УДК 517.54

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА

Э. Г. Кирьяцкий

Вильнюсский технический университет имени Гедиминаса

Поступила в редакцию 27.10.2009 г.

Аннотация. Рассматривается одно из возможных обобщений производной Шварца. Устанавливается связь с классом голоморфных в единичном круге функций, у которых n-ая разделенная разность отлична от нуля.
Ключевые слова: голоморфная функция, оператор, функционал, разделенная разность, огранд, автоморфизм.

Abstract. The generalization of Schwarz's derivative, which is applied to the study of the properties of the class of functions with nonvanishing in the unit circle divided difference of n-th order is examined.
Keywords: operator, divided difference, holomorphic function, automorphism, functional, ogrand.

Пусть $F(z)$ голоморфная в области D функция. Выражение*

$$\{F(z);z\} = \frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2,$$
$$F'(z) \neq 0,\ \forall z \in D.$$

называется производной Шварца, которая имеет различные применения в геометрической теории функций комплексного переменного ([1], [2]). В этой теории важную роль играет класс однолистных в единичном круге E (т.е. в круге $|z|<1$) функций ([3]). Например, З. Нехари ([4], [5]) установил, что для однолистности в E функции $F(z)$ необходимо выполнение неравенства

$$\left|\{F(z);z\}\right| \le \frac{6}{\left(1-|z|^2\right)^2},\ \forall z \in E, \tag{1}$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\left|\{F(z);z\}\right| \le \frac{2}{\left(1-|z|^2\right)^2},\ \forall z \in E. \tag{2}$$

Как показал Е. Хилл ([6]) константу 2 в (2) нельзя заменить большей. Идеи З. Нехари получили дальнейшее развитие в работах [6] – [8]. В статье [9] И. А. Александров вариационным методом нашел область значений функционала $\mathrm{I} = \{F(z_0);z_0\}$ на классе однолистных в E функций $F(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$. Оказалось, что область значений представляет собой круг радиуса $6(1-|z_0|^2)^{-2}$. И. Е. Базилевич и Г. М. Голузин ([2]) заметили, что неравенство (1) следует из найденного ими точного неравенства

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \le 1 \tag{3}$$

для коэффициентов однолистных в E функций. Рассмотрим оператор

$$\breve{S}_n\left[F(z)\right] = \frac{F^{(n+2)}(z)}{F^{(n)}(z)} - \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{F^{(n+1)}(z)}{F^{(n)}(z)}\right)^2, \tag{4}$$
$$F^{(n)}(z) \neq 0$$

При $n = 1$ получаем производную Шварца. Можно установить связь оператора $\tilde{S}_n$ с классом $K_n(E)$ функций, который был введен автором этой статьи в [10]. Напомним определение этого класса. Через $K_n(E)$, $n \ge 1$, обозначается класс голоморфных в E функций $F(z)$, для которых n-ая разделенная разность $\left[F(z);z_0,\ldots,z_n\right] \neq 0$, $\forall z_0,\ldots,z_n \in E$. Если $n=1$, то класс $K_1(E)$ совпадает с классом однолистных в E функций. Класс $K_n(E)$, $n \ge 2$, является собственным подклассом всего класса n-листных функций. Со свойствами функций из класса $K_n(E)$ можно познакомиться в ([10], [11], [12]). Отметим несколько свойств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Свойство 1. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ в E.*

Свойство 2. *Если* $F(z) \in K_n(E)$, *то* $cF(z) + P_{n-1}(z) \in K_n(E)$, *где* $c \neq 0$ *и* $P_{n-1}(z)$ *— любой многочлен степени не выше* $n-1$.

Пусть L множество всех дробно–линейных функций вида

$$\omega = \omega(z;\zeta,\theta) = \frac{e^{i\theta}z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z}, \ \zeta \in E, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Свойство 3. *Если* $F(z) \in K_n(E)$, *то*

$$\left(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z\right)^{n-1} F\left(\omega(z;\zeta,\theta)\right) \in K_n(E),$$
$$\forall \omega(z;\zeta,\theta) \in L.$$

Введем нормирующий оператор по формуле

$$N_n\left[\Psi(z)\right] = \frac{n!}{\Psi^{(n)}(0)}\left(\Psi(z) - \Psi(0) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1!}\Psi^{(1)}(0)z - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}\Psi^{(n-1)}(0)z^{n-1}\right),$$

где $\Psi(z)$ голоморфная в E функция с условием $\Psi^{(n)}(0) \neq 0$.

Опираясь на свойства 1, 2 и пользуясь нормирующим оператором, можно выделить в $K_n(E)$ класс $\tilde{K}_n(E)$ функций вида

$$F(z) = z^n + a_{2,n}z^{n+1} + a_{3,n}z^{n+2} + \ldots. \qquad (5)$$

Здесь $a_{k,n}$ называется k-ым коэффициентом разложения в степенной ряд.

Свойство 4. *Класс* $\tilde{K}_n(E)$, *является компактным в себе множеством функций относительно равномерной сходимости внутри области* E.

Свойство 5. *Если* $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, *то* $f(z) = z^{1-n}F(z) \in \tilde{K}_1(E)$.

Пусть $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$ и $\omega = \omega(z;\zeta,\theta) \in L$. На классе $\tilde{K}_n(E)$ рассмотрим омега–оператор

$$\Omega_n^{\omega}\left[F(z)\right] = N_n\left[\left(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z\right)^{n-1} F\left(\omega(z;\zeta,\theta)\right)\right].$$

Этот оператор переводит функцию из класса $\tilde{K}_n(E)$ снова в функцию из этого же класса ([12]). Полагая $n = 1$ и $\theta = 0$, получим омега–оператор

$$\Omega_1^{\omega}\left[F(z)\right] = \frac{F\left(\omega(z;\zeta,0)\right) - F(\zeta)}{\left(1 - |\zeta|^2\right)F'(\zeta)},$$

часто применяемый в теории однолистных функций.

Обозначим $\Psi_n(z;\omega) = \Omega_n^{\omega}\left[F(z)\right]$ и разложим функцию $\Psi_n(z;\omega)$ в степенной ряд:

$$\Psi_n(z;\omega) = z^n + a_{2,n}(\zeta,\theta)z^{n+1} + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^{n+2} + \ldots,$$

где для коэффициентов $a_{2,n}(\zeta,\theta)$ и $a_{3,n}(\zeta,\theta)$ имеют место формулы

$$a_{2,n}(\zeta,\theta) = e^{i\theta}\left((1 - |\zeta|^2)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} - \bar{\zeta}\right). \qquad (6)$$

$$a_{3,n}(\zeta,\theta) =$$
$$= e^{2\theta i}\left(\left(1 - |\zeta|^2\right)^2 \frac{F^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)(n+1)F^{(n)}(\zeta)} - \right. \qquad (7)$$
$$\left. - 2\left(1 - |\zeta|^2\right)\frac{\bar{\zeta}F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} + \bar{\zeta}^2\right).$$

Теперь воспользуемся следующим разложением по степеням z:

$$\frac{z^n}{\Psi_n(z;\omega)} = \frac{1}{1 + a_{2,n}(\zeta,\theta)z + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^2 + \ldots} =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n}(\zeta;\theta)z^k$$

и вычислим коэффициент $b_{2,n}(\zeta;\theta)$. Легко видеть, что

$$b_{2,n}(\zeta,\theta) = a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta). \qquad (8)$$

Пользуясь формулами (4), (6), (7), получим выражение для $b_{2,n}(\zeta,\theta)$:

$$b_{2,n}(\zeta,\theta) = \frac{-(1 - |\zeta|^2)^2 e^{2i\theta}}{(n+2)(n+1)}\breve{S}_n\left[F(\zeta)\right]. \qquad (9)$$

Из (9) находим

$$\breve{S}_n\left[F(\zeta)\right] = \frac{-b_{2,n}(\zeta,\theta)(n+2)(n+1)}{e^{2i\theta}(1 - |\zeta|^2)^2}.$$

Введем связанное с оператором $\tilde{S}_n$ число

$$\sigma_n = \sup_{\Psi(z;\omega) \in \tilde{K}_n(E)} \left|b_{2,n}(\zeta,\theta)\right|.$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\sigma_n = \max_{F(z) \in \tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right|.$$

Доказательство. Согласно (8) имеем

$$\sigma_n = \sup_{\Psi_n(z;\omega) \in \tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta)\right|.$$

Если функция $F(z)$ пробегает все функции из класса $\tilde{K}_n(E)$ и $\omega(z;\zeta,\theta)$ пробегает все функции из L, то функция $\Psi_n(z;\omega)$ пробегает также все функции из класса $\tilde{K}_n(E)$ ([12]). Отсюда, с учетом компактности класса $\tilde{K}_n(E)$ (свойство 4), получим

$$\sigma_n = \sup_{\Psi_n(z;\omega) \in \tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta)\right| =$$
$$= \sup_{F(z) \in \tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| = \max_{F(z) \in \tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right|.$$

Следствие. *Если* $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$ *то*

$$\left|\breve{S}_n\left[F(z)\right]\right| \le \frac{\sigma_n (n+2)(n+1)}{\left(1-|z|^2\right)^2}. \qquad (10)$$

Так как оценка (3) является точной, то $\sigma_1 = 1$. Если в (10) взять $n = 1$, то получим (1), т.е. результат Нехари.

В силу упомянутой компактности класса $\tilde{K}_n(E)$ в нем существует функция вида (5) с наибольшим по модулю вторым коэффициентом разложения в степенной ряд. Этот второй коэффициент обозначим $\delta_{2,n}$ и назовем ограндом класса $\tilde{K}_n(E)$. Отметим несколько простейших формул.

$$\frac{z}{(1-cz)^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{-1}{1-cz} + \frac{1}{(1-cz)^2}\right), \qquad (11)$$

$$\left[\frac{1}{1-cz}; z_0, \ldots, z_n\right] = c^n \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m}, |c| \le 1, n \ge 0, \quad (12)$$

$$\left[\frac{1}{(1-cz)^2}; z_0, \ldots, z_n\right] = c^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m} \cdot \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-cz_m}, \quad (13)$$

$$|c| \le 1, n \ge 0.$$

Теорема 2. *В классе* $\tilde{K}_n(E)$, *где* $n \ge 2$, *для огранда* $\delta_{2,n}$ *справедливы оценки*

$$\frac{n+3}{n+1} \le \delta_{2,n} < 2.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n\left(1 + \frac{1-n}{1+n} z\right)}{(1-z)^2}.$$

Пользуясь формулами (11), (12), (13), легко убедить в том, что

$$\left[\Phi_n(z); z_0, \ldots, z_n\right] = \left(-1 + \frac{2}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m}.$$

Отсюда $\left[\Phi_n(z); z_0, \ldots, z_n\right] \ne 0$ при любых $z_0, \ldots, z_n \in E$. Значит, функция $\Phi_n(z)$ принадлежит классу $\tilde{K}_n(E)$. Кроме того,

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n\left(1 + \frac{1-n}{1+n} z\right)}{(1-z)^2} = z^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}.$$

Так как $\Phi_n(z) \in \tilde{K}_n(E)$, то $\delta_{2,n} \ge (n+3)/(n+1)$. Мы получили точную оценку огранда $\delta_{2,n}$ снизу. Далее, пусть $F(z) = z^n + a_{2,n} z^{n+1} + \ldots$ произвольно взятая функция из класса $\tilde{K}_n(E)$. Тогда по свойству 5 функция

$$f(z) = z^{1-n} F(z) = z + a_{2,n} z^2 + \ldots$$

принадлежит классу $\tilde{K}_1(E)$, т. е. является однолистной и нормированной в E. По теореме Л. де Бранжа о коэффициентах однолистных функций получим оценку $|a_{2,n}| \le 2$. Отсюда следует, что $\delta_{2,n} \le 2$. Пользуясь формулами (11), (12), (13), убедимся в том, что функция

$$\Psi(z) = \frac{z^n}{\left(1 - e^{i\theta} z\right)^2} = z^n + e^{i\theta} 2 z^{n+1} + \ldots$$

не принадлежит классу $\tilde{K}_n(E)$. Это означает, что $\delta_{2,n} < 2$.

Теорема 3. *Для* σ_n *справедливы оценки*

$$\frac{4}{(n+1)^2} \le \frac{\delta_{2,n}^2 - 1}{n+2} \le \sigma_n \le \frac{\delta_{2,n}^2}{n+2} + \frac{8\delta_{2,n} \cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right)}{(n+2)\left(4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right) - 1\right)}. \quad (14)$$

Доказательство. Неравенство

$$\frac{4}{(n+1)^2} \le \frac{\delta_n^2 - 1}{n+2}$$

сразу следует из теоремы 2. Как было сказано выше, в классе $\tilde{K}_n(E)$ существует функция $\Upsilon(z) = z^n + c_{2,n} z^{n+1} + c_{3,n} z^{n+2} + \ldots$, у которой $c_{2,n} = \delta_{2,n}$. Тогда, пользуясь методом вариаций, получим ([12])

$$c_{3,n} = \frac{(n+1)\delta_{2,n}^2 + 1}{n+2}.$$

Следовательно,

$$\delta_{2,n}^2 - c_{3,n} = \frac{\delta_{2,n}^2 - 1}{n+2}.$$

Так как

$$\left|\delta_{2,n}^2 - c_{3,n}\right| \le \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right|,$$

то по теореме 1 имеем

$$\frac{\delta_{2,n}^2 - 1}{n+2} \le \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| = \sigma_n$$

и левая часть (14) доказана. Далее, пусть функция $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$. Тогда

$$\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)F^{(n)}(z)} = a_{2,n} + \left((n+2)a_{3,n} - (n+1)a_{2,n}^2\right)z + \ldots .$$

Отсюда

$$(n+2)a_{3,n} - (n+1)a_{2,n}^2 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F^{(n+1)}\left(re^{i\theta}\right)d\theta}{(n+1)F^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)re^{i\theta}}, \; 0 < r < 1.$$

Поэтому

$$\left|a_{3,n} - \frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2\right| r \le \\ \le \frac{1}{2\pi(n+2)}\int_0^{2\pi} \frac{\left|F^{(n+1)}\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta}{(n+1)\left|F^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)\right|}, \; 0 < r < 1 \qquad (15)$$

Так как функция $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, то функция ([12])

$$\Psi_n(z;\omega) = z^n + a_{2,n}(\zeta,\theta)z^{n+1} + \\ + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^{n+2} + \ldots \in \tilde{K}_n(E)$$

при любом $\omega = \omega(z;\zeta,\theta) \in L$. При этом для коэффициента $a_{2,n}(\zeta,\theta)$ справедлива формула (6). Опираясь на свойство огранда $\delta_{2,n}$, получим

$$\left|a_{2,n}(\zeta,\theta)\right| = \left|\left(1-|\zeta|^2\right)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} - \bar{\zeta}\right| \le \delta_{2,n}, \\ \forall \zeta \in E, \forall \theta \in [0,2\pi).$$

Отсюда

$$\left|\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)}\right| \le \frac{\delta_{2,n} + r}{1-r^2}, \; \forall |\zeta| = r. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следуют неравенства

$$\left|\frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| \le \\ \le \frac{1}{2\pi(n+2)r}\int_0^{2\pi} \frac{\left|F^{(n+1)}(re^{i\theta})\right|d\theta}{(n+1)\left|F^{(n)}(re^{i\theta})\right|} \le \\ \le \frac{\delta_{2,n} + r}{(n+2)r(1-r^2)}, \; 0 < r < 1.$$

Значит,

$$\left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| \le \frac{\left|a_{2,n}^2\right|}{n+2} + \left|\frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| \le \\ \le \frac{\delta_{2,n}^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\frac{\delta_{2,n} + r}{r\left(1-r^2\right)}, \; 0 < r < 1. \qquad (17)$$

Но левая часть в (17) не зависит от r, взятого из интервала $(0, 1)$. Поэтому

$$\left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| \le \frac{\left|a_{2,n}^2\right|}{n+2} + \left|a_{3,n} - \frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2\right| \le \\ \le \frac{\delta_{2,n}^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\min_{0<r<1}\frac{\delta_{2,n} + r}{r\left(1-r^2\right)}. \qquad (18)$$

Так как неравенства (18) справедливы для любой функции из класса $\tilde{K}_n(E)$, то, учитывая теорему 1, получим

$$\max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)}\left|a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| = \sigma_n \le \\ \le \frac{\delta_{2,n}^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\min_{0<r<1}\frac{\delta_{2,n} + r}{r\left(1-r^2\right)}.$$

Нетрудно установить, что

$$\min_{0<r<1}\frac{\delta_{2,n} + r}{r\left(1-r^2\right)} = \\ = \frac{8\delta_{2,n}\cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right)}{\left(4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_{2,n}}\right) - 1\right)}.$$

Таким образом, мы доказали и правую часть (14). Уместно сделать следующее

Замечание 1. Для коэффициентов $b_{2,n} = (n+3)/(n+1)$ и $b_{3,n} = (n+5)/(n+1)$ функции $\Phi_n(z) = z^n + b_{2,n}z^{n+1} + b_{3,n}z^{n+2} + \ldots$ справедливо равенство

$$b_{2,n}^2 - b_{3,n} = \frac{4}{(n+1)^2}.$$

Замечание 2. Точные значения величин $\delta_{2,n}$ и σ_n при $n > 1$ нам пока не удалось найти.

Гипотеза. (Э. Г. Кирьяцкий). *Если* $n > 1$, *то*

$$\delta_{2,n} = \frac{n+3}{n+1}, \; \sigma_n = \frac{4}{(n+1)^2}.$$

Если $n = 1$, то равенства $\delta_{2,1} = 2$ и $\sigma_1 = 1$ хорошо известны ([2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И. А.* Теория функций комплексного переменного. // Томск, 2002, с. 399—430.

2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного // М.: Наука, 1965, 628 с.

3. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. // Томский госуниверситет. Томск, 2001, 220 с.

4. *Nehari Z.* The schwarzian derivative and univalent functions. // Bull. Amer. Math. Soc., (1949), 55, № 5, 545—551.

5. *Nehari Z.* Some criteria of univalence. //Bull. Amer. Math. Soc., (1954), 55, № 6, 700—704.

6. *Hille E.* Remarks on a paper by Zeev Nehari. // Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, № 6, 552—553.

7. *Покорный В.* О некоторых достаточных условиях однолистности. // Докл. АН СССР, (1951), 79, 743—746.

8. *London D.* On the zeros of the solutions of $w''(z)+p(z)w(z)=0$. Pacific J. Math., 12 (1962), 979—994.

9. Александров И. А. Область значений функционала $\mathrm{I}=\{F;z_0\}$, на классе S. // Труды Томского государственного университета. (1961), 155, 56—60.

10. *Кирьяцкий Э. Г.* О функциях, *n*-ая разделенная разность которых не равна нулю. // Лит. мат. сб., 1961, т. 1, № 1—2, С. 109—114.

11. *Кирьяцкий Э. Г.* Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью. // Лит. мат. сб., 1972, Т. 12, № 1. С. 129—137.

12. *Kirjackis E.* Some variational formulas in the class $\tilde{K}_n(E)$ and their applications. // Demonstratio mathematica, vol. XXXI, № 2, 1998, С. 265—274.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса (Литва), тел. +370 5 2744827, e-mail: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt

Kiriyatzkii Eduard G. — Habilitated Doktor, Professor, Lithuania, Vilnius Gediminas Technical University, tel. +370 5 2744827, e–mail: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt