

# ОТКАЗ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Д. В. Гоцев, А. Н. Спорыхин

*Военный авиационный инженерный университет (г. Воронеж)  
Воронежский государственный университет*

Поступила редакцию 16.03.2010 г.

**Аннотация.** Построена математическая модель, описывающая основное (докритическое) напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы с упруго-вязко-пластическим заполнителем при радиальном сжатии (нагружении). В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована устойчивость основного состояния рассматриваемой конструкции. При этом материал трубы моделировался упругим телом, а материал заполнителя — упрочняющейся упруго-вязко-пластической средой. Даны оценка влияния на величину критического давления физико-механических и геометрических параметров конструкции.

**Ключевые слова:** трубы с заполнителем, упруго-вязко-пластическая модель, напряженно-деформированное состояние, точные трехмерные уравнения устойчивости.

**Abstract.** The mathematical model describing basic is intense-deformed condition of a cylindrical pipe with an elastic-is viscous-plastic filler at radial compression is constructed. Within the limits of the exact three-dimensional equations of stability stability of the basic condition of a considered design is investigated. Thus the pipe material was modelled by an elastic body, and a filler material — the strengthened elastic-is viscous-plastic environment. The estimation of influence on size of critical pressure of physicomechanical and geometrical parametres of a design is given.

**Keywords:** pipes with a filler, the elastic-is viscous-plastic model, the is intense-deformed condition, the exact three-dimensional equations of stability.

Известно [1], что цилиндрические трубы испытывающие упруго-вязко-пластические деформации теряют устойчивость раньше, чем исчерпает свою несущую способность. Поэтому определение нагрузки, при которой возможна потеря устойчивости основного состояния равновесия представляет практический интерес при расчете монолитных крепей для шахтных стволов, обсадных труб вертикальных скважин и т.д. Исследованию устойчивости цилиндрической оболочки с упругопластическим заполнителем при радиальном нагружении посвящены работы [2, 3]. При этом заполнитель описывался соотношениями теории малых упругопластических деформаций [4, 5] и предположении степенной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций. В отличие от [2, 3] в настоящей работе на основе точных трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости [6] исследуется устойчивость основного состояния круговой цилиндрической трубы с заполнителем при радиальном нагру-

жении. При этом заполнитель моделировался средой с более сложными реологическими свойствами — упруго-вязко-пластической, что позволило наиболее полно учесть реальные свойства материалов.

Первый этап решения этой задачи заключается в нахождении основного (докритического) напряженно-деформированного состояния цилиндрической трубы с заполнителем, второй — в решении самой линеаризованной задачи устойчивости, т. е. в определении критической величины сжимающего давления, равномерно распределенного по внешней поверхности трубы.

При решении данной задачи основное напряженно деформированное состояние определялось в рамках второго варианта геометрически линейной теории (т.е. сдвиги и удлинения пренебрежимо малы по сравнению с единицей и геометрические соотношения взяты в линейной форме [8]). При этом для материала трубы (упругая область) имеет место закон Гука, а в пластической области (заполнителю) соотношения теории упруго-вязко-пластического тела.

Для описания упруго-вязко-пластических свойств воспользуемся моделью среды со сложными реологическими свойствами и функцией нагружения в виде [6]

$$F = \left( S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p \right) \times \\ \times \left( S_j^i - c(\varepsilon_j^i)^p - \eta(e_j^i)^p \right) - k^2 \quad (1)$$

и ассоциированным законом течения в форме

$$(e_i^j)^p = \lambda_0 \left( S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p \right). \quad (2)$$

Верхние индексы “*p*” и “*e*” приписываются величинам, характеризующим пластическое и упругое состояния тела соответственно. Здесь  $S_j^i = \sigma_j^i - \frac{1}{3} \sigma_k^k g_j^i$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $(\varepsilon_i^j)^p$  — компоненты тензора пластических деформаций,  $(e_i^j)^p$  — компоненты тензора скоростей пластических деформаций;  $c$  и  $\eta$  — коэффициенты упрочнения и вязкости соответственно,  $k$  — предел текучести,  $\lambda_0$  — неопределенный множитель. При этом компоненты тензора полных деформаций  $\varepsilon_j^i$  удовлетворяют условию [6]

$$\varepsilon_j^i = (\varepsilon_j^i)^p + (\varepsilon_j^i)^e. \quad (3)$$

Компоненты тензора упругих деформаций связаны с компонентами тензора напряжений законом Гука

$$\sigma^{ij} = (\lambda g^{ij} g^{rk} + \mu(g^{ik} g^{jr} + g^{ir} g^{jk})) \varepsilon_{rk}, \quad (4)$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $g^{ij}$  — компоненты метрического тензора.

Компоненты тензора полных деформаций связаны с компонентами вектора перемещений  $u_i$  формулами Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (5)$$

Здесь и далее  $\nabla$  — символ ковариантного дифференцирования.

Уравнения равновесия и граничные условия приняты в обычной форме.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из шарнирно-опертой круговой цилиндрической трубы толщиной  $2h$  и длиной  $l$ , материал которой моделируется упругим сжимаемым телом с заполнителем моделируемым упруго-вязко-пластической средой. Труба находится под действием сжимающих усилий интенсивностью  $q$  равномерно распределенных по внешней боковой поверхности (рис. 1), причем усилия

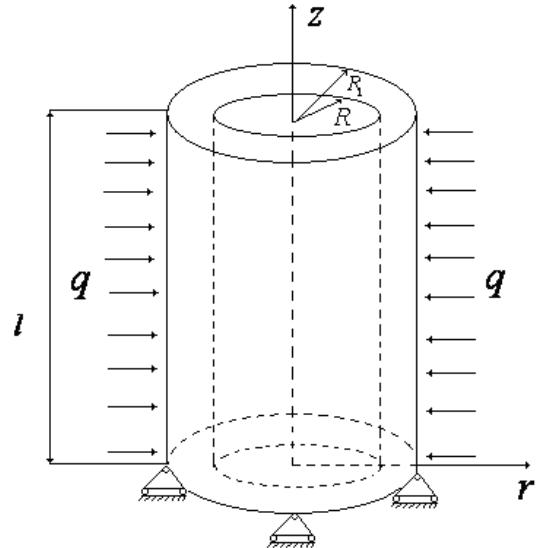


Рис. 1

действуют как на трубу, так и на заполнитель, которые одинаково деформируются на величину  $\varepsilon_{zz}^{(1)0} = \varepsilon_{zz}^0 = \varepsilon$ . Здесь и далее индекс “0” вверху величин обозначает их принадлежность к основному докритическому состоянию, индекс “(1)” вверху — принадлежность к области трубы, его отсутствие — принадлежность к заполнителю.

Исходя из уравнений равновесия и граничных условий на боковой поверхности привлекая при этом соотношения (1) — (5), учитывая условия несжимаемости для области заполнителя, а также условия сопряжения на линии контакта труба — заполнитель находим докритическое напряженно-деформированное состояние данной конструкции, которое в полярных координатах  $(r, \theta)$  имеет вид:

в области трубы (сжимаемая упругая среда) при  $R \leq r \leq R + 2h$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{0(1)} &= C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_{rr}^{0(1)} = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{0(1)} &= \frac{C_1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_{zz}^{0(1)} = \varepsilon, \\ \sigma_{zz}^{0(1)} &= 2C_1 \lambda^{(1)} + (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) \varepsilon, \\ \sigma_{rr}^{0(1)} &= 2C_1 (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) - 2C_2 \mu^{(1)} / r^2 + \lambda^{(1)} \varepsilon, \\ \sigma_{\theta\theta}^{0(1)} &= 2C_1 (\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) + 2C_2 \mu^{(1)} / r^2 + \lambda^{(1)} \varepsilon, \\ C_1 &= \frac{(\lambda^{(1)} R_1^2 + \mu^{(1)} R_1^2) \varepsilon + q R_1^2}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) R_1^2 + 2\mu^{(1)} R^2}, \\ C_2 &= \frac{(\mu^{(1)} \varepsilon - q) R^2 R_1^2}{2(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}) R_1^2 + 2\mu^{(1)} R^2}; \end{aligned} \quad (6)$$

в области заполнителя (упрочняющаяся упруго-вязко-пластическая среда) при  $r \leq R$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^0 &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon_{zz}^0 = \varepsilon, \quad (\varepsilon_{zz}^0)^p = -2(\varepsilon_{rr}^0)^p, \\ (\varepsilon_{rr}^0)^p &= (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^p = \frac{\mu\varepsilon + \frac{k}{\sqrt{6}}}{2\mu + c} \left( \exp\left(-\frac{2\mu+c}{\eta}t\right) - 1 \right), \\ \sigma_{rr}^0 &= \sigma_{\theta\theta}^0 = \\ &= -\frac{q(2\mu^{(1)} + \lambda^{(1)})R_1^2 + \varepsilon\mu^{(1)}\mu^{(1)}(R_1^2 - R^2)}{(\lambda^{(1)} + \mu^{(1)})R_1^2 + \mu^{(1)}R^2}, \quad (7) \\ \sigma_{zz}^0 &= \sigma_{rr}^0 + 6\mu\left(\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_{rr}^{0p}\right). \end{aligned}$$

В (6), (7)  $R$  — радиус заполнителя,  $R_1 = R + 2h$  — внешний радиус оболочки.

Исследование устойчивости основного состояния (6), (7) составной конструкции в предположении, что труба и заполнитель работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению уравнений равновесия в вариациях [7] для областей трубы и заполнителя при соответствующих граничных условиях.

Уравнения равновесия для этих областей имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \nabla_i \left( \sigma_j^i + \overset{0}{\sigma}_k^i \nabla^k u_j \right) - \rho s^2 u_j &= 0, \quad (8) \\ s &= i\Omega, \quad \Omega = \alpha + i\beta. \end{aligned}$$

Границные условия на внешней поверхности трубы запишем в виде

$$\left( \sigma_j^{i(1)} + \overset{0}{\sigma}_k^i \nabla^k u_j^{(1)} \right) N_i^{(1)} = p_j, \quad (9)$$

где  $N_i^{(1)}$  — орты нормали. При этом в случае «следящей» нагрузки  $p_i = p_k \nabla^k u_j$ , в случае «мертвой» нагрузки  $p_i = 0$ .

Условия непрерывности компонент тензора напряжений и вектора перемещений на границе контакта трубы и заполнителя, при  $r = R$  имеют вид

$$\begin{aligned} &(\sigma_j^i + \sigma^{0ik} \nabla_i u_j) N_i - \\ &- (\sigma_j^{i(1)} + \sigma^{0ik(1)} \nabla_k u_j^{(1)}) N_i^{(1)} = 0, \quad u_j^{(1)} - u_j = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Линеаризованная связь между значениями амплитуд компонент тензоров напряжений и деформаций для несжимаемой упруго-вязко-пластической среды согласно [6], представима в виде

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= (\alpha_{ik} g^{kk} \nabla_k u_k + p_0) g_j^i + \\ &+ (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^i (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \end{aligned} \quad (11)$$

для сжимаемой упругой среды согласно [5] — в виде

$$\begin{aligned} \sigma_j^{i(1)} &= \alpha_{ik}^{(1)} g^{kk} \nabla_k u_k^{(1)} g_j^i + \\ &+ (1 - g_j^i) g^{ii} G_j^{i(1)} (\nabla_i u_j^{(1)} + \nabla_j u_i^{(1)}) \end{aligned} \quad (12)$$

В (11), (12) отсутствует суммирование по индексам  $i$  и  $j$ ,  $p_0$  — множитель Лагранжа. Величины  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}^{(1)}$ ,  $G_j^i$ ,  $G_j^{i(1)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(1)} &= \lambda^{(1)} \delta_{jj} + 2\mu^{(1)} \delta_{ij}, \quad G_j^{i(1)} = \mu^{(1)}, \\ \alpha_{ij} &= 2\mu \delta_{ij} - 3\alpha \overset{0}{f}_{ii} \overset{0}{f}_{jj}, \\ \alpha &= \frac{4}{3} \mu^2 \left[ k^2 (2\mu + c - \eta s) \right]^{-1}, \\ f_{ij}^0 &= S_{ij}^0 - c \left( \mu_{ij}^0 \right)^p, \quad G_j^i = \mu. \end{aligned} \quad (13)$$

К соотношениям (8), (11), (13) для заполнителя следует присоединить условие несжимаемости

$$\nabla_k u^k = 0. \quad (14)$$

Уравнения (8)—(14) представляют собой связную краевую задачу устойчивости относительно амплитуд компонент векторов перемещений  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , гидростатического давления  $p_0$ , соответственно, для области трубы и заполнителя. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потере устойчивости основного состояния.

Для нахождения собственных значений задачи компоненты вектора перемещений и гидростатическое давление в заполнителе аппроксимируем следующим образом

$$\begin{aligned} u &= \psi_{n1}(r) \cos n\theta \sin \gamma z, \\ v &= \psi_{n2}(r) \sin n\theta \sin \gamma z, \\ w &= \psi_{n3}(r) \cos n\theta \cos \gamma z, \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_0 = P_n(r) \cos n\theta \sin \gamma z, \quad \gamma = m\pi / l.$$

Здесь  $n$ ,  $m$  — параметры волнобразования. В трубе перемещения  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  имеют вид (15), где величинам  $\psi_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следует присвоить символ (1) вверху. Выбор решения задачи устойчивости в форме (15) предполагает, что труба и заполнитель работают совместно без проскальзывания и отставания и соответствует неосесимметричной форме потери устойчивости.

Подставляя функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p_0$ ,  $u^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $w^{(1)}$  в линеаризованные уравнения равновесия (8)

и учитывая при этом (11)–(14), после ряда преобразований получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

для трубы

$$dy^{(1)}(r)/dr = C(r)y^{(1)}(r); \quad (R \leq r \leq R + 2h) \quad (16)$$

для заполнителя

$$dy(r)/dr = D(r)y(r), \quad (r \leq R) \quad (17)$$

где  $y^{(1)} = (\psi_{n1}^{(1)}, \psi_{n2}^{(1)}, \psi_{n3}^{(1)}, \psi_{n1}^{(1)'}, \psi_{n2}^{(1)'}, \psi_{n3}^{(1)'})$ ,  $y = (\psi_{n1}, \psi_{n2}, \psi_{n3}, P_n, \psi_{n1}, \psi_{n2})$  — векторы, а С и D — матрицы шестого порядка. Элементы  $c_{ij}$  и  $d_{ij}$  матриц С и D отличные от нуля таковы

$$\begin{aligned} c_{14} &= c_{25} = c_{36} = 1, \quad c_{41} = (n^2(\sigma_{\theta\theta} + \mu^{(1)}) + \\ &+ \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} + \mu^{(1)}) + \sigma_{\theta\theta} + \alpha_{11}^{(1)} - \rho^{(1)}\omega r^2)/r, \\ c_{42} &= n(2\sigma_{\theta\theta} + \mu^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})/r, \\ c_{44} &= \sigma_{rr} + \alpha_{11}^{(1)} + r\sigma_{rr,r}, \quad c_{45} = n(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{46} &= \gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)})r, \\ c_{51} &= n(2\sigma_{\theta\theta} + \mu^{(1)} + \alpha_{11}^{(1)})/r, \\ c_{52} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta} + \alpha_{11}^{(1)}) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} + \mu^{(1)}) + \sigma_{\theta\theta} + \\ &+ \mu^{(1)} - \rho^{(1)}\omega r^2)/r, \quad c_{66} = \sigma_{rr} + r\sigma_{rr,r} + \mu^{(1)}, \\ c_{53} &= -n\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{55} &= \sigma_{rr} + r\sigma_{rr,r} + \mu^{(1)}, \\ c_{61} &= -\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \quad c_{62} = -n\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)}), \\ c_{63} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta} + \mu^{(1)}) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} + \alpha_{11}^{(1)}) - \\ &- \rho^{(1)}\omega r^2)/r, \quad c_{64} = -\gamma(\mu^{(1)} + \alpha_{12}^{(1)})r \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  с первым индексом 4 надо поделить на  $r(\sigma_{rr} + \alpha_{11}^{(1)})$ , с 5 и 6 — на  $r(\sigma_{rr} + \mu^{(1)})$ .

$$\begin{aligned} d_{14} &= d_{25} = d_{36} = 1, \quad d_{41} = (n^2(\sigma_{\theta\theta} + \mu) + \\ &+ \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} + \mu) + \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + \sigma_{rr,r} - \rho\omega r^2)/r^2, \\ d_{53} &= n\gamma(\alpha_{12} - \alpha_{23}), \quad d_{42} = n(2\sigma_{\theta\theta} + \mu - \sigma_{rr} + \\ &+ r\sigma_{rr,r})/r^2, \quad d_{43} = -\gamma\sigma_{rr,r}, \\ d_{45} &= n(\alpha_{11} - \alpha_{12} - \mu - \sigma_{rr})/r, \\ d_{46} &= \gamma(\alpha_{23} - \alpha_{11} + \mu - \sigma_{rr}), \quad d_{64} = \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{51} &= n(2\sigma_{\theta\theta} + \alpha_{11} - \alpha_{12})/r, \\ d_{52} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta} - \mu - \alpha_{11} - \alpha_{12}) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} + \mu) + \\ &+ \sigma_{\theta\theta} + \mu - \rho\omega r^2)/r, \quad d_{55} = \mu + \sigma_{rr} + r\sigma_{rr,r}, \\ d_{63} &= (n^2(\sigma_{\theta\theta} + \mu) + \gamma^2 r^2(\sigma_{zz} - \mu + \\ &+ \alpha_{33} - \alpha_{23}) - \rho\omega r^2)/r^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $d_{ij}$  надо поделить для  $i = 5$  и  $i = 6$  на  $r(\sigma_{rr} + \mu)$ .

При этом для сжимаемого упругого материала трубы

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)} &= \alpha_{22}^{(1)} = \alpha_{33}^{(1)} = 2\mu^{(1)} + \lambda^{(1)}, \quad \alpha_{12}^{(1)} = \alpha_{21}^{(1)} = \\ &= \alpha_{13}^{(1)} = \alpha_{23}^{(1)} = \alpha_{31}^{(1)} = \alpha_{32}^{(1)} = \lambda^{(1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

а для упруго-вязко-пластического заполнителя

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = 2\mu - \frac{\alpha k^2}{2}, \quad \alpha_{33} = 2\mu - 2\alpha k^2, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = -\frac{\alpha k^2}{2}, \\ \alpha_{13} &= \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha k^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Границные условия (9) и (10), с учетом (11)–(14) запишутся в виде:

условия контакта при  $r = R$

$$\begin{aligned} &(\sigma_{rr} + \alpha_{11})\Psi'_{n1} + \alpha_{12}\Psi_{n1}/r + \alpha_{12}\Psi_{n2}/r - \\ &- \gamma\alpha_{13}\Psi_{n3} + P_n = (\sigma_{rr} + \alpha_{11}^{(1)})\Psi_{n1}' + \\ &+ \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n1}'/r + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n2}'/r - \gamma\alpha_{13}^{(1)}\Psi_{n3}', \\ &r(\sigma_{rr} + \mu)\Psi_{n2}' - n\mu\Psi_{n1} - \mu\Psi_{n2} = \\ &= r(\sigma_{rr} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}' - n\mu^{(1)}\Psi_{n1} - \mu^{(1)}\Psi_{n2}', \\ &(\sigma_{rr} + \mu)\Psi_{n3}' + \mu\Psi_{n1} = \\ &= (\sigma_{rr} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}' + \mu^{(1)}\Psi_{n1}', \\ &u = u^{(1)}, v = v^{(1)}, w = w^{(1)}; \end{aligned} \quad (22)$$

условия на поверхности при  $r = R_1$

$$\begin{aligned} &(\sigma_{rr} + \alpha_{11}^{(1)})\Psi_{n1}' + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n1}'/r + \alpha_{12}^{(1)}\Psi_{n2}'/r - \\ &- \gamma\alpha_{13}^{(1)}\Psi_{n3}' = 0, \quad r(\sigma_{rr} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}' - n\mu^{(1)}\Psi_{n1}' - \\ &- \mu^{(1)}\Psi_{n2}' = 0, \quad (\sigma_{rr} + \mu^{(1)})\Psi_{n1}' + \mu^{(1)}\Psi_{n1}' = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку точное аналитическое решение краевой задачи (16)–(23) найти не удается, будем искать приближенное решение методом конечных разностей [9]. В результате получаем

однородную систему линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричной форме  $(X_{ij})(Y_i) = 0$ . Отсюда следует, что определение критического значения параметра нагрузки  $q^*$  сводится к разрешимости матричного уравнения

$$\det(X_{ij}) = 0 \quad (24)$$

При вычислении определителя необходимо учитывать соотношения (6), (7) описывающие напряженно-деформируемое докритическое состояние. Минимизация должна проводиться по шагу разностной сетки  $\beta$ , параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала оболочки и заполнителя  $\lambda_j$  и величине  $s = i\Omega$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величины  $q$  в зависимости от  $s, m, n$  при условии

$$\Phi = \det(X_{ij}(q, s, m, n, \lambda_j)) = 0$$

Задача определения критической нагрузки  $q^*$  при фиксированных значениях  $\beta$  и параметрах  $\lambda_j$  может быть решена в два этапа. На первом этапе необходимо определить область в пространстве параметров  $q, s, m, n$  в которой происходит смена знака функции  $\Phi(q, s, m, n, \beta, \lambda_j)$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ , на втором, согласно (24) вычисляется значение  $q^* = \min q(s, m, n)$  при котором  $\Phi(q^*, s^*, m^*, n^*, \beta, \lambda_j) = 0$ . Оптимизацию по па-

раметру  $\beta$  проводить необходимо следующим образом. Вычисление критической нагрузки прекращается, если после уменьшения шага разностной сетки в 2 раза получаемые значения нагрузки отличаются друг от друга с заданной точностью.

Численный счет проводился для безразмерных величин, при этом все величины имеющие размерность напряжений относились к модулю сдвига  $\mu^{(1)}$  для упругого материала трубы, а величины имеющие размерность длины к радиусу заполнителя  $R$ .

На рис. 2, рис. 3 показаны зависимости величины критической нагрузки  $q^*$  от толщины упругой оболочки ( $R_1 - R$ ) при различных значениях коэффициентов вязкости и упрочнения, которым соответствуют значения параметров волнообразования  $m = n = 3$ . На рис. 1 кривая 1 соответствует  $c = 0.0005$ , кривая 2 —  $c = 0.01$ , кривая 3 —  $c = 0.2$ . При этом коэффициент вязкости материала заполнителя  $\eta = 0.2$ . На рис. 2 кривая 1 соответствует  $\eta = 0.001$ , кривая 2 —  $\eta = 0.01$ , кривая 3 —  $\eta = 0.1$ . При этом коэффициент упрочнения  $c = 0.2$ . Для обоих рисунков  $\epsilon = 0.07$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\lambda^{(1)} = 2$ ,  $k = 0.07$ ,  $l = 1000$ .

Из анализа результатов численного счета следует, что

— при увеличении толщины упругого слоя (толщины трубы) значение критической нагрузки  $q^*$  увеличивается;

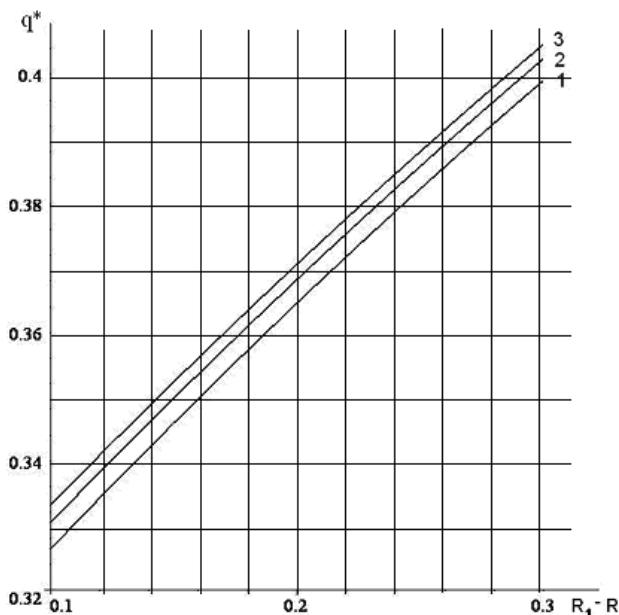


Рис. 2

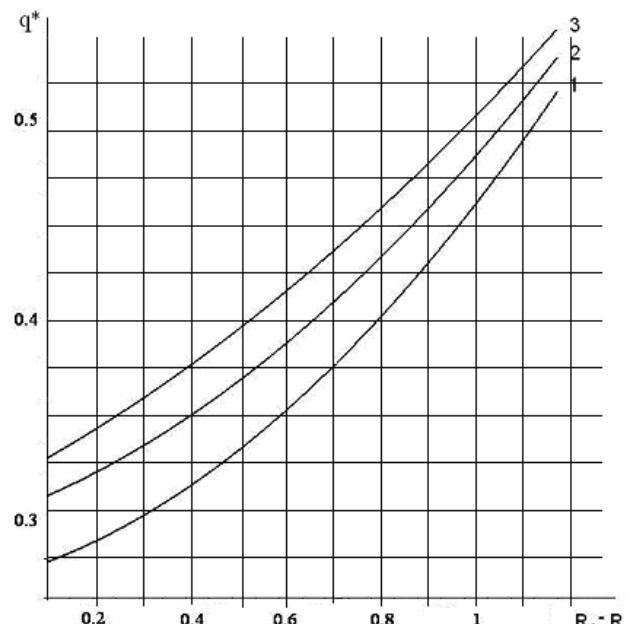


Рис. 3

— с ростом коэффициентов упрочнения  $c$  и вязкости  $\eta$  область устойчивости увеличивается.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории.— М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 271 с.
2. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев. Вища школа, 1980. — 512 с.
3. Бабич И. Ю., Черевко М. А. Устойчивость цилиндрических оболочек с упругопластическим заполнителем при осевом сжатии // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 3. С. 60 — 64.
4. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток. Дальнаука, 1998. — 527 с.
5. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 701 с.
6. Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Издательство ВГУ. Воронеж, 1997. — 360 с.
7. Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 232 с.
8. Новожилов В. В. Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
9. Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964.

**Гоцев Дмитрий Викторович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного авиационного инженерного университета (г. Воронеж), тел. 8-905-052-46-70, e-mail: rbgotsev@mail.ru

**Спорыхин Анатолий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета, тел. 208-763, e-mail: rbgotsev@mail.ru

**Gotsev Dmitry Viktorovich** — the candidate of physical and mathematical sciences, the senior lecturer of chair of mathematics of Military aviation engineering university (Voronezh). Tel: 8-905-052-46-70, e-mail: rbgotsev@mail.ru

**Sporyhin Anatoly Nikolaevich** — the doctor of physical and mathematical sciences, the professor managing chair of the theoretical and applied mechanics of the Voronezh state university. Tel: 208-763, e-mail: rbgotsev@mail.ru