

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. В. Гриценко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.03.2010 г.

**Аннотация.** Для однородного консольного стержня постоянного сечения, находящегося под действием распределенной нагрузки и сосредоточенных сил, в пространстве параметров внешних воздействий найдена кривая, определяющая границу области квазистатического процесса. При пересечении ее траекторией нагружения, происходит смена вида квазистатического процесса. Исследования проводились на основе вариационного метода.

**Ключевые слова:** Квазистатическое поведение, консольный стержень, математическая модель, вариационная задача.

**Abstract.** For a homogeneous cantilever rod with constant cross section, located under a distributed load and concentrated forces in the parameter space of external influences found a curve that defines the boundary of the quasi-static process. When crossing its trajectory of loading, there is a change form a quasi-static process. Investigations were conducted on the basis of the variational method.

**Keywords:** Quasi-static behavior, cantilever rod, mathematical model, variational problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, изучение поведения твердых тел в рамках статики возможно на основе принципа возможных перемещений. Согласно этому принципу, функция, описывающая деформированное состояние, является решением следующей вариационной задачи [1]

$$\delta(\Pi - A) = 0, \quad (1)$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия тела, а  $A$  — работа внешних сил.

Рассмотрим проблему существования квазистатического изгиба упругого стержня (рис. 1) при потенциальном внешнем воздействии в случае, когда математической моделью является вариационная задача (1).

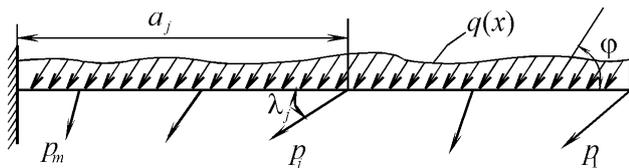


Рис. 1. Упругий стержень, нагруженный потенциальными внешними воздействиями.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Потенциальная энергия изогнутого стержня и работа внешних сил с точностью до величин второго порядка малости определяется следующим образом [2]

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(u'')^2 dx, \\ A &= \int_0^{\ell} \left\{ \frac{1}{2} q \left[ \int_0^x (u')^2 d\xi \right] \cos \varphi + qu \sin \varphi \right\} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left[ \frac{1}{2} P_j \cos \psi_j \int_0^{\ell_j} (u')^2 dx + P_j u(\ell_j) \sin \psi_j \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $u(x)$  описывает форму изогнутого стержня, изображенного на рис. 1,  $\ell$  — длина стержня,  $EI$  — жесткость стержня ( $E$  — модуль упругости,  $I$  — момент инерции сечения стержня),  $P_j$  — сосредоточенная сила (приложенная на расстоянии  $\ell_j$  от начала стержня), направление действия которой определяется углом  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $q$  — распределенная нагрузка, действующая под углом  $\varphi$  к стержню.

Пусть при  $\psi_j = \psi_{j0}$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $q(x) = q_0(x)$  функция

$$u = u_0(x, P_j) \quad (3)$$

является точкой экстремума функционала  $\Phi = \Pi - A$ , т.е. является решением задачи (1).

Для того чтобы существовал квазистатический процесс, соответствующий (3) необходимо чтобы решение вариационной задачи (1) непрерывно зависело от  $P_j$  при  $\psi_j = \psi_{j0}$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $q(x) = q_0(x)$ .

Согласно [3,4], для проведения исследования этой непрерывности надо построить вспомогательный функционал относительно функции  $\zeta(x)$ , который в данной задаче будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \frac{1}{2} \int_0^\ell \{EI(u'' - \zeta'')^2 - \\ & - \left[ \int_x^\ell q_0(\xi) d\xi \right] (u' - \zeta')^2 \cos \phi_0 - \\ & - 2q_0(u - \zeta) \sin \phi_0 \} dx - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left[ P_j \cos \psi_{j0} \int_0^{\ell_j} (u' - \zeta')^2 dx + 2P_j [u(\ell_j) - \right. \\ & \left. - \zeta(\ell_j)] \sin \psi_{j0} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия будут следующими

$$u(0) - \zeta(0) = u'(0) - \zeta'(0) = 0.$$

Квадратичный функционал  $\Phi_2$ , соответствующий функционалу  $\Phi_1$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \int_0^\ell \{EI(\zeta'')^2 - \\ & - \left[ \int_x^\ell q_0(\xi) d\xi \right] (\zeta')^2 \cos \phi_0 \} dx - \\ & - \sum_{j=1}^m \left[ P_j \cos \psi_{j0} \int_0^{\ell_j} (\zeta')^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если, согласно [3, 4], вариационная задача

$$\delta\Phi_2 = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0 \quad (7)$$

имеет только тривиальное решение, то квазистатический процесс, соответствующий (3), существует.

Учитывая вид граничных условий (7), будем искать решение задачи (6), например, в виде

$$\zeta = \frac{b_1}{\ell} x^2 + \frac{b_2}{\ell^3} x^4, \text{ где } b_1 \text{ и } b_2 \text{ константы.} \quad (8)$$

Рассмотрим случай  $q(x) \equiv q_0$  ( $q_0 = \text{const}$ ) и  $m = 1$ . Для однородного стержня постоянного сечения из (5) и (6) получаем, что (6) сводится к отысканию экстремума следующей функции двух переменных

$$\begin{aligned} F(b_1, b_2) = & \frac{EI}{\ell} \left[ 4b_1^2 + \frac{144}{5} b_2^2 + 16b_1 b_2 - \right. \\ & - \alpha_1 \left( \frac{4}{3} b_1^2 + \frac{16}{7} b_2^2 + \frac{16}{5} b_1 b_2 \right) \cos \psi_{10} - \\ & \left. - \alpha_1 \left( \frac{1}{3} b_1^2 + \frac{3}{7} b_2^2 + \frac{8}{15} b_1 b_2 \right) \cos \varphi_0 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{P_1 \ell^2}{EI}; \quad \alpha_2 = \frac{q_0 \ell^3}{EI}. \quad (10)$$

Условия экстремума функции (9) при этом имеют вид

$$\begin{aligned} (60 - 20\alpha_1 \cos \psi_{10} - 5\alpha_2 \cos \varphi_0) b_1 + \\ + (120 - 24\alpha_1 \cos \psi_{10} - 4\alpha_2 \cos \varphi_0) b_2 = 0, \\ (840 - 168\alpha_1 \cos \psi_{10} - 8\alpha_2 \cos \varphi_0) b_1 + \\ + (3024 - 240\alpha_1 \cos \psi_{10} - 45\alpha_2 \cos \varphi_0) b_2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие равенства нулю определителя системы (11) запишется таким образом

$$\begin{aligned} 768\alpha_1^2 \cos^2 \psi_{10} + 113\alpha_2^2 \cos^2 \varphi_0 - \\ - 534\alpha_1 \alpha_2 \cos \varphi_0 \cos \psi_{10} - 34560\alpha_1 \cos \psi_{10} - \\ - 11940\alpha_2 \cos \varphi_0 + 80640 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 2 приведены графики зависимости критических значений параметров внешних нагрузок  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответствующие (12) при  $\psi_{10} = \varphi_0 = 0$  (кривая 1) и  $\psi_{10} = \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$  (кривая 2).

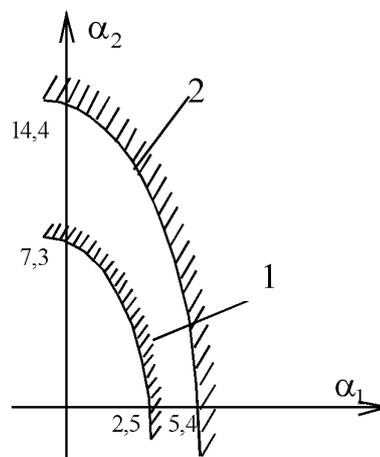


Рис. 2. Графики зависимости критических значений параметров внешних нагрузок  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

Кривые, представленные на рис. 2, определяют границу области существования квазистатического процесса, соответствующего (3). При пересечении траекторией нагружения этих линий происходит смена вида квазистатического процесса, т.е. стержень переходит в другое равновесное состояние, описываемое не (3), а другой функцией.

**Гриценко Александр Владимирович** — аспирант кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета; тел.: 8-905-652-04-30, e-mail: [algritsenko@gmail.com](mailto:algritsenko@gmail.com).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. — М.: Мир, 1965. — 408 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979. — 744 с.
3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.
4. *Минаева Н. В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел. — М.: Научная книга, 2006. — 236 с.

**Gritsenko Alexander Vladimirovich** — graduate student of mathematics and applied analysis of the Voronezh State University, tel.: 8-905-652-04-30, e-mail: [algritsenko@gmail.com](mailto:algritsenko@gmail.com)