УДК 517.5; 514.74

ПРИМЕРЫ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ИНДЕФИНИТНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^3$

М. С. Данилов

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 19.01.2010 г.

Аннотация. Статья посвящена описанию аффинно-однородных индефинитных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. В работе обсуждаются три типа вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, имеющих индефинитную форму Леви. Для каждого из этих типов построены примеры семейств аффинно-однородных поверхностей.

Ключевые слова: комплексное пространство, однородное подмногообразие, векторное поле, алгебра Ли, индефинитная поверхность, каноническое уравнение

Abstract. This article is devoted to the describing of the affinely homogeneous indefinite real hypersurfaces of 3-dimensional complex space. In the work 3 types of real hypersurfaces of the space $\mathbb{C}^3$, , with indefinite Levi's form are described. For every such type the examples of families of affinely homogeneous surfaces are constructed.

Keywords: complex space, homogeneous submanifold, vector field, Lie algebra, indefinite surface, canonical equation

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена изучению аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей, вложенных в 3-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^3$.

Напомним понятие (локальной) однородности, на которое мы опираемся ниже. Поверхность $M \subset \mathbb{C}^3$ мы называем однородной вблизи фиксированной точки $P \in M$, если для любой близкой к P точки $P_1 \in M$ найдется аффинное преобразование пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющее поверхность M и переводящее точку P в P_1.

Мы будем пользоваться тем, что на аффинно-однородной (вблизи т. P) поверхности M имеется большое семейство линейных векторных полей вида

$$Z = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + p)\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ +(a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 + s)\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ +(a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3 + q)\frac{\partial}{\partial z_3}, \qquad (1)$$

позволяющих смещаться по поверхности из точки P вдоль любого направления, касательного к M.

Пусть $\Phi(z, \overline{z}, u, v)$ — вещественнозначная аналитическая определяющая функция вещественной гиперповерхности (здесь $z = (z_1, z_2)$; $\overline{z} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2); u = Rez_3; v = Imz_3$). Тогда в неособой точке поверхности тейлоровское разложение этой функции можно привести аффинными преобразованиями к виду

$$\Phi = -v + H(z, \overline{z}) + Q(z) + \overline{Q}(z) + \ldots \qquad (2)$$

Здесь $H(z, \overline{z})$ — эрмитова, $Q(z)$ — квадратичная формы, а многоточие означает слагаемые вида $z_1^k z_2^l u^{2m}$, где $k + l + 2m \geq 3$.

Аффинно-однородные гиперповерхности, у которых форма H положительно определена (строго псевдо-выпуклые поверхности), изучались в работах [1]—[4]. В большой работе [5] описаны голоморфно-однородные гиперповерхности с вырожденной формой H; при этом многие из таких поверхностей оказываются аффинно-однородными. Нас везде далее будут интересовать только *индефинитные* поверхности, т.е. поверхности, для которых эрмитова форма H из уравнения (1) является знаконеопределенной невырожденной формой.

Основой для построения примеров однородных многообразий служит канонический вид уравнения индефинитной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$. При этом используется техника работ [3]—[4], относящихся к случаю положительно определенной формы Леви, но пригодная также и к знаконеопределенной форме Леви и связанная с продолжением матричных алгебр Ли.

Часть результатов настоящей статьи анонсирована в [6] — [7].

§ 1. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИНДЕФИНИТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим пару форм (H,Q) из уравнения (2). Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Пусть $H(z,\overline{z})$ и $Q(z)$ — формы, описанные выше. Линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^2$ пара (H,Q) может быть приведена к виду, в котором

1)$H = H(z,\overline{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$,

2)$Q = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ имеет вещественные коэффицинты.

Предложение 2. Пусть дана пара форм $(H,Q_{\mathbb{R}})$, где $H = H(z,\overline{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ — эрмитова знаконеопределенная форма, $Q_{\mathbb{R}}(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ — ненулевая квадратичная форма с вещественными коэффициентами A,B,C. С помощью линейного преобразования, сохраняющего H, форма $Q_{\mathbb{R}}$ приводится к одному из видов:

1) При $|A+C| > |B|$, $Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$; (3)

2) При $|A+C| = |B|, Q_{\mathbb{R}}(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; (4)

3) При $|A+C| < |B|$, $Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 > 0$. (5)

Кратко прокомментируем доказательства этих утверждений. Например, можно перейти от формы $H(z,\overline{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ к эквивалентной ей форме $H_1(z,\overline{z}) = i(z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2)$. При этом группа преобразований $SU(1,1)$, сохраняющих $H(z,\overline{z})$, заменится на группу вещественнозначных матриц $SL(2,\mathbb{R})$. Преобразованиями из этой «вещественной» группы проще достигается требуемый предложением 1 вещественный вид формы $Q(z)$.

Доказательство второго предложения получается за счет гиперболического преобразования (с подходящим значением φ)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix},$$

сохраняющего эрмитову форму H и переводящего вещественные коэффициенты квадратичной формы $Q_{\mathbb{R}}$ в требуемое положение.

Объединяя предложения 1 — 2, получаем следующую теорему.

Теорема 1. (О каноническом виде пары форм) *Пусть $H = H(z,\overline{z})$ — знаконеопределенная эрмитова форма от двух комплексных переменных, $Q = Q(z)$ — ненулевая квадратичная форма. Линейным преобразованием пространства $\mathbb{C}^2$ пара (H,Q) может быть приведена к виду, в котором:*

а) $H = H(z,\overline{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$,

б) $Q = Q(z)$ задается одной из формул (3)—(5).

Применим предыдущие обсуждения, связанные с теоремой 1, к уравнению (2) индефинитной поверхности. При этом везде далее будем полагать эрмитову форму $H(z,\overline{z})$ из (2) равной $|z_1|^2 - |z_2|^2$.

Теорема 2. *Пусть M — вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность пространства C^3, заданная уравнением*

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (Q(z) + \overline{Q(z)}) + \sum_{k\geq 3} F_k(z,\overline{z},u). \quad (6)$$

Аффинным преобразованием пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющим начало координат и вид уравнения (6), форму $Q(z)$ можно привести к одному и только одному из следующих типов:

$$Q(z) \equiv 0; \quad (7)$$

$$Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2, \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0; \quad (8)$$

$$Q(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2), \varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0 \text{ или } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad (9)$$

$$Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2, \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 > 0. \quad (10)$$

Замечание 1. Рассмотрим для сравнения строго псевдо-выпуклый (СПВ)-случай, т.е. случай гиперповерхностей, у которых форма Леви H из уравнения (2) сводится к сумме квадратов $|z_1|^2 + |z_2|^2$. Квадратичная форма $Q(z)$ из уравнения такой поверхности всегда приводится [1] к единственному типу, аналогичному (8).

С учетом теоремы 1 для доказательства теоремы 2 нужно убедиться в однозначности определения по заданной поверхности вида (6) с ненулевой формой $Q(z)$:

i) типа формы $Q(z)$ из трех возможных типов (8) — (10);

ii) вещественных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, соответствующих поверхности с ненулевой квадратичной формой любого из 3-х канонических типов.

Пусть поверхность M, заданная уравнением (6), переходит под действием голоморфного (и, в частности, линейного) преобразования в аналогичное уравнение

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (Q_1(z) + \overline{Q_1(z)}) + \\ + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \overline{z}, u).$$

В силу обсуждений из работ [8]—[9] в такой ситуации существует матрица $U \in SU(1,1)$, т. что выполняется одно из двух условий:

$$\text{а) } Q(Uz) = e^{i\phi} Q_1(z) \text{ или} \\ \text{б) } Q(Uz) = e^{i\phi} Q_1(Jz), \tag{11}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица, переставляющая переменные z_1, z_2, $\phi \in [0, 2\pi)$.

Имеют место два следующих утверждения.

Предложение 3. *Любое из условий а) или б) в (11) влечет совпадение типов квадратичных форм* $Q(z)$ *и* $Q_1(z)$.

Предложение 4. *В рамках каждого из трех типов квадратичных форм (8) — (10) любое из условий а) или б) в (11) влечет совпадение пар коэффициентов* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, *соответствующих формам* $Q(z)$ *и* $Q_1(z)$.

Рассмотрим один фрагмент доказательства предложения 3 (остальные его фрагменты и предложение 4 доказываются подобным же образом).

Пусть $Q(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ — квадратичная форма, а $U \in SU(1,1)$, т.е.

$$U = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \overline{\eta} & \overline{\xi} \end{pmatrix}, \ \xi|^2 - |\eta|^2 = 1.$$

Тогда

$$Q(Uz) = A(\xi z_1 + \eta z_2)^2 + B(\xi z_1 + \eta z_2) \cdot \\ \cdot (\overline{\eta} z_1 + \overline{\xi} z_2) + C(\overline{\eta} z_1 + \overline{\xi} z_2)^2 = \\ = (A\xi^2 + B\xi\overline{\eta} + C\overline{\eta}^2) z_1^2 + \\ + (2A\xi\eta + B(|\xi|^2 + |\eta|^2) + 2C\overline{\xi}\overline{\eta}) z_1 z_2 + \\ + (A\eta^2 + B\overline{\xi}\eta + C\overline{\xi}^2) z_2^2.$$

Обозначим через

$$A^* = A\xi^2 + B\xi\overline{\eta} + C\overline{\eta}^2, \\ B^* = 2A\xi\eta + B(|\xi|^2 + |\eta|^2) + 2C\overline{\xi}\overline{\eta}, \\ C^* = A\eta^2 + B\overline{\xi}\eta + C\overline{\xi}^2$$

коэффициенты новой квадратичной формы $Q(Uz)$.

Докажем, например, что условием а) не могут быть связаны каноническая форма $Q(z)$ вида (10) и каноническая форма $Q_1(z)$ вида (8).

Предположим, что для таких форм выполнено условие а), т.е. $Q(Uz) = e^{i\phi} Q_1(z)$. Тогда, считая, что

$$Q_1(z) = \varepsilon_1^* z_1^2 + \varepsilon_2^* z_2^2, \\ Q(z) = \varepsilon_1 (z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2,$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1^* e^{i\phi} = \varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \xi\overline{\eta} - \varepsilon_1 \overline{\eta}^2, \\ 0 = 2\varepsilon_1 \xi\eta + \varepsilon_2 (|\xi|^2 + |\eta|^2) - 2\varepsilon_1 \overline{\xi}\overline{\eta}, \\ \varepsilon_2^* e^{i\phi} = \varepsilon_1 \eta^2 + \varepsilon_2 \overline{\xi}\eta - \varepsilon_1 \overline{\xi}^2. \end{cases} \tag{12}$$

Второе уравнение этой системы равносильно условию

$$2\varepsilon_1 (\xi\eta - \overline{\xi}\overline{\eta}) = -\varepsilon_2 (|\xi|^2 + |\eta|^2). \tag{13}$$

Слева в равенстве (13) стоит чисто мнимое число, а справа — вещественное, следовательно обе части обязаны равняться нулю. Т.к. $\varepsilon_2 > 0$ (в силу условия (10)) и $(|\xi|^2 + |\eta|^2 > 0)$ (для невырожденной матрицы U), то правая часть (12) не равна нулю. Противоречие доказывает невозможность связки а) для пары обозначенных форм.

Отличительной чертой рассмотрения условия б) от приведенного выше обсуждения является перестановка правых частей первого и третьего уравнений системы (12), не влияющая на ход доказательства.

Определение 1. Уравнение (6), в котором квадратичная форма $Q(z)$ удовлетворяет одному из условий (7)—(10), будем называть *каноническим уравнением индефинитной поверхности.*

Замечание 2. В дальнейшем будем называть индефинитные поверхности, канонические уравнения которых содержат квадратичную форму $Q(z)$ вида (8), поверхностями эллиптического типа. В случаях форм (9) или (10) будем говорить, соответственно, о поверхностях параболического или гиперболического типов.

§ 2. ПРОДОЛЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ В ИНДЕФИНИТНОМ СЛУЧАЕ

Линейные векторные поля вида (1) в пространстве $\mathbb{C}^3$, касательные к аффинно-однородной вещественной гиперповерхности M, образуют алгебру Ли. Элементы этой алгебры удобно представлять в матричной форме

$$Z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

При этом скобке векторных полей соответствует скобка (коммутатор) матриц

$$[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1,$$

а размерность алгебры сохраняется.

В связи с однородностью 5-мерных гиперповерхностей нас в первую очередь интересуют 5-мерные алгебры. По аналогии с работами [1]—[4] мы будем рассматривать специальные матричные алгебры вида

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad (15)$$

удовлетворяющие некоторым дополнительным ограничениям на элементы составляющих их матриц. Часть таких ограничений получается из основного соотношения

$$Re\{Z(\Phi)\}_{|M} = 0. \qquad (16)$$

Пусть, например, индефинитная поверхность M задана каноническим уравнением

$$v = F_2(z, \overline{z}) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \overline{z}, u),$$

где $F_2(z, \overline{z}) = H(z, \overline{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)}$.

Отделяя в тождестве (16) компоненты младших весов, получим:

$$\text{Вес } 0: Re(\frac{i}{2} q) = 0; \qquad (17)$$

Вес 1:

$$\mathrm{Re}(p\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + s\frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \frac{i}{2}(az_1 + bz_2 + c(u + iF)) = 0. \qquad (18)$$

Первое из этих ограничений, т.е (17), означает, что для поверхности M, заданной каноническим уравнением, коэфициент q из представления (14) или (15) произвольного векторного поля на M является вещественным числом.

Можно показать за счет рассмотрения следующих компонент, что коэффициент c в матрицах вида (15) также является вещественным.

При этом вид соотношения (18) зависит от типа квадратичной формы $Q(z)$ из канонического уравнения обсуждаемой поверхности.

Предложение 5. Пусть вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность M задана каноническим уравнением (6) и $Q(z) \neq 0$. В зависимости от типа $Q(z)$ коэффициенты линейных векторных полей на M вида (15) подчиняются ограничениям:

эллиптический тип $Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2$,

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0,\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\overline{p} + 2\varepsilon_1 p\right) \\ b = 2i\left(-\overline{s} + 2\varepsilon_2 s\right) \end{cases} \qquad (19)$$

параболический тип $Q(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2)$,

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0 \text{ или } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\overline{p} + 2\varepsilon_1 p + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)s\right) \\ b = 2i\left(-\overline{s} + 2\varepsilon_2 s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p\right) \end{cases} \qquad (20)$$

гиперболический тип $Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2$,

$$\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 > 0:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\overline{p} + 2\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 s\right) \\ b = 2i\left(-\overline{s} - 2\varepsilon_1 s + \varepsilon_2 p\right) \end{cases} \qquad (21)$$

Перепишем соотношения (19)—(21) в общем виде

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2i\left(R_1\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} + R_2\begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{s} \end{pmatrix}\right). \qquad (22)$$

Здесь $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — матрица эрмитовой формы $|z_1|^2 - |z_2|^2$, общая для всех 3-х случаев; R_1 — матрица, связанная с квадратичной формой и зависящая от типа поверхности. В частности, в эллиптическом случае матрица R_1 имеет вид $\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}$, в параболическом — $\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}$, а для гиперболических поверхностей — $\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем будем называть формулы (19) — (21) или (22) L-связкой, имея в виду, что векторы $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ связаны линейным в вещественном смысле соотношением $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$.

Замечание 3. Для СПВ—гиперповерхностей аналогом различных выписанных в (19) — (21) условий на коэффициенты a, b, p, s являются единые соотношения

$$a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p\right),\ b = 2i\left(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s\right). \qquad (23)$$

Будем еще считать, что каждая из рассматриваемых алгебр (15) содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

соответствующую векторному полю $\partial / \partial z_3$.

Геометрически это требование означает *жесткость* изучаемых поверхностей. Уравнение вида (6) жесткой поверхности не зависит от переменной $u = Re w$.

Построение алгебр, соответствующих однородным поверхностям — это трудоемкая задача. В работах [3]—[4] разработан алгоритм решения такой задачи для случая СПВ-гиперповерхностей за счет продолжения матричных алгебр. Техника названных работ оказывается применимой и для построения алгебр Ли, связанных с индефинитными однородными гиперповерхностями.

В основе алгоритма лежит замечание о том, что левые верхние 2х2-блоки матриц из алгебры (15) сами образуют алгебру Ли. При этом (см. [10]) только одна (с точностью до матричного подобия) 3-мерная вещественная подалгебра $M(2, \mathbb{C})$ продолжима в СПВ-случае. Это алгебра с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Использование этой алгебры позволило построить большое количество подалгебр $M(4, C)$, связанных с однородностью, и в индефинитном случае.

§ 3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА ВОСЬМИ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим жесткую поверхность, заданную каноническим уравнением (6)

$$v = (|\, z_1\,|^2 - |\, z_2\,|^2) + (Q(z) + \overline{Q(z)}) + \sum_{k\geq 3} F_k(z, \bar{z}).$$

Будем считать что эта поверхность аффинно-однородна, а алгебра Ли векторных полей на ней имеет размерность 5 и вид (15).

Если линейное пространство h, состоящее из квадратных матриц, образует алгебру Ли, то оно является замкнутым относительно операции антикоммутативного умножения (скобки)

$$[A, B] = AB - BA.$$

Для базисных матриц E_k $(k = 1...5)$ пятимерной алгебры $h = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \rangle$ вида (15) достаточно рассмотреть всего 10 таких скобок, допускающих представления в виде линейных комбинаций

$$[E_k, E_l] = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 + \alpha_5 E_5. \ (26)$$

Т.к. одна из матриц, допустим E_5, имеет вид (24), то

$$[E_k, E_5] = c_k E_5 (k = 1, 2, 3, 4), \qquad (27)$$

и никаких ограничений на коэффициенты базисных матриц соотношения (27) не содержат. Значит, нам остается рассмотреть 6 матричных скобок вместо 10.

Для удобства в каждой матрице алгебры (15) выделим ее левый верхний (2×2) блок и назовем его e-частью. Так же выделим в ней $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-часть и (a, b)-часть.

Предлагаемая в [3]—[4] схема изучения задачи о продолжениях матричных алгебр сводится к последовательному рассмотрению отдельных частей шести матричных скобок. При этом возникают отдельные подсистемы большой системы нелинейных уравнений, отвечающие e-, $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a, b)-частям скобок (26).

Замечание 4. При умножении двух матриц вида (15) их e-части перемножаются отдельно, независимо от остальных элементов этих матриц, так что

$$[E_k, E_l]_e = [e_k, e_l]. \qquad (28)$$

Подсистема, отвечающая e-части, позволяет получить коэффициенты разложения каждой из шести рассматриваемых скобок по первым 4-м базисным матрицам E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры h.

Для рассмотрения $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$— и (a,b)—частей скобок (26) мы будем использовать два следующих технических факта.

Предложение 6.

$$[E_k, E_l]_{(p,s)} = e_k \begin{pmatrix} p_l \\ s_l \end{pmatrix} - e_l \begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$[E_k, E_l]_{(a,b)} = (e_l - c_l)^T \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} - (e_k - c_k)^T \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Замечание 5. Т.к. вещественная размерность алгебры h равна 5 и матрица E_5 имеет вид (24), то векторы $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ $(k = 1,2,3,4)$, — линейно независимы над R.

Выделяя в 6 скобках (26) $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-части, мы имеем 6 векторных уравнений; 6 аналогичных векторных уравнений возникает в $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$-частях этих скобок. Следовательно, подсистемы, связанные с $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$- и (a,b)-частями скобок (26), содержат по двенадцать скалярных уравнений относительно неизвестных коэффициентов p_k, s_k ($\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-часть) и a_k, b_k, c_k ((a,b)-часть) базисных матриц алгебры h. Наиболее существенной частью изучения вопроса о продолжаемости конкретных алгебр является рассмотрение восьми скалярных уравнений, отвечающих L-связкам (19)—(21) или (22).

Далее нам будет удобно работать не с исходной алгеброй $h \subset M(2,\mathbb{C})$ и алгеброй $g \subset M(2,\mathbb{C})$ ее 2×2 блоков, а с их «каноническим» видом.

Канонической формой «маломерной» подалгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ мы будем называть алгебру из списка [11], к которой g приводится за счет матричного подобия. Изучаемые нами подалгебры $h \subset M(4,\mathbb{C})$, содержащие 2×2 блоки, при этом переходят в подобные им алгебры. Матрицу C, осуществляющую подобие в случае $M(4,\mathbb{C})$, будем записывать в виде

$$C = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & 0 & 0 \\ w_3 & w_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$ — матрица, приводящая подалгебру $M(2,\mathbb{C})$ к каноническому виду из [11].

При этом «канонические» алгебры $\hat{h} \subset M(4,\mathbb{C})$ и $\hat{g} \subset M(2,\mathbb{C})$ будут иметь вид

$$\hat{h} = C^{-1}hC,\ \hat{g} = W^{-1}gW$$

Новые, «канонические» векторы $\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}$ связаны с исходными векторами $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ формулами $(k = 1,2,3,4)$

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = W^T \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при таком переходе соотношения (28) — (30) дословно сохраняются, а изменяется лишь L—связка. Теперь уравнение (22) естественно записывать в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}, \tag{31}$$

учитывая, что входящие в него матрицы R_1 и R_2 изменяются по формулам

$$\hat{R}_1 = W^T R_1 W,\ \hat{R}_2 = W^T R_2 \overline{W}.$$

Но, чтобы не загромождать обозначения, будем использовать их в начальном виде, опуская при записи знак ˆ. Например, для случая поверхности эллиптического типа измененная матрица R_1 примет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2(\varepsilon_1 w_1^2 + \varepsilon_2 w_3^2) & 2(\varepsilon_1 w_1 w_2 + \varepsilon_2 w_3 w_4) \\ 2(\varepsilon_1 w_1 w_2 + \varepsilon_2 w_3 w_4) & 2(\varepsilon_1 w_2^2 + \varepsilon_2 w_4^2) \end{pmatrix}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения для элементов (измененных) матриц R_1 и R_2:

$$R_1 = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix};\ R_2 = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Напомним, что наши обсуждения связаны с алгеброй (25). В развернутой форме соотношения (28)—(30) для продолжения этой алгебры полностью совпадают с аналогичными формулами, полученными в [3] (несмотря на то, что в [3] рассматривался СПВ-случай).

По этой причине в e-части мы имеем следующие соотношения

$$\begin{gathered}[e_1,e_2]=\frac{1}{2}e_2,\ [e_2,e_3]=\frac{1}{2}e_3,\ [e_3,e_1]=0,\\ [e_1,e_4]=0,\ [e_1,e_4]=0,\ [e_1,e_4]=0;\end{gathered} \qquad (33)$$

в $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$—части

$$p_2=2s_1,\ p_3=2is_1,\ s_3=is_2+p_4,\ s_4=0, \quad (34)$$

и в (a,b)—части

$$b_2=-2a_1,\ b_3=-2ia_1,\ a_3=ia_2-b_4,\ a_4=0. \quad (35)$$

Различия начинаются при рассмотрении измененных L—связок, т.к. вместо СПВ—соотношения (23) используется одно из соотношений (19) — (21), отвечающих индефинитному случаю.

Тогда, рассматривая уравнение (31) с условиями (34) — (35), получим систему

$$\begin{cases} a_1=2i\left(M_1p_1+M_2s_1+N_1\overline{p}_1+N_2\overline{s}_1\right)\\ b_1=2i\left(M_3p_1+M_4s_1+N_3\overline{p}_1+N_4\overline{s}_1\right)\\ a_2=2i\left(M_1\left(2s_1\right)+M_2s_2+N_1\left(2\overline{s}_1\right)+N_2\overline{s}_2\right)\\ -2a_1=2i\left(M_3\left(2s_1\right)+M_4s_2+N_3\left(2\overline{s}_1\right)+N_4\overline{s}_2\right)\\ ia_1-b_4=2i\left(M_1\left(2is_1\right)+M_2\left(is_2+p_4\right)+\right.\\ \quad\left.+N_1\left(-2i\overline{s}_1\right)+N_2\left(-i\overline{s}_2+\overline{p}_4\right)\right)\\ -2ia_1=2i\left(M_3\left(2is_1\right)+M_4\left(is_2+p_4\right)+\right.\\ \quad\left.+N_3\left(-2i\overline{s}_1\right)+N_4\left(-i\overline{s}_2+\overline{p}_4\right)\right)\\ 0=2i\left(M_1p_4+N_1\overline{p}_4\right)\\ b_4=2i\left(M_3p_4+N_3\overline{p}_4\right)\end{cases} \quad (36)$$

Формально говоря, для полного изучения вопроса о продолжаемости алгебры мы должны рассмотреть в (36) все возможные невырожденные матрицы W. Однако можно существенно уменьшить количество рассмотрений за счет следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $W=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$ невырожденная матрица. Тогда W допускает представление в виде

a) При $w_1\neq 0;\ W=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (37)

b) При $w_1=0;\ W=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (38)

где $a,b,c,t\in\mathbb{C}$.

Эта лемма позволяет рассматривать в качестве W лишь матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \quad (39)$$

т.к. второй сомножитель $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ в разложениях (37)—(38) сохраняет алгебру (25) неизменной.

Замечание 6. Можно показать, что решениям системы (36) с матрицей $W=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ соответствуют лишь линейно зависимые векторы $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$.

Тогда завершение описания однородных поверхностей эллиптического типа мы получим, рассматривая в качестве W первую из матриц (39).

Теорема 3. *Существует не более чем 3-параметрическое семейство алгебр вида (15), соответствующих аффинно-однородным индефинитным жестким гиперповерхностям эллиптического типа.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим систему (36). На первом шаге можно освободиться от переменных вида a_k, b_k, выразив их из 1-го, 2-го, 3-го и 8-го уравнений этой системы. Тогда число уравнений в системе сократится до 4-х. При этом новая система будет однородной относительно параметров p_k, s_k. Далее, выражая из полученной системы сначала s_2, а потом s_1, приходим к системе

$$\begin{cases} M_1p_4+N_1\overline{p}_4=0\\ 4(M_1p_1+N_1\overline{p}_1)-iD\overline{p}_4=0\end{cases} \quad (40)$$

где $M_1=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2t^2,\ N_1=1-|t|^2$ — элементы соответствующих матриц (31), а $D=(4\varepsilon_2^2-1)(1-|t|^2)$. Напомним, что из условия независимости векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ следует, что $p_4\neq 0$, а значит, можно считать, что $p_4=e^{i\psi}\in S^1$ (более того, $\psi\in[0;\pi)$).

За счет рассмотрения вместо матрицы E_1 ее исправленного варианта $E_1^*=E_1+\beta E_4$ (с подходящим β) можно считать, что p_1 ортогонален как вектор в комплексной плоскости вектору p_4.

Тогда при условии

$$|M_1|=|N_1| \quad (41)$$

решение системы (40) распадается на 2 части.

a) $N_1 = 0$ и тогда $M_1 = D = 0, p_4 = e^{i\psi}, p_1 = ire^{i\psi}$, где $\psi \in [0;\pi)$, $r \in \mathbb{R}$ — произвольные. Условия $N_1 = 0$ и $M_1 = D = 0$ выполняются только при $t = \pm i$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$;

$$\text{b) } N_1 \neq 0, p_4 = e^{i\psi}, p_1 = -i\frac{D}{8N_1}e^{i\psi},$$

где $-\dfrac{\overline{M_1}}{N_1} = e^{2i\psi}$.

Таким образом мы получим решение системы (36), зависящее от 3 вещественных параметров $\psi, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Теорему 3 можно считать доказанной.

Замечание 7. Аналогичное утверждение о 3-мерном семействе алгебр и соответствующих им однородных поверхностей верно и для гиперболического случая.

§ 4. ПРИМЕРЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ АЛГЕБР ЛИ В ИНДЕФИНИТНОМ СЛУЧАЕ

В этом параграфе мы приведем примеры «явных» уравнений аффинно-однородных индефинитных поверхностей всех трех введенных выше типов. При этом в эллиптическом случае приводятся примеры двух семейств: одно из них зависит от 2-х вещественных параметров, другое — однопараметрическое; в параболическом случае построено однопараметрическое семейство однородных поверхностей. Уравнения поверхностей удается предъявить за счет интегрирования матричных алгебр, способ получения которых описан в предыдущих разделах статьи.

Процедура такого интегрирования является достаточно трудоемкой. Отслеживание зависимости результирующих уравнений получаемых поверхностей от всех имеющихся параметров требует чрезмерно больших усилий. Поэтому вместо «больших» 3-параметрических семейств, которые существуют в силу теоремы 3, мы приводим здесь их подсемейства.

Первый пример индефинитной аффинно-однородной поверхности, полученный автором за счет интегрирования «точечной» матричной алгебры, приведен в [7].

Отметим еще, что интегрирование 2-параметрической совокупности алгебр, отвечающих однородным поверхностям гиперболического типа и получаемых по описанной в статье схеме, проведено В. К. Евченко (см. также [12]).

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП

Описание, приведенное выше, позволяет получить семейство алгебр, отвечающее однородным поверхностям эллиптического типа и имеющее базисы следующего вида:

$$\begin{gathered}
E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (4\varepsilon_2^2 - 1)/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & t(2\varepsilon_2 + 1)/4 \\ a_1 & b_1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & t(2\varepsilon_2 + 1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & -(t^2+1)(2\varepsilon_2 + 1)/2 \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & it(2\varepsilon_2 + 1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & i(1 - 2\varepsilon_2 t^2 - t^2 - 2\varepsilon_2)/2 \\ ia_2 - b_4 & -2ia_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{42}$$

где

$$\begin{gathered}
a_1 = i(4\varepsilon_2^2 - 1)/2, \\
a_2 = it(3 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2 t^2 - t^2)(2\varepsilon_2 + 1), \\
b_1 = it(2\varepsilon_2 - 1)(2\varepsilon_2 + 1)^2/4, \\
b_4 = -2t(2\varepsilon_2 + 1).
\end{gathered}$$

В зависимости от того, выполняется или нет равенство $t^2 = \dfrac{1 - 2e_2}{1 + 2e_2}$, интегрирование таких алгебр распадается на два случая. При этом, результатом интегрирования является алгебраическая поверхность одного из двух видов. При $t^2 \neq \dfrac{1 - 2e_2}{1 + 2e_2}$ это поверхность 6-го порядка, имеющая в вещественной форме уравнение ($A_1, \ldots, A_6$ и $C_0, \ldots, C_4$ — некоторые коэффициенты, зависящие от 2-х вещественных параметров):

$$\begin{gathered}
v = A_1 x_1 x_2 + A_2 y_1 y_2 + A_3 x_2^2 + A_4 y_2^2 + \\
+ x_2(A_5 x_2^2 + A_6 y_2^2) + \\
+ (C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_2^2 + C_4 y_2^2)^{\frac{3}{2}},
\end{gathered} \tag{43}$$

Отметим, что уравнение (43) напоминает уравнения однородных СПВ-гиперповерхностей, полученных в [3]. Аналогичные уравнения однородных поверхностей имеются также в работе [13].

При $t^2 = \dfrac{1-2e_2}{1+2e_2}$ в итоге интегрирования появляются поверхности 3-го порядка, имеющие вид (все коэффициенты T_k здесь зависят от одного вещественного параметра):

$$\begin{gathered} v_3 = T_1(x_1x_2 + y_1y_2) + T_2(x_2^2 + y_2^2) + \\ +T_1x_2^3 + T_3y_2^3 + T_4x_2y_2^2, \end{gathered} \tag{44}$$

Уравнение (44) напоминает еще одно из уравнений однородных гиперповерхностей из работы [13]. Отметим также, что поверхность (44) можно назвать обобщением известной [14] аффинно-однородной поверхности 3-мерного вещественного пространства

$$v = xy + x^3,$$

называемой еще поверхностью Кэли (см. [15]).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

Для гиперболического типа было построено 2-параметрическое семейство алгебр с базисом следующего вида:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(1-2\varepsilon_1)^2/(8t^2) \\ 0 & 1/2 & 0 & (1-2\varepsilon_1)/(4t) \\ a_1 & b_1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & (1-2\varepsilon_1)/(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -(1-2\varepsilon_1) \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & i(1-2\varepsilon_1)/(2t) \\ 0 & 0 & 0 & 2i\varepsilon_1 \\ ia_2 - b_4 & -2ia_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ε_1, t — вещественные параметры,

$$a_1 = i\frac{(6t^2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 + t^2 + 1)(2\varepsilon_1 - 1)}{4t^2},$$

$$b_1 = i\frac{(2\varepsilon_1 - 1)(t^2 + 4t^2\varepsilon_1^2 + 12t^2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1^2 - 4\varepsilon_1 + 1)}{8t^3},$$

$$a_2 = i\frac{(t^2+1)(1-4\varepsilon_1^2)}{t},\ b_4 = \frac{(t^2+1)(2\varepsilon_1 - 1)}{t}.$$

Полученные В. К. Евченко уравнения всех однородных поверхностей из соответствующего 2-параметрического семейства имеют вид, напоминающий (43):

$$\begin{gathered} v_3 = (A_1x_1x_2 + A_2y_1y_2) + x_2(A_3x_2^2 + A_4y_2^2) + \\ +(C_0 + C_1x_1 + C_2x_2^2 + C_3y_2^2)^{\frac{3}{2}}. \end{gathered} \tag{46}$$

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

В параболическом случае построено и проинтегрировано семейство алгебр с базисом вида

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ir(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}i\cos(\phi) + \frac{1}{4}\sin(\phi) \\ \frac{3}{2}\cos(\phi) + \frac{1}{2}i\sin(\phi) & b_1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}i\cos(\phi) + \frac{1}{2}\sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & i\cos(\phi) - \sin(\phi) \\ a_2 & -3\cos(\phi) - i\sin(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\cos(\phi) + \frac{1}{2}i\sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i\cos(\phi) + \sin(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) + i\sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

Здесь

$$b_1 = -\frac{9}{2}\cos(\phi) + \frac{1}{2}i\sin(\phi) + 2r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

$$a_2 = 2\cos(\phi) - 2i\sin(\phi),$$

$$b_4 = 2i\cos(\phi) + 2\sin(\phi),$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, t = -1,$$

$$p_4 = \cos(\phi) + i\sin(\phi),\ r \in \mathbb{R}.$$

Результатом интегрирования является семейство поверхностей вида

$$\begin{gathered} v_3 = 2(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2^2 - 3y_2^2) + \\ +\left(\frac{x_2^3}{\sin\varphi} - \frac{y_2^3}{\cos\varphi}\right),\ \varphi \in (0, \pi/2), \end{gathered} \tag{48}$$

напоминающих своими уравнениями поверхности (44).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобода А. В.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38—50.

2. *Лобода А. В.* Об одном семействе алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями / А. В. Лобода // Труды МИАН, 2006, Т. 253, С. 111—126.

3. Демин А. М. Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в C^3 / А. М. Демин, А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 5. — С. 791—794.

4. *Евченко В. К.* 4-мерные матричные алгебры и аффинная однородность вещественных гиперповерхностей пространства C^3 / В. К. Евченко, А. В. Лобода // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 108—118.

5. *Fels G.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — V. 210(2008). — P. 1—82.

6. *Данилов М. С.* Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности с индефинитной формой Леви / М. С. Данилов // Международная школа-семинар по геометрии и анализу. Тез. докл. — Абрау-Дюрсо, 2008 — С. 25—26.

7. *Данилов М. С.* Продолжение матричных алгебр Ли и индефинитные однородные гиперповерхности в C^3 / М. С. Данилов // Труды матем. центра им. Лобачевского. Тез. докл. — Казань, 2009. — Т. 38. — С. 102—103.

8. *Chern S. S.* Real hypersurfaces in complex manifolds/ S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974 — 133, N 3. — P. 219—271.

9. *Белошапка В. К.* О размерности групп автоморфизмов аналитической гиперповерхности/ В. К. Белошапка // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43. — N 2 — С. 243—266

10. *Лобода А. В.* Действие аффинной подгруппы в комплексной касательной плоскости к однородной поверхности / А. В. Лобода // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. — Воронеж, 2009. — С. 106—107.

11. *Белых Ф. А.* Вещественные подалгебры малых размерностей матричной алгебры Ли $M(2,C)$ / Ф. А. Белых, А. Ю. Борзаков, А. В. Лобода // Изв. ВУЗов. Сер. Математика. — 2007. — № 5. — С. 13—24.

12. *Данилов М. С.* Примеры аффинно-однородных вещественных индефинитных поверхностей / М. С. Данилов, В. К Евченко // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. — Воронеж, 2010. — С. 21—22.

13. *Beloshapka V. K.* Homogeneous hypersurfaces in C^3, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // arXiv:0910.0658v1 [math. CV] — 5 Oct 2009. — P. 1— 30.

14. *Doubrov B. M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry / B. M. Doubrov, B. P. Komrakov , M. Rabinovich // Geometry and Topology of Submanifolds. — VIII, World Scientific. — 1996. — P. 168—178.

15. *Eastwood M.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space/ M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom Dedicata. — 1999. — V. 77. — P. 11—69.

Данилов Максим Сергеевич — аспирант кафедры высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета; тел.:+79204052925, e-mail: damased@yandex.ru

Danilov Maksim Sergeevich — post-graduate student, chair of higher mathematics, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering; tel.:+79204052925, e-mail: damased@yandex.ru