$$v - \lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - K(v)) = 0. \qquad (7.8)$$

Оператор $\lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - K(v))$ компактен по совокупности переменных λ, v, что следует из компактности оператора K (лемма 7.2) и непрерывности оператора L_λ^{-1} (лемма 7.1), поскольку оператор $\lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - K(v))$ можно представить в виде композиции компактного отображения

$$\mathrm{id} \times ((f,a) - K) : [0,T] \times W_2[0,T] \to$$
$$\to [0,1] \times (L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3)$$

и непрерывного отображения

$$\lambda L_\lambda^{-1} : [0,1] \times (L_\infty(0,T;V^{-3}) \times V^3) \to W_2[0,T].$$

В частности, при фиксированном λ оператор $I - \lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - \lambda K)$ представляет собой вполне непрерывное векторное поле. В силу априорной оценки (7.7) это векторное поле не обращается в 0 на границе шара B_{R+1} радиуса $R+1$, поэтому топологическая степень Лере-Шаудера векторного поля определена при каждом $\lambda \in [0,1]$, и отображение

$$\mathbf{\Phi}(\lambda, v) = v - \lambda L_\lambda^{-1}((f,a) - \lambda K(v))$$

является гомотопией на шаре B_{R+1} вполне непрерывных векторных полей $\mathbf{\Phi}(0,\cdot) = I$ и $\mathbf{\Phi}(1,\cdot) = I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot))$. В силу гомотопической инвариантности степени Лере-Шаудера имеем

$$\deg_{LS}(I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot)), B_{R+1}, 0) =$$
$$= \deg_{LS}(I, B_{R+1}, 0) = 1.$$

Поскольку степень поля $I - L_1^{-1}((f,a) - K(\cdot))$ отлична от 0, то существует по крайней мере одно решение $v \in W_2[0,T]$ операторного уравнения

$$v - L_1^{-1}((f,a) - K(v)) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (7.6) с $\lambda = 1$, а оно, в свою очередь, эквивалентно задаче (3.4), (3.2). Следовательно, разрешимость задачи доказана. ■

В дальнейшем мы будем доказывать два утверждения, содержащие предельный переход: о существовании решений аппроксимационного уравнения, определённых на полуоси $\mathbb{R}_+$, и о предельном переходе к решению исходной задачи. Чтобы не повторять рассуждения два раза, соберём нужные утверждения технического характера в одной лемме.

Лемма 7.4. *Пусть $\{v_m\}$ — ограниченная последовательность в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{v_{m'}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) последовательность $\{v_m\}$ компактна в пространстве $C(0,T;V^{1-\delta})$;

(ii) существует подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящаяся к предельной функции v_* в пространстве $C(0,T;V^{1-\delta})$, причём имеют место предельные соотношения

$$Av_{m_k} \rightharpoonup Av_* \text{ слабо в } L_4\left(0,T;V^{-1}\right); \qquad (7.9)$$

$$(I + \varkappa A)v'_{m_k} \rightharpoonup (I + \varkappa A)v'_* \text{ слабо в } L_4\left(0,T;V^{-3}\right); \qquad (7.10)$$

$$B_1(v_{m_k}) \to B_1(v_*) \ \textit{слабо в}\ L_\infty\left(0,T;V^{-1}\right); \quad (7.11)$$

$$B_i(v_{m_k}) \rightharpoonup B_i(v_*) \ \textit{слабо в}\ L_2\left(0,T;V^{-3}\right)\ (i=1,2); \quad (7.12)$$

(iii) если последовательность $\{v'_m\}$ *ограничена в норме пространства* $L_\infty(0,T,V^3)$, *то без ограничения общности можно считать, что*

$$Nv'_{m_k} \rightharpoonup Nv'_* \ \textit{слабо в}\ L_2\left(0,T;V^{-3}\right); \quad (7.13)$$

(iv) если $\varepsilon_m \to 0$ *— такая числовая последовательность, что последовательность* $\{\varepsilon_m v'_m\}$ *ограничена в норме пространства* $L_\infty(0,T,V^3)$,, *то без ограничения общности можно считать, что*

$$\varepsilon_{m_k} Nv'_{m_k} \rightharpoonup 0 \ \textit{слабо в}\ L_2\left(0,T;V^{-3}\right). \quad (7.14)$$

Доказательство. (i) Рассмотрим тройку пространств $V^1 \Subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$. По теореме 2.1 пространство

$$Y = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\ v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})\}$$

компактно вложено в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Из условия леммы следует, что последовательность $\{v_m\}$ ограничена в Y, поэтому она относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Заменив в этих рассуждениях δ на $1/4$, делаем вывод, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна и в $C([0,T];V^{3/4})$.

(ii) Последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$, поэтому она имеет подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C([0,T];V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Тогда

$$v'_{m_k} \to v'_{m_k} \ \text{в}\ \mathfrak{D}'\left(0,T;V^{-3}\right).$$

Перейдём от нерефлексивных пространств L_∞ к рефлексивным L_p, чтобы можно было воспользоваться слабой компактностью ограниченных множеств. Поскольку пространство L_∞ непрерывно вкладывается в L_p с $p \geqslant 1$, то последовательности $\{v_m\}$ и $\{v'_m\}$ ограничены в нормах пространств $L_4(0,T;V^1)$ и $L_2(0,T;V^{-1})$ соответственно. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup v_* \ \textit{слабо в}\ L_4\left(0,T;V^1\right); \quad (7.15)$$

$$v'_{m_k} \rightharpoonup v'_* \ \textit{слабо в}\ L_2\left(0,T;V^{-1}\right); \quad (7.16)$$

Так как линейные операторы $A : L_4(0,T;V^1) \to L_4(0,T;V^{-1})$ и $J + \varkappa A : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$ ограничены, то два последние предельные соотношения дают (7.9) и (7.10).

Выше было показано, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{3/4})$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\{v_{m_k}\}$ сходится к v_* в $C([0,T];V^{3/4})$. Так как при $n=2,3$ имеют место вложения $V^{3/4} \subset (H^{3/4}(\Omega))^n \subset (L_4(\Omega))^n$, то

$$v_{m_k} \to v_* \ \text{сильно в}\ L_\infty\left(0,T;\left(L_4\left(\Omega\right)\right)^n\right),$$

и соотношение (7.11) следует из непрерывности оператора B_1 (лемма 5.6).

Соотношение (7.12) докажем для B_2 (в случае оператора B_3 рассуждения аналогичны). Требуется доказать, что для всякой функции $\varphi \in L_2(0,T;V^3)$ имеем

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\, dxdt \to 0. \quad (7.17)$$

Рассмотрим трилинейную форму

$$b : L_4(0,T;(L_4(\Omega))^n) \times$$
$$\times L_4(0,T;L_2(\Omega;M_n(\mathbb{R}))) \times$$
$$\times L_2(0,T;L_4(\Omega;M_n(\mathbb{R}))) \to \mathbb{R},$$

$$b(u,M,\Psi) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n u_k(t) M_{ij}(t) \Psi_{ik}(t)\, dxdt.$$

Корректность определения этой формы и её ограниченность следуют из оценки

$$|\, b(u,M,\Psi),\varphi\rangle\, | \leqslant \| u \|_{L_4(0,T;(L_4(\Omega))^n)} \| \times$$
$$\times M \|_{L_4(0,T;L_2(\Omega;M_n(\mathbb{R})))} \| \times$$
$$\times \Psi \|_{L_2(0,T;L_4(\Omega;M_n(\mathbb{R})))}.$$

Заметим, что если $u_k \to u_0$ сильно, $M_k \rightharpoonup M_0$ слабо, то

$$b(u_k,M_k,\Psi) \to b(u,M_0,\Psi). \quad (7.18)$$

Действительно, для $u \in L_4(0,T;(L_4(\Omega))^n)$ рассмотрим линейный ограниченный оператор B_u, который действует из $L_4(0,T;L_2(\Omega;M_n(\mathbb{R})))$ в пространство, сопряжённое к $L_2(0,T;L_4(\Omega;M_n(\mathbb{R})))$, по правилу

$$B_u(M,\Psi) = b(u,M,\Psi).$$

При $k \to \infty$ имеем сильную сходимость $B_{u_k} \to B_{u_0}$ по операторной норме, и поэтому

$$B_{u_k} M_k = B_{u_0} M_k + (B_{u_k} - B_{u_0}) M_k \rightharpoonup B_{u_0} M_0.$$

Отсюда следует (7.18).

Из (7.18) следует (7.17), если положить $u_k = v_{m_k}$, $M = \nabla v_{m_k}$, $\Psi = \left(\dfrac{\partial^2 \varphi_j(t)}{\partial x_i \partial x_k}\right)$, поскольку из сильной сходимости последовательности $\{v_{m_k}\}$ в $L_\infty(0,T;(L_4(\Omega))^n)$ следует ее сильная

сходимость в $L_4(0,T;(L_4(\Omega))^n)$ и слабая сходимость последовательности $\{\nabla v_{m_k}\}$ в $L_4(0,T;L_2(\Omega;M_n(\mathbb{R})))$.

(iii) Без ограничения общности можно считать, что $\{v'_{m_k}\}$ сходится к v'_* слабо в $L_2(0,T,V^3)$. Линейный оператор $N: L_2(0,T,V^3)\to L_2(0,T,V^{-3})$ ограничен, поэтому имеем слабую сходимость (7.13).

(iv) Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\varepsilon_{m_k} v_{m_k}'\}$ слабо сходится в $L_2(0,T,V^3)$ к некоторой предельной функции u. Линейный оператор $N: L_2(0,T,V^3)\to L_2(0,T,V^{-3})$ ограничен, поэтому имеем слабую сходимость

$$N(\varepsilon_m v'_m) \rightharpoonup Nu.$$

Покажем, что $Nu=0$. Возьмём некоторую функцию $\varphi\in E_\infty$. Для произвольной функции $\chi\in\mathfrak{D}(0,T)$ имеем

$$\left|\int_t^T \left\langle N\left(\varepsilon_m v'_m(t)\right),\varphi\right\rangle\right| =$$
$$= \left|\int_0^T\left(\int_\Omega \nabla\left(\Delta\left(\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}(t)\right)\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)dx\right)\chi(t)\,dt\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_0^T\left(\int_\Omega \nabla\left(\Delta\left(v'_{m_k}(t)\right)\right):\nabla\left(\Delta\varphi\right)dx\right)\chi(t)\,dt\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_0^T\left(\int_\Omega \Delta\left(v'_{m_k}(t)\right)\left(\Delta^2\varphi\right)dx\right)\chi(t)\,dt\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_0^T\left(\int_\Omega \nabla\left(v'_{m_k}(t)\right):\nabla\left(\Delta^2\varphi\right)dx\right)\chi(t)\,dt\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_\Omega\left(\int_0^T \nabla\left(v'_{m_k}(t)\right)\chi(t)dt\right):\nabla\left(\Delta^2\varphi\right)dx\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_\Omega\left(\int_0^T \nabla\left(v_{m_k}(t)\right)\chi'(t)dt\right):\nabla\left(\Delta^2\varphi\right)dx\right| =$$
$$= \varepsilon_{m_k}\left|\int_0^T\left(\int_\Omega \nabla v_{m_k}(t):\nabla\left(\Delta^2\varphi\right)dx\right)\chi'(t)\,dt\right| \le$$
$$\le \varepsilon_{m_k}\int_0^T\left\|v_{m_k}(t)\right\|_1\left\|\Delta^2\varphi\right\|_1\left|\chi'(t)\right|dt \le$$
$$\le \varepsilon_{m_k}\left\|v_{m_k}\right\|_{L_\infty;\left(0,T,V^1\right)}\left\|\Delta^2\varphi\right\|_1\int_0^T\left|\chi'(t)\right|dt \to 0.$$

Это значит, что последовательность $\langle N(\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}),\varphi\rangle$ сходится к 0 в смысле распределений. Следовательно,

$$\langle Nu,\varphi\rangle = 0 \tag{7.19}$$

почти всюду.

Рассмотрим теперь счётное множество $\{\varphi_l\}\subset E_\infty$, плотное в V^3. Из (7.19) следует, что для всех t из некоторого подмножества полной меры отрезка $[0,T]$ имеем

$$\langle Nu(t),\varphi_l\rangle = 0$$

при каждом l. В силу плотности множества $\{\varphi_l\}$ отсюда следует, что $Nu(t)=0$ при почти всех t, что и требовалось. ■

Теорема 7.1. *При любом $a\in V^3$ задача* (3.4), (3.2) *имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть v_m — решение задачи (3.4), (3.2) на отрезке $[0,m]$ $(m=1,2,\ldots)$, которое существует согласно лемме 7.3. Продолжим функции v_m на полуось $\mathbb{R}_+$:

$$\hat v_m(t) = \begin{cases} v(t), & 0\leqslant t\leqslant m,\\ v(m), & t\geqslant m.\end{cases}$$

Очевидно, функции v_m принадлежат пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что последовательность $\{\hat v_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$. Согласно теореме 4.1 для этого достаточно установить, что для любого $T>0$ последовательность ограничений $\{\Pi_T\hat v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$.

Возьмём произвольное $T>0$. Отбросив, возможно, несколько первых членов последовательности, можем считать, что функции $\{\Pi_T\hat v_m\}$ являются решениями задачи (3.4), (3.2) на отрезке $[0,T]$. Так как функции $\Pi_T\hat v_m$ имеют одно и то же значение в точке 0, то из леммы 6.1 следует, что они удовлетворяют оценке

$$\begin{aligned}\|\,\Pi_T\hat v_m\,\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|\,\Pi_T\hat v_m\,\|_{L_\infty(0,T;V^3)} +\\ + \|\,\Pi_T\hat v'_m\,\|_{L_\infty(0,T;V^3)} +\\ + \|\,\mathbf{\Pi}_T\hat v'_m\,\|_{L_\infty(0,T;V^{-1})} \leqslant C(\varepsilon,T)\end{aligned} \tag{7.20}$$

с постоянной $C(\varepsilon,T)$, не зависящей от m. Таким образом, последовательность $\{\Pi_T\hat v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{\Pi_T\hat v'_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. По лемме 7.4 последовательность $\{\Pi_T\hat v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$, что и требовалось.

Таким образом, последовательность $\{\hat v_m\}$ содержит подпоследовательность $\{\hat v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Покажем, что эта предельная функция является искомым решением задачи (3.4), (3.2) на $\mathbb{R}_+$.

Сначала убедимся, что функция v_* принадлежит пространству $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Из оценки (7.20) следует, что при произвольном $T>0$ последовательности $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T\hat v'_{m_k}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^3)$, поэтому без ограничения общности можно считать, что они сходятся $*$-слабо в $L_\infty(0,T;V^3)$ соответственно к v_* и некоторой функции $u\in L_\infty(0,T;V^3)$. Однако в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3} производные $\{\Pi_T\hat v'_{m_k}\}$ сходятся к v'_*,

поэтому $u = \Pi_T v_*'$. Таким образом, функция $\Pi_T v_*$ принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^3)$ вместе со своей производной. Отсюда следует, что функция $\Pi_T v_*$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом и потому непрерывна со значениями в V^3. Следовательно, $\Pi_T v_*$ принадлежит $W_2[0,T]$. Это верно для любого T, так что v_* принадлежит $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Из сходимости в $C([0,T];V^{1-\delta})$ следует поточечная. Так как все функции $\{\hat v_{m_k}\}$ удовлетворяют одному и тому же начальному условию, то выполнение для v_* начального условия (3.2) очевидно, и нужно проверить только, что эта функция является решением уравнения (3.4). Для этого нужно установить, что ограничение $\Pi_T v_*$ на всякий отрезок $[0,T]$ $\big(T>0\big)$ является решением уравнения (3.4) на этом отрезке.

Из сходимости последовательности $\{\hat v_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+,V^0)$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ к $\Pi_T v_*$ в $C([0,T];V^0)$. Начиная с некоторого номера функции $\Pi_T\hat v_{m_k}$ являются решениями уравнения (3.4), то есть

$$(J+\varkappa A)\Pi_T\hat v_{m_k}{}' + \nu A\Pi_T\hat v_{m_k} + \\ +\varepsilon N\Pi_T\hat v_{m_k}{}' - B_1(\Pi_T\hat v_{m_k}) - \\ -\frac{\varkappa}{2}B_2(\Pi_T\hat v_{m_k}) - \frac{\varkappa}{2}B_3(\Pi_T\hat v_{m_k}) = f. \tag{7.21}$$

Из неравенства (7.20) следует, что последовательность $\{\Pi_T\hat v_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{\Pi_T\hat v_{m_k}{}'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$ и $L_\infty(0,T;V^3)$, то есть выполнены условия леммы 7.4. Согласно этой лемме, без ограничения общности можно считать, что левая часть тождества (7.21) сходится к

$$(J+\varkappa A)\Pi_T v_{*}' + \nu A\Pi_T v_* + \varepsilon N\Pi_T v_{*}' - \\ -B_1(\Pi_T v_*) - \frac{\varkappa}{2}B_2(\Pi_T v_*) - \frac{\varkappa}{2}B_3(\Pi_T v_*)$$

в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3}. Это значит, что $\Pi_T v_*$ является решением уравнения (3.4) на $[0,T]$, что и требовалось. ■

Теорема 7.2. *При любом $a\in V^1$ задача* (3.1), (3.2) *имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству*

$$\| v(t)\|_1 + \| v'(t)\|_{-1} \leqslant R_0\left(1+\| v(0)\|_1^2\, e^{-\alpha t}\right) \tag{7.22}$$

при почти всех $t>0$ (здесь R_0 — постоянная, зависящая от параметров задачи и не зависящая от v).

Доказательство. Поскольку V^3 плотно в V^1, найдётся последовательность $\{a_m\}\subset V^3$, такая что $\| a_m - a\|_1\to 0$. Положим

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m\max\{\| a_m\|_{V^3}^2,1\}}.$$

В этом случае, очевидно, имеем $\varepsilon_m\to 0$ и

$$\varepsilon_m \| a_m\|_{V^3}^2 \leqslant 1. \tag{7.23}$$

По теореме 7.1 существуют решения v_m уравнения (3.4) с $\varepsilon=\varepsilon_m$, удовлетворяющих начальному условию

$$v_m(0) = a_m.$$

Из леммы 6.1 с учётом неравенства (7.23) следует оценка

$$\| v_m(t)\|_{V^1} + \| v_m'(t)\|_{V^{-1}} + \varepsilon_m e^{-\alpha t}\| v_m'(t)\|_{V^3} \leqslant \\ \leqslant R_1\left(1+\left(\| a_m\|_{V^1}^2+1\right)e^{-\alpha t}\right) \tag{7.24}$$

При каждом m это неравенство выполняется при всех $t\in\mathbb{R}_+\setminus Q_m$, где Q_m — некоторое множество меры 0, поэтому при всех $t\in\mathbb{R}_+\setminus Q$, где $Q=\cup_m Q_m$ — множество меры 0, данное неравенство выполняется для *каждого* m.

Покажем, что последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$. Согласно теореме 4.1 для этого достаточно установить, что для любого $T>0$ последовательность ограничений $\{\Pi_T v_m\}$ относительно компактна в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Однако это следует из леммы 7.4, так как из оценки (7.24) следует, что последовательность $\{\Pi_T v_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{\Pi_T v_m'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$.

Так как последовательность $\{v_m\}$ относительно компактна, то она содержит подпоследовательность $\{v_{m_k}\}$, сходящуюся в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$ к некоторой функции v_*. Покажем, что v_* является искомым решением.

Сначала заметим, что функция v_* принадлежит пространству $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. В самом деле, из оценки (7.24) следует, что при произвольном $T>0$ последовательности $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ и $\{\Pi_T v_{m_k}'\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;V^1)$, $L_\infty(0,T;V^{-1})$ поэтому без ограничения общности можно считать, что они сходятся *-слабо соответственно в $L_\infty(0,T;V^1)$ и $L_\infty(0,T;V^{-1})$ к v_* и некоторой функции $u\in L_\infty(0,T;V^{-1})$. Однако в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3} производные $\{\Pi_T\hat v_m'\}$ сходятся к v_*', поэтому $u=\Pi_T v_*'$. Таким образом, функция $\Pi_T v_*$ принадлежит пространству $L_\infty(0,T;V^1)$, а её про-

изводная — пространству $L_\infty(0,T;V^{-1})$, то есть $\Pi_T v_* \in E_1$. Это верно для любого T, так что v_* принадлежит $E_1(\mathbb{R}_+)$, что и требовалось.

Покажем, что для v_* выполняется начальное условие (3.2). Из сходимости в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$ следует поточечная, поэтому

$$a_{m_k} = v_{m_k} \to v_*(0) \text{ в } V^{1-\delta}.$$

Однако имеем $a_{m_k} \to a$ в V^1, поэтому $v_*(0) = a$, то есть начальное условие удовлетворяется.

Проверим, что функция v_* является решением уравнения (3.1) на $\mathbb{R}_+$. Для этого нужно установить, что ограничение $\Pi_T v_*$ на всякий отрезок $[0,T]$ $\big(T>0\big)$ является решением уравнения (3.1) на этом отрезке.

Из сходимости последовательности $\{\hat v_{m_k}\}$ к v_* в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$ следует сходимость ограничений $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ к $\Pi_T v_*$ в $C([0,T];V^{1-\delta})$. Функции $\Pi_T v_{m_k}$ являются решениями уравнения (3.4), то есть

$$(I+\varkappa A)\Pi_T \hat v'_{m_k} + \nu A \Pi_T \hat v_{m_k} +$$

$$+\varepsilon_{m_k} N \Pi_T \hat v'_{m_k} - B_1(\Pi_T \hat v_{m_k}) - \frac{\varkappa}{2} B_2(\Pi_T \hat v_{m_k}) - \quad (7.25)$$

$$-\frac{\varkappa}{2} B_3(\Pi_T \hat v_{m_k}) = f.$$

Из неравенства (7.23) следует, что последовательность $\{\Pi_T v_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$, а последовательность производных $\{\Pi_T v'_{m_k}\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^{-1})$, при этом последовательность $\varepsilon_m v'$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^3)$ и $\varepsilon_m \to 0$, поэтому по лемме 7.4 без ограничения общности можно считать, что левая часть тождества (7.25) сходится к

$$(I+\varkappa A)\Pi_T v'_* + \nu A \Pi_T v_* - B_1(\Pi_T v_*) -$$

$$-\frac{\varkappa}{2} B_2(\Pi_T v_*) - \frac{\varkappa}{2} B_3(\Pi_T v_*)$$

в смысле распределений на $(0,T)$ со значениями в V^{-3}. Это значит, что $\Pi_T v_*$ является решением уравнения (3.1) на $[0,T]$, что и требовалось.

Остаётся доказать неравенство (7.22). Отбрасывая неотрицательные слагаемое в левой части (7.24), получаем неравенство

$$\| v_{m_k}(t) \|_{V^1} \leqslant R_1 \left(1 + \Big(\| a_m \|^2_{V^1} + 1\Big) e^{-\alpha t}\right) \quad (7.26)$$

Это неравенство выполняется для каждого k при всех t, принадлежащих некоторому (не зависящему от k) подмножеству $\mathbb{R}_+$ полной меры. Возьмём некоторое такое t. Прежде всего отметим, что $v_{m_k}(t) \to v_*(t)$ в $V^{1-\delta}$, так как из сходимости в $C(\mathbb{R}_+,V^{1-\delta})$ следует поточечная. Далее, из неравенства (7.23) следует, что последовательность $\{v_{m_k}(t)\}$ ограничена в V^1. Следовательно, она содержит подпоследовательность $\tilde v_l(t)$, слабо сходящуюся в V^1 к $v_*(t)$. Поэтому

$$\| v_*(t) \|_{V^1} \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \| \tilde v_l(t) \|_{V^1} \leqslant R_1 \left(1 + \Big(\| a \|^2_{V^1} + 1\Big) e^{-\alpha t}\right)$$

Таким образом, для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\| v_*(t) \|_{V^1} \leqslant R_1 \left(1 + \Big(\| a \|^2_{V^1} + 1\Big) e^{-\alpha t}\right). \quad (7.27)$$

Оценим значение производной $v'_*(t)$. Так как функция v'_* удовлетворяет уравнению (3.1), то

$$(J+\varkappa A)v'_* = f - \nu A v_* + B_1(v_*) +$$

$$+\frac{\varkappa}{2} B_2(v_*) + \frac{\varkappa}{B_3}(v_*).$$

По лемме 6.3 правая часть этого тождества допускает оценку

$$\Big\| f - \nu A v_*(t) + B_1(v_*(t)) +$$

$$+\frac{\varkappa}{2} B_2(v_*(t)) + \frac{\varkappa}{2} B_3(v_*(t)) \Big\|_{-3} \prec$$

$$\prec 1 + \| v_*(t) \|^2_1,$$

откуда

$$\big\|(J+\varkappa A)v'_*(t)\big\|_{-3} \prec 1 + \| v_*(t) \|^2_1 .$$

В силу ограниченности оператора $(J+\varkappa A)^{-1} : V^{-3} \to V^{-1}$ отсюда получаем

$$\| v'_*(t) \|_{V^{-1}} \prec 1 + \| v_*(t) \|^2_{V^1},$$

и окончательно с учётом (7.27)

$$\| v'_*(t) \|_{V^{-1}} \prec 1 + \Big(\| a \|^2_{V^1} + 1\Big) e^{-\alpha t}$$

Складывая эту оценку с (7.27), получаем оценку, которая может быть записана в виде (7.22). ■

8. ПРОСТРАНСТВО ТРАЕКТОРИЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ АТТРАКТОРОВ

В качестве двух банаховых пространств, необходимых для определения пространства траекторий (см. п. 4), выберем $E = V^1$ и $E_0 = V^{1-\delta}$ (это можно сделать, так как пространство V^1 рефлексивно и непрерывно вложено в $V^{1-\delta}$).

В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (3.1) *будем рассматривать множество решений этого уравнения, определенных*

на $\mathbb{R}_+$, *существенно ограниченных со значениями в* V^1 *и удовлетворяющих оценке*

$$\| v(t) \|_{V^1} + \| v'(t) \|_{V^{-1}} \leqslant \leqslant R_0 \left(1 + \| v \|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)} \, e^{-\alpha t} \right) \tag{8.1}$$

при почти всех $t > 0$ *(здесь* R_0 *— постоянная из теоремы* 7.2*).*

Чтобы данное определение пространства траекторий было корректным, нужно убедиться, что пространство непусто, и проверить включение

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E).$$

Сначала займёмся вторым вопросом. Включение $\mathcal{H}^+ \subset L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ непосредственно следует из определения пространства траекторий. Чтобы доказать непрерывность траекторий, воспользуемся теоремой 2.1 для тройки пространств $V^1 \Subset V^{1-\delta} \subset V^{-1}$. Из неравенства (8.1) следует, что если v — некоторая траектория, то на произвольном отрезке $[0,T]$ имеем $\Pi_T v \in L_\infty(0,T;V^1)$, $\Pi_T v' \in L_\infty(0,T;V^{-1})$, поэтому из теоремы 2.1 следует, что $\Pi_T v$ принадлежит пространству $C([0,T];V^{1-\delta})$. Это верно при любом T, так что $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$, что и требовалось.

Нижеследующее утверждение не только показывает непустоту пространства траекторий (и тем самым окончательно утверждает корректность его определения), но и служит оправданием введения этого пространства траекторий в рассмотрение.

Теорема 8.1. *Для каждой точки* $a \in V^1$ *существует траектория* $v \in \mathcal{H}^+$, *такая что* $v(0) = a$.

Доказательство. Теорема 7.2 утверждает, что на $\mathbb{R}_+$ существует решение v задачи (3.1), (3.2). Покажем, что эта функция является искомой траекторией. Для этого нужно только проверить выполнение оценки (8.1). Поскольку v удовлетворяет (7.22), то ясно, что достаточно установить неравенство

$$\| v(0) \|_{V^1} \leqslant \| v \|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)} \tag{8.2}$$

Из оценки (7.22) следует, что функция v принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, а её производная — пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^{-1})$. Отсюда получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$ (повторяя рассуждения, проведённые выше для траекторий). Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, и по теореме 2.2 функция v принадлежит пространству слабо непрерывных функций $C_w(\mathbb{R}_+; V^1)$. Неравенство (8.2) следует из слабой непрерывности функции v (см. замечание 4.1). ■

Теперь перейдём к центральным утверждениям: теоремам о существовании минимального траекторного и глобального аттракторов.

Теорема 8.2. *Существует минимальный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}^+$. *Аттрактор ограничен в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, *компактен в* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$; *он притягивает семейства траекторий, ограниченные в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, *в топологии пространства* $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$. *Кроме того, имеют место соотношения*

$$\Pi_+ \mathcal{K}(\mathcal{H}^+) \subset \Pi_+ \mathcal{K}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \tag{8.3}$$

и ядро $\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)$ *относительно компактно в* $C(\mathbb{R}; V^{1-\delta})$ *и ограничено в* $L_\infty(\mathbb{R}; V^1)$.

Доказательство. Согласно теореме 4.2 всё, что требуется — это установить существование траекторного полуаттрактора.

Рассмотрим множество

$$P = \{ v \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E) : v' \in L_\infty(\mathbb{R}_+, V^{-1}), \\ \| v(t) \|_1 + \| v'(t) \|_{-1} \leqslant 2R_0 \text{ п.в. } t \in \mathbb{R}_+ \}. \tag{8.4}$$

Из определения P непосредственно следует, что это множество ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$ и трансляционно инвариантно, то есть

$$\mathbf{T}(h) P \subset P \ (h \geqslant 0).$$

Легко видеть, что множество P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$. Действительно, из его определения ясно, что при любом $T > 0$ множество $\Pi_T P$ ограничено в пространстве $L_\infty(0,T;V^1)$, а множество $\{v' : v \in \Pi_T P\}$ ограничено в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. По теореме 4.1 отсюда следует, что множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0,T];V^{1-\delta})$. В силу произвольности T получаем относительную компактность множества P в $C(\mathbb{R}_+; V^{1-\delta})$.

Покажем, что множество P является поглощающим для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Рассмотрим произвольное множество $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$; пусть для определённости $\| v \|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)} \leqslant R$ для всех $v \in B$. Выберем такое $h_0 \geqslant 0$, что $R^2 e^{-\alpha h_0} \leqslant 1$. Пусть v — произвольная функция из B. Так как v удовлетворяет неравенству (6.1), то при $h \geqslant h_0$ имеем

$$\| \mathbf{T}(h) v(t) \|_1 + \| \mathbf{T}(h) v'(t) \|_{-1} = \\ = \| v(t+h) \|_1 + \| v'(t+h) \|_{-1} \leqslant \\ \leqslant R_0 (1 + R^2 e^{-\alpha(t+h)}) \leqslant R_0 (1 + R^2 e^{-\alpha h_0}) \leqslant 2R_0.$$

Таким образом, $\mathbf{T}(h)v \in P$. В силу произвольности v получаем, что $\mathbf{T}(h)B \subset P$ при всех $h \geqslant h_0$. Следовательно, P — поглощающее множество.

Рассмотрим множество $\overline{P}$ — замыкание P в пространстве $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$. Покажем, что $\overline{P}$ — полуаттрактор.

Очевидно, множество $\overline{P}$ компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$.

Покажем, что множество $\overline{P}$ содержится в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$ и ограничено в этом пространстве. Рассмотрим функцию $v \in \overline{P}$. Пусть последовательность $\{v_m\} \subset P$ сходится к v в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$. Так как P ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, то найдётся такая постоянная C, что $\| v_m \|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leqslant C$ $\big(m = 1,2,\ldots\big)$. Функции $v_m \in P$ слабо непрерывны со значениями в V^1, поэтому при всех $t \geqslant 0$ имеем

$$\| v_m(t) \|_{V^1} \leqslant C. \tag{8.5}$$

Возьмём число $t \geqslant 0$. Согласно (8.5) последовательность $v_m(t)$ ограничена в V^1, поэтому она содержит подпоследовательность $v_{m_k}(t)$, слабо сходящуюся в V^1 к некоторой функции $u \in V^1$. С другой стороны, из сходимости в $C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ следует поточечная, поэтому $v_m(t) \to v(t)$ в $V^{1-\delta}$. Таким образом, $u = v(t)$, и $v_{m_k}(t) \rightharpoonup v(0)$ слабо в V^1. Тогда

$$\| v(t) \|_{V^1} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \| v_{m_k}(t) \|_{V^1} \leqslant C.$$

Следовательно, при всех t имеем $\| v(t) \|_{V^1} \leqslant C$, и функция v действительно принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, кроме того, постоянная C ограничивает $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$-нормы функций из $\overline{P}$, так что это множество ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$.

Проверим трансляционную инвариантность множества $\overline{P}$. При каждом $h \geqslant 0$ оператор $\mathbf{T}(h) : C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta}) \to C(\mathbb{R}_+;V^{1-\delta})$ непрерывен, поэтому

$$\mathbf{T}(h)\overline{P} \subset \overline{\mathbf{T}(h)P} \subset \overline{P},$$

что и требовалось.

Множество P является поглощающим, поэтому множество $\overline{P}$ тем более является поглощающим, а значит, притягивающим.

Таким образом, $\overline{P}$ является искомым траекторным полуаттрактором. ■

Теорема 8.3. *Существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Аттрактор ограничен в V^1, компактен в $V^{1-\delta}$; он притягивает семейства траекторий, ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, в топологии пространства $V^{1-\delta}$. Кроме того, имеют место соотношения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(t) \quad (t \geqslant 0), \quad t \geqslant 0; \tag{8.6}$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}^+)(t) \subset \mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{U})(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.7}$$

Доказательство. Теорема непосредственно следует из теорем 8.2 и 4.3. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. — 1971. — т. 200., № 4 — С. 809—812.

2. *Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. С.* Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. — 1975. — вып. 96. — С. 3—9.

3. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1994. — Т. 213. — С. 93—115.

4. *Осколков А. П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 98—136.

5. *Осколков А. П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1975. — т. 52. — С. 128—157.

6. *Осколков А. П.* О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1976. — т. 59. — С. 133—177.

7. *Turbin M. V.* Research of a mathematical model of low-concentrated aqueous polymer solutions // Abstract and Applied Analysis, 2006. — V. 2006. — P. 1—27.

8. *Zvyagin, Victor G., Vorotnikov, Dmitry A.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics — Berlin, New York (Walter de Gruyter), 2008.

9. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения — Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.

10. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств // УМН, 21:2(128) (1966), 89—168

11. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса — М.: Мир, 1981. — 408 с.

12. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы — М.: Мир, 1971.

Кондратьев Станислав Константинович — младший научный сотрудник НИИ математики ВГУ, тел. 8-9036524904, e-mail: kondratjevsk@gmail.com

Kondratyev Stanislav K. — Voronezh State University, Research Institute of Mathematics, tel. 8-9036524904, e-mail: kondratjevsk@gmail.com