УДК 517. 983

ГЕНЕРАТОРЫ ПОЛУГРУПП И СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХУРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет

Поступила в редакцию 29.10.2009 г.

Аннотация. В банаховом пространстве X рассматривается сильно непрерывная полугруппа $U(t)$ $(t>0)$ с ядром $\ker U=\{0\}$. Строится такое локально выпуклое пространство Q, что X плотно и непрерывно вкладывается в Q, а полугруппа $U(t)$ расширяется по непрерывности до полугруппы $\tilde{U}(t)$ класса C_0 в Q. Дается описание слабых решений уравнения $y'(t)=\mathcal{A}y(t)$ с оператором $\mathcal{A}$ в X, $\mathcal{A}\subset\tilde{U}'(0)$.
Ключевые слова: банахово пространство, локально выпуклое пространство, сильно непрерывная полугруппа, генератор, дифференциально-операторное уравнение.

Abstract. Let $U(t)$ $(t>0)$ be a strongly continuous semigroup in a Banach space X and $\ker U=\{0\}$. We construct a locally convex space Q such that X can be densely embedded in Q and the semigroup $U(t)$ can be continuously extended to a semigroup $\tilde{U}(t)$ of class C_0 in Q. We describe weak solutions of the equation $y'(t)=\mathcal{A}y(t)$, where $\mathcal{A}$ is a linear operator in X and $\mathcal{A}\subset\tilde{U}'(0)$.
Keywords: Banach space, locally convex space, strongly continuous semigroup, generator, differential operator equation.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Под полугруппой операторов понимается сильно непрерывная функция $t\to U(t)$ $(t>0)$ со значениями в множестве ограниченных линейных операторов в X, удовлетворяющая равенству $U(t+s)=U(t)U(s)$ при всех $t,s>0$. В данной работе (в предположении, что $\ker U=\{0\}$) строится такое локально выпуклое пространство Q, что X плотно и непрерывно вкладывается в Q, а полугруппа U расширяется до полугруппы $\tilde{U}$ класса C_0 в пространстве Q. Устанавливается связь между производящим оператором $\tilde{U}'(0)$ и старшим генератором [1] полугруппы U.

Полученные результаты применяются для описания слабых решений уравнения

$$y'(t)=\mathcal{A}y(t),\ t>0, \tag{1}$$

с оператором $\mathcal{A}$ в пространстве X таким, что $\mathcal{A}\subset\tilde{U}'(0)$. Слабым решением уравнения (1) называется функция y со свойствами: (i) $y\in L_1(X;a,b)$ для всех a,b $(0<a<b<\infty)$ (пишем $y\in L_{1,loc}(X)$); (ii) для любой финитной бесконечно дифференцируемой на $(0,\infty)$ функции $\varphi(t)$ и любых пар $\{g,g_1\}\in\mathcal{A}^*\subset X^*\times X^*$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty\varphi'(t)\langle y(t),g\rangle dt=\int_0^\infty\varphi(t)\langle y(t),g_1\rangle dt, \tag{2}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — билинейная форма, определяемая двойственностью между X и X^*.

Пусть замыкание $\tilde{\mathcal{A}}$ в $X\times X$ оператора $\mathcal{A}$ перестановочно с $U(t)$ $(t>0)$. Доказывается, что слабые решения уравнения (1) тогда и только тогда имеют вид $y(t)=\tilde{U}(t)z$, где $z\in Q$, когда $\widehat{\mathcal{A}}=\tilde{U}'(0)$, где $\widehat{\mathcal{A}}$ обозначает замыкание оператора $\mathcal{A}$ в $Q\times Q$. Справедливость равенства $\widehat{\mathcal{A}}=\tilde{U}'(0)$ устанавливается для любого генератора $\mathcal{A}$ (в смысле [1]) полугруппы U.

Если U — полугруппа класса C_0, описание слабых решений получено в [2], где вместо условия (i) требовалось, чтобы функция y была сильно непрерывной в X при $t>0$. Здесь доказывается сильная непрерывность слабых решений. В случае, когда $\mathcal{A}$ — генератор [1] полугруппы U, описание слабых решений дано в [3].

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Любое линейное многообразие $T\subset X\times X$ называется линейным отношением в банаховом

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00131

пространстве X. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [1], [4]. Далее используются следующие обозначения: $\mathcal{D}(T)$ — область определения отношения T; $\mathcal{R}(T)$ — область значений; $\{x, x_1\}$ — упорядоченная пара, составленная из элементов x, x_1; $\ker T$ — множество таких элементов $x \in \mathcal{D}(T)$, что пара $\{x, 0\} \in T$. Линейный оператор S в X считается линейным отношением (при отождествлении оператора с его графиком). Поэтому запись $S \subset X \times X$ и $\{x, x_1\} \in S$ используется и для операторов. Все отношения, встречающиеся в дальнейшем, являются линейными и поэтому слово «линейный» часто будет опускаться.

Сопряженным к отношению T называется отношение $T^* \subset X^* \times X^*$, состоящее из таких пар $\{z, z_1\} \in X^* \times X^*$, что равенство $\langle x_1, z\rangle = \langle x, z_1\rangle$ выполняется для всех пар $\{x, x_1\} \in T$. Докажем, что замыкание $\overline{T}$ отношения T есть множество пар $\{y, y_1\} \in X \times X$, удовлетворяющих равенству $\langle y_1, z\rangle = \langle y, z_1\rangle$ для любых пар $\{z, z_1\} \in T^*$. С этой целью используем равенство ${}^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}$ [5, с. 109], где $M^{\perp}$ и ${}^{\perp}N$ — аннуляторы линеалов $M \subset X$ и $N \subset X^*$ соответственно. Рассмотрим оператор $J : X \times X \to X \times X$, действующий по формуле $J\{x, x_1\} = \{-x_1, x\}$. Тогда $T^* = (JT)^{\perp}$, где $(JT)^{\perp}$ — аннулятор многообразия $JT \subset X \times X$ в $X^* \times X^*$. Из равенств $J\overline{T} = \overline{JT} = {}^{\perp}((JT)^{\perp}) = {}^{\perp}(T^*)$ получаем требуемое утверждение.

Далее предполагается, что $\ker U = \cap_{t>0} \ker U(t) = \{0\}$.

Следуя [2], [6], введем в X семейство полунорм

$$p_\alpha(x) = \|U(\alpha)x\|,\ \alpha > 0,\ x \in X. \tag{3}$$

Это семейство порождает в X отделимую локально выпуклую топологию. Соответствующее локально выпуклое пространство обозначаем через $\mathbb{X}_0$, а пополнение $\mathbb{X}_0$ — через Q. Замыкание множества $M \subset X$ в Q обозначаем через $\widehat{M}$, а замыкание в X — как обычно, через $\overline{M}$.

Замечание 1. *Пространство Q получается пополнением $\mathbb{X}_0$ по системе полунорм $p_\alpha(x)$, где $0 < \alpha < \beta$, произвольное $\beta > 0$ фиксировано.*

Это следует из неравенства

$$p_\gamma(x) = \|U(\gamma)x\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U(\gamma - \alpha)\| \|U(\alpha)x\| \leqslant k p_\alpha(x).$$

Здесь $\gamma \geqslant \beta$, $k = \|U(\gamma - \alpha)\|$ не зависит от x (далее k обозначает положительную постоянную, вообще говоря, различную в различных неравенствах).

Равенство (3) и неравенство

$$\|U(t)x\| = \|U(t - \alpha)U(\alpha)x\| \le k\|U(\alpha)x\|$$

влекут

$$\|U(t)x\| \le k p_\alpha(x),\ k > 0 \tag{4}$$

для любых $x \in X$, α, t $(0 < \alpha < t)$.

Из неравенства (4) и из замечания 1 вытекает, что при любом $t > 0$ оператор $U(t)$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{U}(t) : Q \to X$. Можно доказать (см. [2], [6], [3]) с использованием замечания 1, что $\tilde{U}$ является сильно непрерывной полугруппой в Q.

Теорема 1. *При любом $x \in Q$ в пространстве Q существует*

$$\lim_{t\to+0} \tilde{U}(t)x = x.$$

Доказательство следует из равенств

$$\lim_{t\to+0} p_\alpha(\tilde{U}(t)x - x) =$$
$$= \lim_{t\to+0} \|\tilde{U}(\alpha)(\tilde{U}(t)x - x)\| =$$
$$= \lim_{t\to+0} \|\tilde{U}(t + \alpha)x - \tilde{U}(\alpha)x\| = 0,$$

где произвольное $\alpha > 0$.

Для полугруппы класса C_0 эта теорема доказана в [2], а для сильно непрерывно дифференцируемой при $t > 0$ полугруппы — в [6]. Полугруппа $\tilde{U}$ является равностепенно непрерывной [7, с. 324]. Такие полугруппы в локально выпуклых пространствах изучались, например, в [7, гл. 9].

Лемма 1. *Пусть $b > 0$ и функция f принимает значения в пространстве Q, причем функция $U(\alpha)f(t) \in L_1(X; 0, b)$ при любом $\alpha > 0$. Тогда в пространстве Q существует предел*

$$\lim_{s\to+0} \int_s^b \tilde{U}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Доказательство. При достаточно малых $s_1, s_2 > 0$ и любом $\alpha > 0$ имеем

$$p_\alpha\left(\int_{s_1}^b \tilde{U}(\tau) f(\tau) d\tau - \int_{s_2}^b \tilde{U}(\tau) f(\tau) d\tau\right) =$$
$$= \left\| U(\alpha) \int_{s_1}^{s_2} U(\tau) f(\tau) d\tau \right\| =$$
$$= \left\| \int_{s_1}^{s_2} U(\alpha / 2 + \tau) U(\alpha / 2) f(\tau) d\tau \right\| \to 0$$

при $s_1, s_2 \to 0$.

Требуемое утверждение вытекает из полноты пространства Q.

Обозначим

$$\lim_{s\to+0}\int_s^b \tilde{U}(\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^b \tilde{U}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Следствие 1. *В пространстве* Q *для любого* $z_1 \in Q$ *существует*

$$\lim_{s\to+0}\int_s^b \tilde{U}(\tau)z_1 d\tau = \int_0^b \tilde{U}(\tau)z_1 d\tau.$$

Пусть функция y принимает значения в пространстве Q. Производной функции y в точке t_0 называется такой элемент $y'(t_0) \in Q$, что при любом $\alpha > 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0} p_\alpha\left(\frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} - y'(t_0)\right) = 0.$$

2. ГЕНЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ $\tilde{U}$

Пусть $\tilde{U}'(0)$ — производящий оператор полугруппы $\tilde{U}$, т.е. оператор, заданный формулой

$$\tilde{U}'(0)x = \lim_{t\to+0}((\tilde{U}(t)x - x)\,/\,t), \tag{5}$$

с областью определения, состоящей из тех элементов $x \in Q$, для которых существует в Q предел в правой части (5).

Следующее определение взято из [1]. Старшим генератором полугруппы U называется отношение $\mathbb{A}$, состоящее из таких пар $\{x, x_1\} \in X \times X$, что $x \in \overline{\mathcal{R}(U)}$ $(\mathcal{R}(U) = \cup_{t>0}\mathcal{R}(U(t)))$ и

$$U(t)x - U(s)x = \int_s^t U(\tau)x_1 d\tau,\ \ 0 < s \leqslant t < \infty. \tag{6}$$

Из равенства $\ker U = \{0\}$ следует, что $\mathbb{A}$ является оператором [1]. Таким образом, в равенстве (6) $x_1 = \mathbb{A}x$.

В этом разделе устанавливается связь между производящим оператором $\tilde{U}'(0)$ полугруппы $\tilde{U}$ и старшим генератором $\mathbb{A}$ полугруппы U. Утверждения, касающиеся производящего оператора, в основном, известны. Их можно найти, например, в [7, гл. 9], где они доказываются иным способом.

Лемма 2. $\widehat{\mathbb{A}}$ *является оператором с областью определения, состоящей из тех и только тех элементов* $z \in Q$, *для каждого из которых найдется такой элемент* $z_1 \in Q$, *что при всех* s, t $(0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ *выполняется равенство*

$$\tilde{U}(t)z - \tilde{U}(s)z = \int_s^t \tilde{U}(\tau)z_1 d\tau. \tag{7}$$

При этом $z_1 = \widehat{\mathbb{A}}z$.

Доказательство. Переходя в (6) к пределу при $s \to +0$, учитывая теорему 1 и следствие 1, получим, что если пара $\{z, z_1\} \in \widehat{\mathbb{A}}$, то элементы z, z_1 удовлетворяют равенству (7). Обратно, пусть для пары $\{z, z_1\}$ выполняется (7). Тогда пара $\{\tilde{U}(\alpha)z, \tilde{U}(\alpha)z_1\} \in \mathbb{A}$. При $\alpha_n \to +0$ $(n \in \mathbb{N})$ последовательность пар $\{\tilde{U}(\alpha_n)z, \tilde{U}(\alpha_n)z_1\}$ сходится к паре $\{z, z_1\}$ в пространстве $Q \times Q$. Поэтому $\{z, z_1\} \in \widehat{\mathbb{A}}$. Из равенства $\ker \tilde{U} = \{0\}$ следует, что отношение $\widehat{\mathbb{A}}$ является оператором. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Справедливо равенство* $\widehat{\mathbb{A}} = \tilde{U}'(0)$.

Доказательство. Положим в (7) $s = 0$. Тогда для любого $\alpha > 0$ и всех $z \in \mathcal{D}(\widehat{\mathbb{A}})$ имеем

$$U(\alpha)(\tilde{U}(t)z - z)\,/\,t = \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{U}(\alpha+\tau)\tilde{\mathbb{A}}z d\tau$$

Отсюда и из определения полунормы (3) получим

$$\lim_{t\to+0} p_\alpha((\tilde{U}(t)z - z)\,/\,t - \widehat{\mathbb{A}}z) =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{U}(\alpha+\tau)\widehat{\mathbb{A}}z d\tau - \tilde{U}(\alpha)\widehat{\mathbb{A}}z\right\| = 0.$$

Таким образом, $\widehat{\mathbb{A}} \subset \tilde{U}'(0)$.

Из (5) и теоремы 1 для любого $x \in \mathcal{D}(\tilde{U}'(0))$ получим

$$\tilde{U}(s)\tilde{U}'(0)x =$$

$$= \lim_{t\to+0}((\tilde{U}(t+s)x - \tilde{U}(s)x)\,/\,t) = \tilde{U}'(s)x.$$

Интегрируя левую и правую части последних равенств и учитывая сильную непрерывность функции $\tilde{U}(s)$, получим

$$\tilde{U}(t)x - \tilde{U}(s)x = \int_s^t \tilde{U}(\tau)\tilde{U}'(0)x d\tau$$

$$(0 < s \leqslant t < \infty).$$

Из леммы 2 получаем, что $\tilde{U}'(0) \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Оператор* $\tilde{U}'(0)$ *замкнут в* Q.

Замечание 2. *Из леммы 2 вытекает, что* $\mathbb{A}$ *является сужением* $\tilde{U}'(0)$ *на* X.

Лемма 3. $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ *плотно в* Q.

Доказательство. Если $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то для любого $z \in Q$ последовательность $\{\tilde{U}(\alpha_n)z\}$ сходится к z в пространстве Q. Поэтому $\widehat{\mathcal{R}(U)} = Q$. Из равенства $\overline{\mathcal{R}(U)} = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{A})}$ [1] и из теоремы 1 следует, что $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ плотно в Q. Топология в X сильнее чем в $\mathbb{X}_0$. Поэтому $\widehat{\mathcal{D}(\mathbb{A})} = Q$.

Лемма 3 доказана.

Следствие 3. $\mathcal{D}(\widehat{\mathbb{A}})$ *плотно в* Q.

Далее ω обозначает тип полугруппы U, т.е. $\omega = \lim_{t\to+0} t^{-1}\ln\|U(t)\|$. Как известно (см, например, [8, с. 42]), $\omega < \infty$. Если $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то для любого элемента $z \in Q$ в пространстве X существует предел

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)z = 0. \qquad (8)$$

Действительно, $e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)z = e^{-\lambda t}U(t-\alpha)\tilde{U}(\alpha)z \to 0$ при $t \to \infty$.

Лемма 4. *В пространстве* Q *для любого* $z \in Q$ *и любого* λ $(\mathrm{Re}\lambda > \omega)$ *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)zdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)zdt$$

(в правой части равенства стоит обозначение этого предела).

Доказательство. Для любого $\alpha > 0$

$$p_\alpha\left(\int_0^N e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)zdt - \int_0^{N_1} e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)zdt\right) =$$

$$= \left\|\int_0^N e^{-\lambda t}U(t)\tilde{U}(\alpha)zdt - \int_0^{N_1} e^{-\lambda t}U(t)\tilde{U}(\alpha)zdt\right\| \to 0$$

при $N, N_1 \to \infty$. Требуемое утверждение следует из полноты Q.

Замечание 3. *Из доказательства леммы 4 следует, что при* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ *в пространстве* Q

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)z_n dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)zdt,$$

если последовательность $\{z_n\}$ *сходится к* z *в* Q.

Таким образом, в пространстве Q всюду определен и непрерывен оператор $\mathcal{F}(\lambda)$, заданный равенством

$$\mathcal{F}(\lambda)z = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\tilde{U}(\tau)zd\tau,\ z \in Q,\ \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. *Тогда* $\lambda \in \rho(\widehat{\mathbb{A}})$ *и* $(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)^{-1} = \mathcal{F}(\lambda)$.

Доказательство. Оператор $\mathbb{A} - \lambda E$ является старшим генератором полугруппы $e^{-\lambda t}U(t)$ [1]. Поэтому из равенства (7), следствия 3, а также из замкнутости $\widehat{\mathbb{A}}$ и перестановочности операторов $\widehat{\mathbb{A}}$ и $\tilde{U}(t)$ следует, что для любого $z \in Q$

$$(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)\int_0^N e^{-\lambda\tau}\tilde{U}(\tau)zd\tau = e^{-\lambda t}\tilde{U}(N)z - z.$$

Отсюда, используя (8), замкнутость оператора $\widehat{\mathbb{A}}$, получим

$$(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)\mathcal{F}(\lambda)z = z.$$

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$y'(t) = \widehat{\mathbb{A}}y(t),\ t \geqslant 0. \qquad (9)$$

Решением этого уравнения называется функция y, удовлетворяющая условиям: 1) $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathbb{A}})$ при всех $t \geqslant 0$; 2) y дифференцируема в Q при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет уравнению (9).

Теорема 4. *Для любого* $x_0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathbb{A}})$ *задача Коши для уравнения (9) с начальным условием*

$$y(0) = x_0 \qquad (10)$$

имеет единственное решение. Это решение имеет вид $y(t) = \tilde{U}(t)x_0$.

Доказательство. Из перестановочности операторов $\widehat{\mathbb{A}}$ и $\tilde{U}(t)$ и из леммы 2 следует, что функция $\tilde{U}(t)x_0$ является решением задачи (9), (10). Осталось доказать единственность.

Пусть $y(t)$ — решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$. Пусть $0 \leqslant s < t$. Для любого $\alpha > 0$ функция $g(s) = U(s)\tilde{U}(\alpha)y(t-s)$ дифференцируема по s в X. Действительно, из определения решения и из перестановочности $\widehat{\mathbb{A}}$ и $\tilde{U}(t)$ вытекает, что $\tilde{U}(\alpha/2)y(t-s) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathbb{A}})$ при фиксированных t, s. Кроме того, функция $U(s+\alpha/2)$ сильно непрерывна в X, а функция $\tilde{U}(\alpha/2)y(t-s)$ сильно дифференцируема по s в X. Тогда теорема 2 и равенство

$$g(s+\Delta s) - g(s) =$$
$$= U(s+\Delta s)\tilde{U}(\alpha)(y(t-s-\Delta s) - y(t-s)) +$$
$$+(U(s+\Delta s) - U(s))\tilde{U}(\alpha)y(t-s)$$

влекут дифференцируемость g и

$$g'(s) = -U(s)\tilde{U}(\alpha)\widehat{\mathbb{A}}y(t-s) +$$
$$+U(s)\tilde{U}(\alpha)\widehat{\mathbb{A}}y(t-s) = 0.$$

Поэтому $g(s)$ — постоянная функция, $g(s) = g(0) = \tilde{U}(\alpha)y(t)$. Таким образом, $U(s)\tilde{U}(\alpha)y(t-s) = \tilde{U}(\alpha)y(t)$. Переходя здесь к пределу при $s \to t$ и учитывая, что $y(0) = 0$, получим $0 = \tilde{U}(\alpha)y(t)$. Равенство $\ker U = \{0\}$ влечет $y(t) = 0$. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. *Аналогично доказывается, что задача Коши с начальным условием (10) для уравнения*

$$y'(t) = (\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)y(t).$$

имеет единственное решение $y(t) = e^{-\lambda t}\tilde{U}(t)x_0$.

3. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Условие (ii) в определении слабого решения равносильно тому, что для любых пар $\{g, g_1\} \in \mathcal{A}^*$ скалярная функция $\langle y(t), g\rangle$ абсолютно непрерывна на $(0, \infty)$ и

$$\langle y(t), g\rangle' = \langle y(t), g_1\rangle. \tag{11}$$

Лемма 5. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ замкнут в X. Функция $y \in L_{1,loc}(X)$ тогда и только тогда является слабым решением уравнения (1), когда для всех s, t $(0 < s < t)$*

$$\int_s^t y(\tau)d\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \text{ и } \mathcal{A}\int_s^t y(\tau)d\tau = y(t) - y(s).$$

Доказательство. Для любых пар $\{g, g_1\} \in \mathcal{A}^*$ из равенства (11) получим

$$\langle \int_s^t y(\tau)d\tau, g_1\rangle = \langle y(t) - y(s), g\rangle.$$

Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует требуемое утверждение.

Лемма 6. *Пусть в уравнении (1) $\mathcal{A}$ — такой оператор, что $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Тогда для любого слабого решения $y(t)$ и любых $t, s > 0$ выполняется равенство*

$$U(t)y(s) = y(t+s). \tag{12}$$

Доказательство. Отметим сначала, что условие $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{A}}$ влечет $\overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Это вытекает из включений $\overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Из (11) следует, что если $y(t)$ — слабое решение (1), то $e^{-\lambda t}y(t)$ является слабым решением уравнения (1), в котором оператор $\mathcal{A}$ заменен на $\mathcal{A} - \lambda E$. Из леммы 5 получаем

$$(\overline{\mathcal{A}} - \lambda E)\int_s^t e^{-\lambda\tau}y(\tau)d\tau = e^{-\lambda t}y(t) - e^{-\lambda s}y(s),$$
$$0 < s < t.$$

Отсюда, учитывая включение $\overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathbb{A}}$, получим

$$(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)\int_s^t e^{-\lambda\tau}y(\tau)d\tau = e^{-\lambda t}y(t) - e^{-\lambda s}y(s). \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Тогда по теореме 3 $\lambda \in \rho(\widehat{\mathbb{A}})$. Обозначим $z(t) = (\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)^{-1}y(t)$. Из (13) следует

$$\int_s^t e^{-\lambda\tau}(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)z(\tau)d\tau = e^{-\lambda t}z(t) - e^{-\lambda s}z(s).$$

В последнем равенстве сделаем замену $\xi = \tau - s$ и обозначим $z_1(\xi) = z(\xi + s)$, $\xi \geqslant 0$. Тогда получим

$$\int_0^{t-s} e^{-\lambda\xi}(\widehat{\mathbb{A}} - \lambda E)z_1(\xi)d\xi = e^{-\lambda(t-s)}z_1(t-s) - z_1(0).$$

Отсюда следует, что функция z_1 является решением уравнения (9). По теореме 4 $z_1(\xi) = \tilde{U}(\xi)z_1(0)$. Следовательно, $z(t+s) = \tilde{U}(t)z(s)$. Отсюда получаем (12). Лемма 6 доказана.

Для полугруппы класса C_0 в предположении, что слабые решения сильно непрерывны в X, формула (12) другим способом доказана в [2].

Следствие 4. *Всякое слабое решение уравнения (1) с оператором $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{A}}$ сильно непрерывно в X на $(0, \infty)$.*

Теорема 5. *Пусть $y(t)$ — слабое решение уравнения (1) с оператором $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Тогда в пространстве Q существует предел $\lim\limits_{t\to+0} y(t) = y_-$ и $y(t) = \tilde{U}(t)y_-$.*

Доказательство. Для любого $\alpha > 0$ и всех достаточно малых $t_1, t_2 > 0$ получим из леммы 6 и из следствия 4

$$p_\alpha(y(t_1) - y(t_2)) =$$
$$= \|U(\alpha)y(t_1) - U(\alpha)y(t_2)\| =$$
$$= \|y(t_1 + \alpha) - y(t_2 + \alpha)\| \to 0$$

при $t_1, t_2 \to 0$.

Отсюда и из полноты пространства Q следует первое утверждение теоремы.

Обозначим $z(t) = y(t) - \tilde{U}(t)y_-$. Согласно теореме 1 в пространстве Q выполняется равенство $\lim\limits_{t\to+0} z(t) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{t\to+0} p_\alpha(z(t)) = 0$ для всех $\alpha > 0$. С другой стороны, из леммы 6 и из следствия 4 получаем, что

$$p_\alpha(z(t)) = \|U(\alpha)z(t)\| =$$
$$= \|z(t+\alpha)\| \to \|z(\alpha)\| \text{ при } t \to +0.$$

Отсюда вытекает, что $z(\alpha) = 0$ для всех $\alpha > 0$. Теорема 5 доказана.

Вообще говоря, равенство $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathbb{A}}$ не означает, что $\mathcal{A}$ перестановочен с $U(t)$.

Пример. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$; $U(t) = e^{-tA}$ $(t > 0)$, где A — самосопряженный положительно определенный оператор в X; A_0 — замкнутый симметрический плотно определенный оператор, $A_0 \subset A$, $A_0 \neq A$. Тогда при любом фиксированном $t > 0$ операторы $U(t)A$ и $U(t)A_0$ плотно определены и ограничены в X. Следовательно, если $x_n \in \mathcal{D}(A_0)$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x \in \mathcal{D}(A)$, то последовательности $\{U(t)x_n\}$, $\{U(t)A_0x_n\}$ сходятся соответственно к $U(t)x$, $U(t)Ax$. Поэтому $\widehat{A_0} = \widehat{A}$. Докажем, что A_0 и $U(t)$ — неперестановочные операторы. Предположим противное. Пусть $U(t)z \in \mathcal{D}(A_0)$ для любого $z \in \mathcal{D}(A_0)$. Если $A_0^*v = 0$ $(v \neq 0)$, то, учитывая, что A, $U(t)$

перестановочны и $U(t)x \in \mathcal{D}(A)$ при всех $x \in X$, получим

$$0 = (U(t)z, A_0^* v) = (A_0 U(t)z, v) = \\ = (U(t)A_0 z, v) = (z, A\,U(t)v).$$

Отсюда $A\,U(t)v = 0$, что невозможно.

Отметим также, что не при всяком $x \in X$ функция $U(t)x = e^{-At}x$ является слабым решением уравнения (1), в котором оператор $\mathcal{A}$ заменен на A_0. Действительно, пусть $e^{-At}v$ является слабым решением. Тогда из леммы 5 следует, что $A^{-1}(e^{-As}v - e^{-At}v) \in \mathcal{D}(A_0)$ при всех $s,t \quad (0 < s < t)$. Поэтому $(e^{-As}v - e^{-At}v, v) = 0$, что невозможно при $v \neq 0$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathbb{A}}$, $\widehat{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = Q$ *и замыкание* $\overline{\mathcal{A}}$ *перестановочно с операторами* $U(t)$, $t > 0$. *Тогда для любого* $x \in Q$ *функция* $\tilde{U}(t)x$ *является слабым решением уравнения (1).*

Доказательство. Как установлено в доказательстве леммы 6, $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathbb{A}$. В случае $x \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$ требуемое утверждение следует из равенства (6) и перестановочности операторов $U(t)$ и $\overline{\mathcal{A}}$. Пусть $x \in Q$. Тогда существует последовательность элементов $x_n \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$, сходящаяся к x в Q. Согласно определению полунормы (3) это означает, что $\left\|\tilde{U}(\alpha)x_n - \tilde{U}(\alpha)x\right\|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого фиксированного положительного $\alpha > 0$. Поэтому последовательность функций $y_n(t) = U(t)\tilde{U}(\alpha)x_n$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $y(t) = U(t)\tilde{U}(\alpha)x = \tilde{U}(t+\alpha)x$ на любом интервале $[2\alpha, b]$ $\left(b > 2\alpha\right)$. Отсюда и из равенства (2) следует требуемое утверждение.

Следствие 5. *Если в уравнении (1)* $\mathcal{A}$ *является генератором полугруппы* U *[1], то для любого* $x \in Q$ *функция* $\tilde{U}(t)x$ *является слабым решением уравнения (1).*

Другим способом это утверждение доказано в [3].

Через $\mathcal{A}_0$ обозначим отношение, состоящее из множества упорядоченных пар вида

$$\{\int_s^t U(\tau)x d\tau,\ U(t)x - U(s)x\}, \tag{14}$$

где $x \in X$, $0 < s < t < \infty$.

Лемма 7. $\mathcal{A}_0$ *— оператор, перестановочный с* $U(t)$, *и* $\widehat{\mathcal{A}_0} = \widehat{\mathbb{A}}$.

Доказательство. Из теорем 5, 6 следует, что слабые решения уравнения (1) с $\mathcal{A} = \mathbb{A}$ имеют вид $y(t) = \tilde{U}(t)z$, $z \in Q$. Тогда из леммы 5 вытекает, что $\mathcal{A}_0 \subset \mathbb{A}$. Поэтому $\mathcal{A}_0$ — оператор и $\widehat{\mathcal{A}_0} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Докажем обратное включение. Из теоремы 1 получаем, что при любых $z \in Q$ и $t > 0$

$$\{t^{-1}\int_0^t U(\tau)z d\tau,\ t^{-1}(U(t)z - z)\} \in \widehat{\mathcal{A}_0}.$$

Следовательно, для любого $z \in \mathcal{D}(\tilde{U}'(0))$ пара $\{z, \tilde{U}'(0)z\} \in \widehat{\mathcal{A}_0}$. Теорема 2 влечет $\widehat{\mathbb{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}_0}$. Перестановочность следует из (14). Лемма 7 доказана.

Теорема 7. *Пусть в уравнении (1) оператор* $\mathcal{A}$ *таков, что его замыкание* $\overline{\mathcal{A}}$ *перестановочно с операторами* $U(t)$, $t > 0$. *Множество слабых решений уравнения (1) тогда и только тогда состоит из функций вида* $y(t) = \tilde{U}(t)z$, *где* $z \in Q$, *когда* $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathbb{A}}$.

Доказательство. В случае, когда $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathbb{A}}$, требуемое утверждение следует из теорем 5, 6. Обратно, пусть множество слабых решений уравнения (1) состоит из функций вида $y(t) = \tilde{U}(t)z$, $z \in Q$. Докажем сначала, что замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ является оператором. Пусть пара $\{0, x_1\} \in \overline{\mathcal{A}}$. Из перестановочности $\overline{\mathcal{A}}$ и $U(t)$ следует, что пара $\{0, U(t)x_1 - U(s)x_1\} \in \overline{\mathcal{A}}$ для всех $t, s > 0$. С другой стороны, $U(t)x_1$ является слабым решением (1). Из (11) получаем, что для всех $t, s > 0$ пара

$$\{\int_s^t U(\tau)x_1 d\tau,\ U(t)x_1 - U(s)x_1\} \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Поэтому $\int_s^t U(\tau)x_1 d\tau \in \ker\overline{\mathcal{A}}$. Следовательно, $U(t)x_1 \in \ker\overline{\mathcal{A}}$ для всех $t > 0$. Таким образом, $U(\alpha)x_1 \in \ker\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{A}}(0)$ для любого $\alpha > 0$. Отсюда и из (11) вытекает, что функция $y(t) = tU(\alpha)x_1$ — слабое решение (1). Поэтому найдется такой элемент $z_0 \in Q$, что $tU(\alpha)x_1 = U(t)z_0$. Переходя здесь к пределу в пространстве Q при $t \to 0$, получим $z_0 = 0$. Следовательно, $U(\alpha)x_1 = 0$ для всех $\alpha > 0$. Равенство $\ker U = \{0\}$ влечет $x_1 = 0$.

Итак, доказано, что $\overline{\mathcal{A}}$ является оператором. Из леммы 5 следует, что $\mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{A}}$. Отсюда получаем, что $\widehat{\mathcal{A}_0} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. Лемма 7 влечет $\widehat{\mathbb{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. С другой стороны, из перестановочности $\overline{\mathcal{A}}$ и $U(t)$ и леммы 5 следует для любого $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\overline{\mathcal{A}}\int_s^t U(\tau)x d\tau = \int_s^t U(\tau)\overline{\mathcal{A}}x d\tau = \\ = U(t)x - U(s)x,\ 0 < s < t.$$

Отсюда и из (6) получаем, что $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathbb{A}$. Следовательно, $\widehat{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathbb{A}}$. Таким образом, $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathbb{A}}$. Теорема 7 доказана.

Следствие 6. *Пусть оператор* $\mathcal{A}$ *является одним из генераторов [1] полугруппы* U. *Тогда* $\widehat{\mathcal{A}} = \tilde{U}'(0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп // Матем. зам. — 2008. — Т. 84, 2. — С. 175 — 192.

2. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, 5. — С. 785 — 808.

3. *Брук В. М.* О слабых решениях дифференциальных включений // Spectral and evolution problems. Simferopol — 2009. — V. 19. — C. 28 — 34.

4. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН, Серия матем. — 2009. — Т. 73, 2. — С. 3 — 68.

5. *Рудин У.* Функциональный анализ // Москва: Мир, 1975.

6. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи матем. наук — 1989. — Т. 44, 3. — С. 55 — 91.

7. *Иосида К.* Функциональный анализ // Москва: Мир, 1967.

8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Москва: Наука, 1967.

Брук Владислав Моисеевич — доцент кафедры математики Саратовского государственного технического университета, тел.: 63-38-42, e-mail: vladislavbruk@mail.ru

Vladislav Bruk — Associate professor, Chair of Mathematics, Saratov State Technical University, e-mail: vladislavbruk@mail.ru