УДК 515.126.4

ТЕОРЕМЫ О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ*

Е. С. Барановский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.02.2010 г.

Аннотация. В работе изучается структура множества решений включений вида $A(u) \in G(u)$, где A — однозначное отображение, удовлетворяющее условию $(S)_+$, G — A-уплотняющее многозначное отображение. Полученные результаты применяются при исследовании задачи оптимального управления внешними силами в одной модели изгиба пластины.
Ключевые слова: операторное включение, $(S)_+$-отображение, уплотняющее многозначное отображение, топологическая степень, связное множество, управление с обратной связью.

Abstract. In paper is investigated structure of solutions set of inclusions $A(u) \in G(u)$, where A is singlevalued map satisfying condition $(S)_+$, G is A-condensing multivalued map. The obtained results are applied the study of a problem of optimal control by external forces in one model of plate deformation.
Keywords: operator inclusion, $(S)_+$-mapping, condensing multivalued mapping, topological degree, connected set, feedback control.

Введение. Операторные включения (в другой терминологии — уравнения с многозначными операторами) естественно возникают при изучении задач оптимального управления (см., например, [1]), вариационных неравенств (см., например, [2]) и многих других задач. При качественном исследовании такого рода задач удобным средством является использование топологических характеристик соответствующих многозначных отображений.

В настоящей заметке на основе разработанной в [3—5] теории топологической степени многозначных возмущений $(S)_+$-отображений изучаются включения вида $A(u) \in G(u)$, где A — однозначное отображение, удовлетворяющее условию $(S)_+$, G — A-уплотняющее многозначное отображение. В работе рассматривается вопрос о разрешимости данного класса включений и изучаются некоторые топологические свойства (компактность, связность) множества решений. Полученные результаты применяются при изучении структуры множества решений задачи управления с обратной связью внешними силами в одной модели изгиба пластины.

Приведем краткий обзор содержания работы.

В первом пункте приводятся необходимые сведения о степени многозначных возмущений $(S)_+$-отображений.

Во втором пункте устанавливаются условия, при которых включение $A(u) \in G(u)$ разрешимо и множество его решений компактно и связно. Основной результат этого пункта — теорема 1. Это утверждение является обобщением принципа связности Красносельского-Перова [6] на случай операторных включений $A(u) \in G(u)$. Аналогичный результат о структуре множества неподвижных точек вполне непрерывных многозначных векторных полей был получен ранее в работе Б. Д. Гельмана [7].

Теорема 1 позволила установить некоторые частные результаты. Так, с помощью этой теоремы получены достаточно простые условия связности и компактности множества решений включения $A(u) \in F(u)$ с нерастягивающим (по метрике Хаусдорфа) относительно A многозначным отображением F (теорема 2).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00143-а

В третьем пункте на основе полученных результатов доказывается существование оптимальных решений задачи управления с обратной связью внешними силами в одной модели изгиба пластины и устанавливаются условия, при которых множество решений этой задачи является связным и компактным (теорема 3).

1. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ МНОГОЗНАЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ $(S)_+$ —ОТОБРАЖЕНИЙ

В работе [5] предложена теория степени обобщенно уплотняющих многозначных возмущений отображений класса $(S)_+$. В этом пункте приводятся необходимые в дальнейшем факты этой теории. Сначала напомним основные понятия.

Пусть X — действительное рефлексивное банахово пространство, X^* — его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$. Для элементов $x \in X$ и $h \in X^*$ через $\langle h, x\rangle$ обозначим действие функционала h на элементе x.

Рассмотрим отображение $A : \bar{D} \to X^*$, где D — произвольное ограниченное открытое множество пространства X, а $\bar{D}$ — его замыкание.

Определение 1. *Оператор A называется деминепрерывным на $\bar{D}$, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset \bar{D}$, сильно сходящейся к $u_0 \in \bar{D}$, последовательность $\{A(u_n)\}$ слабо сходится к $A(u_0)$.*

Определение 2. *(см. [8]). Будем говорить, что оператор $A : \bar{D} \to X^*$ удовлетворяет условию $(S)_+$, если для произвольной последовательности $\{u_n\} \subset \bar{D}$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle \leqslant 0$ следует $u_n \to u_0$.*

Важное свойство деминепрерывных отображений класса $(S)_+$ сформулировано в следующей лемме.

Лемма 1. *(см. [9]). Пусть отображение $A : \bar{D} \to X^*$ деминепрерывно и удовлетворяет условию $(S)_+$. Тогда A является собственным отображением, то есть для любого компакта $K \subset X^*$ множество $A^{-1}(K) = \{x \in \bar{D} : A(x) \in K\}$ компактно в X.*

Приведем теперь определение одного класса многозначных отображений, обозначаемого символом $\mathcal{CJ}$. Но сначала напомним некоторые понятия (см. [1, 10, 11]).

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ — метрические пространства.

Определение 3. *Многозначное отображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in \mathcal{X}$, если для любого открытого множества $V \subset \mathcal{Z}$ такого, что $\Sigma(x_0) \subset V$, найдется U_{x_0} — окрестность точки x_0 такая, что $\Sigma(U_{x_0}) \subset V$.*

Многозначное отображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in \mathcal{X}$.

Определение 4. *Непустое компактное подмножество M метрического пространства $\mathcal{Z}$ называется асферичным (или ∞-близостно связным), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ, $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что для каждого $n = 0,1,\ldots$ любое непрерывное отображение $g : S^n \to O_\delta(M)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{g} : B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$,* где S^n, B^{n+1} — единичные сфера и шар в $\mathbb{R}^{n+1}$. *Здесь, как обычно, $O_\delta(M)$, $O_\varepsilon(M)$ обозначают соответствующие окрестности множества M.*

Определение 5. *Многозначное отображение $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется J-мультиотображением ($\Sigma \in J(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$), если оно полунепрерывно сверху и имеет асферичные значения, то есть для любого $x \in X$ множество $\Sigma(x)$ является асферичным.*

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{Z}$ — метрические пространства. Символом $\mathcal{CJ}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ будем обозначать совокупность всех мультиотображений $G : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ вида $G = \varphi \circ \Sigma$, где $\Sigma \in J(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}'$ — непрерывное однозначное отображение.

Чтобы отметить насколько широк класс $\mathcal{CJ}$-мультиотображений, напомним [11], что примерами асферичных множеств в линейном нормированном пространстве служат компактные выпуклые или стягиваемые множества, R_δ-множества.

В работе рассматриваются так называемые A-уплотняющие CJ-мультиотображения. Для того чтобы описать этот класс многозначных отображений, нам потребуется понятие меры некомпактности (см., например, [12]).

Пусть X — действительное банахово пространство. Символом $\overline{co}M$ обозначим замыкание выпуклой оболочки множества M.

Определение 6. *Функция ψ, сопоставляющая каждому ограниченному множеству $M \subset X$ неотрицательное число $\psi(M)$ называется мерой некомпактности, если*

i) $\psi(\overline{co}M) = \psi(M)$ для любого ограниченного множества $M \subset X$, *ii)* $\psi(M_1)\leqslant\psi(M_2)$ *для любых ограниченных множеств* $M_1, M_2\subset X$ *таких, что* $M_1\subset M_2$.

В дальнейшем будем предполагать, что мера некомпактности ψ обладает еще тремя свойствами.

iii) *множество* $M\subset X$ *относительно компактно в том и только том случае, когда* $\psi(M)=0$,

iv) $\psi(M\cup K)=\psi(M)$, *если* K *— относительно компактное множество,*

v) $\psi(M_1+M_2)\leqslant\psi(M_1)+\psi(M_2)$.

Всем описанным выше свойствам удовлетворяют *мера некомпактности Хаусдорфа* $\chi(M)$ — точная нижняя граница тех $\varepsilon>0$, при которых множество M имеет конечную ε-сеть.

Зафиксируем некоторую меру некомпактности ψ со свойствами $i)-v)$. Пусть $A:X\to X^*$, $F:X\to X^*$ — ограниченные отображения.

Определение 7. *Отображение* F *называется* A*-уплотняющим, если*

$$\psi(F(\Omega))<\psi(A(\Omega))$$

для любого ограниченного множества $\Omega\subset X$ *такого, что множество* $F(\Omega)$ *не является относительно компактным.*

Пусть X — действительное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, Z — метрическое пространство. Пусть U — ограниченное открытое подмножество X такое, что для любого E конечномерного подпространства X множество $\overline{U\cap E}$ локально стягиваемо. Пусть выполнены условия:

a) *однозначное отображение* $A:\bar U\to X^*$ *деминепрерывно и удовлетворяет условию* $(S)_+$,

g) многозначное отображение $G=\varphi\circ\Sigma:\bar U\to X^*$ принадлежит классу $\mathcal{C}J(\bar U, X^*)$,

ga) *многозначное отображение* G *является* A*-уплотняющим.*

Обозначим через $Coin(A,G)=\{u\in\bar U: A(u)\in G(u)\}$ множество решений включения $A(u)\in G(u)$ и предположим, что

c) $Coin(A,G)\cap\partial U=\varnothing$.

Для многозначного отображения $A-G:\bar U\to X^*$, удовлетворяющего условиям *a), g), ga), c)*, определена $\mathrm{Deg}(A-G,\bar U,0)$ — целочисленная характеристика, называемая степенью $A-G$ относительно точки $0\in X^*$ (см. [5]). Эта характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени. Нам потребуются свойства, сформулированные в предложениях 1—3 (см. [5]).

Предложение 1. (Свойство аддитивной зависимости степени от области). *Пусть выполнены условия a), g), ga). Пусть* U' *и* U'' *— непересекающиеся открытые подмножества* U *такие, что*

$$Coin(A,G)\bigcap(\bar U\setminus(U'\cup U''))=\varnothing$$

и для любого E *конечномерного подпространства* X *множества* $\overline{U'\cap E}$, $\overline{U''\cap E}$ *локально стягиваемы. Тогда*

$$\mathrm{Deg}(A-G,\bar U,0)=$$
$$=\mathrm{Deg}(A-G,\bar U',0)+\mathrm{Deg}(A-G,\bar U'',0).$$

Рассмотренная характеристика является гомотопическим инвариантом.

Пусть операторы $A_i:\bar U\to X^*$, $i=0,1$ удовлетворяют условию a), а мультиотображения $G_i=\varphi_i\circ\Sigma_i:\bar U\to X^*$, $i=0,1$ удовлетворяют условиям *g), ga)*.

Определение 8. *Многозачные отображения* A_0-G_0 *и* A_1-G_1 *называются гомотопными, если для них выполнены условия:*

h1) *существует деминепрерывное отображение* $\tilde A:\bar U\times[0,1]\to X^*$ *такое, что*

$$\tilde A(\cdot,0)=A_0,\ \tilde A(\cdot,1)=A_1,$$

и для любых последовательностей $x_n\in\partial U$, $t_n\in[0,1]$ *из* $x_n\rightharpoonup x_0$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle\tilde A(x_n,t_n),x_n-x_0\rangle\le 0$$

следует $x_n\to x_0$,

h2) *существует многозначное отображение* $\tilde\Sigma\in J(\bar U\times[0,1],Z)$ *такое, что*

$$\tilde\Sigma(\cdot,0)=\Sigma_0,\ \tilde\Sigma(\cdot,1)=\Sigma_1,$$

и однозначное непрерывное $\tilde\varphi:Z\times[0,1]\to X^*$ *такое, что*

$$\tilde\varphi(\cdot,0)=\varphi_0,\ \tilde\varphi(\cdot,1)=\varphi_1,$$

h3) *многозначное отображение* $\tilde G:\bar U\times[0,1]\to K(X^*)$ *заданное по правилу*

$$\tilde G(x,t)=\tilde\varphi(\tilde\Sigma(x,t),t),\ (x,t)\in\bar U\times[0,1],$$

является $\tilde A$*-уплотняющим, то есть*

$$\psi(\widetilde G(\widetilde\Omega))<\psi(\widetilde A(\widetilde\Omega))$$

для любого $\widetilde\Omega\subset\bar U\times[0,1]$ *такого, что множество* $\widetilde G(\widetilde\Omega)$ *не является относительно компактным.*

h4) *множество* $Coin(\tilde A,\tilde G)\bigcap(\partial U\times[0,1])$ *пусто.*

Замечание 1. *Если* $\widetilde{A}(x,t) = A(x), \forall t \in [0,1]$, *то для выполнения условия* $h3)$ *достаточно потребовать, чтобы*

$$h3') \quad \psi(\widetilde{G}(\Omega \times [0,1])) < \psi(A(\Omega))$$

для каждого $\Omega \subset \bar{U}$ *такого, что множество* $\widetilde{G}(\Omega \times [0,1])$ *не является относительно компактным.*

Предложение 2. (Свойство гомотопической инвариантности степени).

Если многозначные отображения $A_0 - G_0$ *и* $A_1 - G_1$ *гомотопны, то*

$$\mathrm{Deg}(A_0 - G_0, \bar{U}, 0) = \mathrm{Deg}(A_1 - G_1, \bar{U}, 0).$$

Справедливо также

Предложение 3. *Пусть выполнены условия a), g), ga), c) и*

$$\mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}, 0) \neq 0.$$

Тогда множество $Coin(A,G)$ *непусто и компактно.*

2. ТЕОРЕМЫ О СВЯЗНОСТИ И КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Прежде всего напомним понятие связного множества. Пусть X — топологическое пространство.

Определение 9. *Множество* $M \subset X$ *называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых открытых (в индуцированной топологии) непересекающихся множеств.*

Как и прежде через X будем обозначать сепарабельное рефлексивное банахово пространство, а через $\mathcal{Z}$ — метрическое пространство. Пусть U — открытое ограниченное подмножество X.

Теорема 1. *Предположим, что деминепрерывное отображение* $A: \bar{U} \to X^*$ *удовлетворяет условию* $(S)_+$, *а многозначное отображение* $G = \varphi \circ \Sigma \in CJ(\bar{U}, X^*)$ *является* A*-уплотняющим. Пусть определена степень*

$$\mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}, 0) \neq 0.$$

Предположим также, что для любого $\varepsilon > 0$ *и любой точки* $x_0 \in Coin(A,G)$ *существует мультиотображение* $\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0} : \bar{U} \times [0,1] \to \mathcal{Z}$, $\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0} \in J(\bar{U} \times [0,1], \mathcal{Z})$ *такое, что*

i) $\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0}\Big|_{\bar{U}\times\{0\}} = \Sigma, \ \widetilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0}\Big|_{\bar{U}\times\{1\}} = \sigma_{\varepsilon,x_0}$,

где σ_{ε,x_0} *— непрерывное однозначное отображение,*

ii) множество $Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0})$ *связно,*

iii) существует точка $x \in Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0})$, *для которой* $\|x - x_0\|_X < \varepsilon$, *и для мультиотображения*

$$\widetilde{G}_{\varepsilon,x_0} : \bar{U} \times [0,1] \to X^*, \ \tilde{G}_{\varepsilon,x_0} = \varphi \circ \tilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0}$$

выполнены условия:

iv) при любом $t \in [0,1]$ *множество* $Coin(A, \tilde{G}_{\varepsilon,x_0}(\cdot, t))$ *принадлежит* ε*-окрестности* $Coin(A,G)$,

v) мультиотображение $\widetilde{G}_{\varepsilon,x_0}$ *является* A*-уплотняющим.*

Тогда множество $Coin(A,G)$ *непусто, компактно и связно.*

Доказательство. Непустота и компактность множества $Coin(A,G)$ следует из предложения 3. Докажем связность данного множества. Для этого предположим противное. Тогда $Coin(A,G)$ можно представить в виде

$$Coin(A,G) = P_0 \cup P_1,$$

где P_0, P_1 — непустые компактные непересекающиеся подмножества U.

Пусть число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$O_{\delta_0}(P_0) \cap O_{\delta_0}(P_1) = \varnothing,$$

$$U \supset \left(O_{\delta_0}(P_0) \cup O_{\delta_0}(P_1)\right).$$

Поскольку множества P_0, P_1 компактны, то существуют точки $x_{ij} \in P_i, \ i = 0,1; \ j = 1,\dots k_i$ такие, что

$$U_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} B(x_{ij}, \delta_0) \supset P_i, \ i = 0,1. \tag{1}$$

Ясно, что

$$U_0 \cap U_1 = \varnothing \tag{2}$$

и

$$Coin(A,G) \cap \left[\bar{U} \setminus (U_0 \cup U_1)\right] = \varnothing.$$

Нетрудно также показать, что для любого E конечномерного подпространства X множества $\overline{U_i \cap E}, \ i = 0,1$ локально стягиваемы. Поэтому, согласно предложению 1, имеем

$$\mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}, 0) =$$
$$= \mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}_0, 0) + \mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}_1, 0)$$

Так как степень в левой части этого равенства отлична от нуля, то хотя бы одно из слагаемых в правой части тоже отлично от нуля. Для определенности пусть

$$\mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}_1, 0) \neq 0.$$

Из включения (1) и компактности множеств P_0, P_1 следует, что существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$O_{\delta_1}(P_i) \subset U_i, \; i = 0,1. \qquad (3)$$

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in P_0$ и многозначное отображение $\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon,x_0}$, $0 < \varepsilon < \delta_1$, удовлетворяющее условиям теоремы. Из $i), iv), v)$ следует, что отображения $A - \varphi \circ \Sigma : \bar{U}_1 \to X^*$ и $A - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0} : \bar{U}_1 \to X^*$ гомотопны.

Поэтому

$$\mathrm{Deg}(A - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0}, \bar{U}_1, 0) =$$

$$= \mathrm{Deg}(A - G, \bar{U}_1, 0) \neq 0,$$

В этом случае, согласно предложению 3, имеем

$$Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0}) \cap U_1 \neq \varnothing.$$

С другой стороны, из условий $iii), iv)$ и включения (3) вытекает, что

$$Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0}) \cap U_0 \neq \varnothing,$$

и

$$Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0}) \subset [U_0 \cup U_1].$$

Из этих соотношений и равенства (2) следует, что множество $Coin(A, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon,x_0})$ является несвязным. Полученное противоречие (см. условие $ii)$) и доказывает теорему.

С помощью данной теоремы можно установить простые условия связности множества решений включений $A(x) \in F(x)$ с так называемыми нерастягивающими мультиотображениями.

Для этого нам потребуются понятия полуотклонения и метрики Хаусдорфа. Пусть A, B — непустые подмножества метрического пространства $\mathcal{X}$.

Определение 10. *Полуотклонением множества A от множества B называют величину (конечную или бесконечную)*

$$\rho_*(A,B) = \sup_{a \in A} \rho(a,B),$$

где $\rho(a,B) = \inf_{b \in B} \rho(a,b)$ — расстояние точки a до множества B.

Определение 11. *Метрикой Хаусдорфа называют функцию h, сопоставляющую двум непустым замкнутым множествам A, B величину*

$$h(A,B) = \max\{\rho_*(A,B), \; \rho_*(B,A)\}.$$

Теорема 2. *Пусть непрерывный оператор $A : \bar{U} \to X^*$ удовлетворяет условию $(S)_+$ и для любого $p \in X^*$ множество решений уравнения*

$$A(x) = p$$

связно.

Пусть полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : \bar{U} \to X^*$ является A-уплотняющим и для любого $x \in \bar{U}$ множество $F(x)$ выпукло.

Пусть определена степень $\mathrm{Deg}(A - F, \bar{U}, 0) \neq 0$.

Предположим также, что мультиотображение F является нерастягивающим относительно оператора A, то есть

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \| A(x_1) - A(x_2) \|_{X^*}$$

для всех $x_1, x_2 \in \bar{U}$.

Тогда множество $Coin(A,F)$ непусто, компактно и связно.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется одно вспомогательное утверждение о сечениях многозначных отображений.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$ — метрические пространства, E — банахово пространство.

Определение 12. *Сечением многозначного отображения $\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ называется однозначное отображение $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ такое, что $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$.*

Лемма 2. *Пусть $F : \mathcal{X} \to E$ — многозначное отображение с выпуклыми значениями, $g : \mathcal{X} \to E$ — непрерывное однозначное отображение. Предположим, что $Coin(g,F) \neq \varnothing$ и мультиотображение F является сжимающим относительно g, то есть существует число $k \in [0,1)$ такое, что*

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leqslant k \, \| g(x_1) - g(x_2) \|_E \qquad (4)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

Тогда для любых $x_* \in Coin(g,F)$ и $k_1 \in (k,1)$ существует $f_{x_*,k_1} : \mathcal{X} \to E$ — непрерывное сечение мультиотображения F такое, что

$$\| g(x_*) - f_{x_*,k_1}(x) \|_E \leqslant k_1 \, \| g(x_*) - g(x) \|_E \qquad (5)$$

для всех $x \in \mathcal{X}$.

Доказательство этой леммы весьма громоздко и здесь мы его приводить не будем (отсылая интересующихся к работе [7], где устанавливаются похожие утверждения).

Доказательство теоремы 2. Непустота и компактность множества $Coin(A,F)$ следуют из предложения 3. Покажем, что это множество связно.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in Coin(A,F)$. Рассмотрим мультиотображение $G_{\lambda,x_0} : \bar{U} \to X^*$, $\lambda \in (0,1)$, заданное равенством

$$G_{\lambda,x_0}(x) = (1-\lambda)F(x) + \lambda A(x_0). \qquad (6)$$

Ясно, что $x_0 \in Coin(A, G_{\lambda,x_0})$. Кроме того, из оценки

$$h(G_{\lambda,x_0}(u), G_{\lambda,x_0}(v)) =$$
$$= (1-\lambda)h(F(u),F(v)) \le (1-\lambda)\,\| A(u)-A(v)\|_{X^*}$$

справедливой для любых $u, v \in \bar{U}$, вытекает, что мультиотображение G_{λ,x_0} является сжимающим относительно оператора A. В этом случае, согласно лемме 2, существует непрерывное отображение $f_{\lambda,x_0} : \bar{U} \to X^*$, для которого

$$f_{\lambda,x_0}(x) \in G_{\lambda,x_0}(x), \;\; x \in \bar{U} \tag{7}$$

и с некоторой константой $k \in (1-\lambda, 1)$ выполнено неравенство

$$\| A(x_0) - f_{\lambda,x_0}(x)\|_{X^*} \le k \,\| A(x_0) - A(x)\|_{X^*} \tag{8}$$

для всех $x \in \bar{U}$.

Заметим, что $x_0 \in Coin(A, f_{\lambda,x_0})$ и множество $Coin(A, f_{\lambda,x_0})$ связно. В самом деле, с помощью неравенства (8) легко проверить, что $Coin(A, f_{\lambda,x_0}) = Q_{x_0}$, где множество $Q_{x_0} = \{x \in \bar{U} : A(x) = A(x_0)\}$, согласно условиям теоремы, является связным.

Далее, зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что многозначное отображение $\widetilde{F}_{\lambda,x_0} : \bar{U} \times [0,1] \to X^*$, определенное равенством

$$\widetilde{F}_{\lambda,x_0}(x,t) = (1-t)F(x) + t f_{\lambda,x_0}(x), \tag{9}$$

удовлетворяет (при достаточно малом $\lambda > 0$) условиям теоремы 1.

Для этого заметим следующее. Существует число $\lambda_\varepsilon > 0$ такое, что при $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$ множества $Coin(A, \widetilde{F}_{\lambda,x_0}(\cdot,t))$, $t \in [0,1]$ принадлежат ε-окрестности множества $Coin(A,F)$. Действительно, в противном случае найдутся такие последовательности $\lambda_n > 0, \lambda_n \to 0, t_n \in [0,1]$, $x_n \in \bar{U}$, что

$$x_n \in Coin(A, \widetilde{F}_{\lambda_n, x_0}(\cdot, t_n)), \tag{10}$$

$$\rho(x_n, Coin(A,F)) \ge \varepsilon. \tag{11}$$

Кроме того, из (9), (10) следует, что существует последовательность $y_n \in F(x_n)$ такая, что

$$A(x_n) = (1-t_n)y_n + t_n f_{\lambda_n, x_0}(x_n). \tag{12}$$

Из (6), (7) вытекает, что

$$\rho(f_{\lambda_n,x_0}(x_n), F(x_n)) \le c_0 \lambda_n,$$

где $c_0 = \| A(x_0)\|_{X^*} + \sup\limits_{y \in G(\bar{U})} \| y \|_{X^*}$.

Следовательно, существует последовательность $z_n \in F(x_n)$ такая, что последовательность

$$\omega_n = f_{\lambda_n,x_0}(x_n) - z_n \tag{13}$$

сходится к $0 \in X^*$.

Преобразуем равенство (12) с помощью (13):

$$A(x_n) = (1-t_n)y_n + t_n z_n + t_n \omega_n. \tag{14}$$

Так как $y_n, z_n \in F(x_n)$ и множество $F(x_n)$ выпукло, то

$$(1-t_n)y_n + t_n z_n \in F(x_n).$$

Поэтому, обозначив $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n \omega_n$, получим

$$A(M) \subset [F(M) + \Omega].$$

Из этого включения, из относительной компактности множества Ω и свойств $ii)$, $iii)$, $v)$ меры некомпактности ψ (см. с. 73) вытекает, что

$$\psi(A(M)) \leqslant \psi(F(M)).$$

Так как мультиотображение F является A-уплотняющим, то множество $F(M)$ относительно компактно. Это в свою очередь влечет относительную компактность множества $A(M)$ и, в силу собственности отображения A (см. лемму 1), относительную компактность множества M.

Поэтому, переходя (если это нужно) к подпоследовательности, будем полагать, что $x_n \to x_* \in \bar{U}$.

Из непрерывности отображения A и равенства (14) следует, что

$$(1-t_n)y_n + t_n z_n \to A(x_*).$$

Кроме того, поскольку мультиотображение F полунепрерывно сверху, $x_n \to x_*$ и $(1-t_n)y_n + t_n z_n \in F(x_n)$, получим $A(x_*) \in F(x_*)$, то есть $x_* \in Coin(A,F)$. Это включение вместе со сходимостью $x_n \to x_*$ противоречит (11).

Покажем теперь. что многозначное отображение $\widetilde{F}_{\lambda,x_0}$ является A-уплотнящим. Пусть $D \subset \bar{U}$ и множество $\widetilde{F}_{\lambda,x_0}(D \times [0,1])$ не является относительно компактным. Из определения мультиотображения $\widetilde{F}_{\lambda,x_0}$ и (7), (6) имеем

$$\widetilde{F}_{\lambda,x_0}(D \times [0,1]) \subset co[F(D) \cup co[F(D) \cup \{A(x_0)\}]].$$

Поэтому

$$\psi(\widetilde{F}_{\lambda,x_0}(D \times [0,1])) \leqslant \psi(F(D)) < \psi(A(D)).$$

Согласно замечанию 1, выполнение данного неравенства и означает A-уплотняемость мультиотображения $\widetilde{F}_{\lambda,x_0}$.

Таким образом, для многозначного отображения $\widetilde{F}_{\lambda,x_0}$, $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$, построенного для произвольных $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in Coin(A,F)$, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому множество $Coin(A,F)$ связно.

Теорема 2 доказана.

Пример использования этой теоремы содержится в следующем пункте.

3. О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

Как известно (см. [13]), в условиях установившейся ползучести задача об изгибе жестко закрепленной на краю пластины описывается уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g\left(H^2(w)\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[g\left(H^2(w)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[g\left(H^2(w)\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]= \\ = f(x,y),(x,y)\in\Omega, \tag{15}$$

и граничными условиями

$$w\big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial w}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0. \tag{16}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ — область пластины, w — скорость прогиба, g — функция, характерная для данного материала, причем такая, что $g(t^2)t$ — функция, возрастающая при $t\geqslant 0$; величина $H^2(w)$ определяется формулой

$$H^2(w)=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+ \\ +\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$f(x,y)$ — величина, пропорциональная внешней нормальной нагрузке, рассчитанной на единицу площади.

Для данной модели рассмотрим задачу управления с обратной связью внешними силами.

Предположим, что

$$f\in F(w), \tag{17}$$

где F — многозначное отображение, представляющее в системе управление с обратной связью.

Задачу (15)—(17) будем рассматривать в слабой постановке.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)$, $p>1$ подпространство соболевского пространства $W_p^2(\Omega)$, получающееся замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителем в Ω по норме пространства $W_p^2(\Omega)$.

Определение 13. *Обобщенным решением задачи (15—17) назовем пару $(w,f)\in\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)\times[\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)]^*$, для которой выполнено включение* (17) *и равенство*

$$\int_\Omega g\left(H^2(w)\right)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\right. \\ \left.+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}dxdy= \\ =\langle f,\varphi\rangle$$

для любой функции $\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)$.

Опишем условия, при которых рассматривается задача (15)—(17).

Предположим, что

G) *функция g непрерывна при $t>0$ и существуют константы c_0,c_1,C_0,C_1, с которыми выполняется неравенство*

$$c_0+c_1t^{\frac{p}{2}-1}\le g(t)\le C_0+C_1t^{\frac{p}{2}-1},$$

причем $p>1, c_0\ge 0, c_1>0$, а при $1<p<2$ $c_0=C_0=0$;

Для многозначного отображения $F:\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)\to[\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)]^*$ выполняются следующие условия:

F₁) *для любой функции $w\in\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)$ множество $F(w)$ компактно и выпукло,*

F₂) *существует функция $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\psi(t)}{t^{p-1}}=0$ и для всех $w\in\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)$, $f\in F(w)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{\left[\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)\right]^*}\le\psi\left(\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)}\right);$$

FG) *существует константа $\mu\in[0,1)$ такая, что для любых $u,v\in W_p^2(\Omega)$, $u\ne v$ справедливо неравенство*

$$h(F(u),F(v))\le \\ \le\mu\|u-v\|^{-1}_{\overset{\circ}{W}{}^2_p(\Omega)}\int_\Omega[g(H^2(u))H(u)- \\ -g(H^2(v))H(v)](H(u)-H(v))dxdy.$$

Здесь h — метрика Хаусдорфа.

Заметим, что величина, указанная в правой части данного неравенства, неотрицательна.

Это легко понять, вспомнив, что функция $g(t^2)t$ является возрастающей. Поэтому условие *FG)* корректно.

Основным результатом данного пункта является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $G), F_1), F_2), FG)$. *Тогда множество обобщенных решений задачи* (15—17) *непусто, компактно и связно в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \times \left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*$.

Кроме того, для любого полунепрерывного снизу функционала стоимости $\mathfrak{J} : \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \times [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^* \to \mathbb{R}$ *существует обобщенное решение* $(w_*, f_*) \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \times [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^*$ *такое, что*

$$\mathfrak{J}(w_*, f_*) = \inf_{(w,f)\in\mathcal{M}} \mathfrak{J}(w, f),$$

где $\mathcal{M}$ *— множество обобщенных решений задачи (15—17).*

Для того чтобы доказать эту теорему, удобно заменить задачу (15)—(17) некоторым операторным включением.

Определим оператор $A : \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \to [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^*$ с помощью равенства

$$\begin{gathered}\langle A(w), \varphi\rangle = \\ = \int_\Omega g\left(H^2(w)\right)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\} dxdy\end{gathered} \tag{18}$$

при $w, \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$.

Легко проверить, что справедлива

Лемма 3. *Пусть* $w \in W_p^2(\Omega)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) функция w *является решением включения* $A(u) \in F(u)$,

ii) существует $f \in [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^*$ *такое, что пара* (w, f) *является обобщенным решением задачи (15)—(17).*

Просуммируем основные свойства оператора A в следующей лемме (см. [14]).

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* $G)$. *Тогда*

i) оператор A *ограничен и непрерывен,*

ii) оператор A *удовлетворяет условию* $(S)_+$,

iii) для любого $q \in [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^*$ *уравнение* $A(u) = q$ *имеет единственное решение в* $W_p^2(\Omega)$,

iv) существует константа $\alpha > 0$ *такая, что*

$$\langle A(w), w\rangle \geqslant \alpha \| w \|^p_{W_p^2(\Omega)}$$

для любого $w \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$.

Теперь установим необходимые нам свойства мультиотображения F.

Лемма 5. *Пусть выполнено условие* $FG)$. *Тогда*

i) мультиотображение F *полунепрерывно сверху,*

ii) мультиотображение F *является нерастягивающим относительно* A,

iii) мультиотображение F *является* A*-уплотняющим по мере некомпактности Хаусдорфа.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ выполнено

$$\begin{gathered}\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq \int_\Omega [g(H^2(u))H(u) - \\ -g(H^2(v))H(v)](H(u) - H(v))dxdy.\end{gathered} \tag{19}$$

В самом деле, из неравенства $H^2(u + tv) \geq 0$, справедливого при любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$, следует

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq \\ \leq H(u)H(v).\end{gathered}$$

С помощью этого неравенства и очевидного соотношения

$$\langle A(w), w\rangle = \int_\Omega g\left(H^2(w)\right)H^2(w)dxdy$$

легко вывести оценку (19).

С учетом условия $FG)$ и неравенства (19) получим, что

$$\begin{gathered}h(F(u), F(v)) \leq \\ \leq \mu \| u - v \|^{-1}_{\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)} \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \leq \\ \leq \mu \| A(u) - A(v) \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*},\end{gathered} \tag{20}$$

то есть многозначное отображение F является сжимающим, а значит, и нерастягивающим относительно оператора A.

Из оценки (20) следует также, что мультиотображение F непрерывно в метрике Хаусдорфа и, следовательно, полунепрерывно сверху (см. [1, теорема 1.2.44]).

Поэтому нам осталось доказать лишь $iii)$.

Пусть $M \subset \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ — ограниченное множество такое, что множество $F(M)$ не является относительно компактным. Покажем, что

$$\chi(F(M)) < \chi(A(M)),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве $[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^*$.

Обозначим $d_0 = \chi(A(M))$. Легко видеть, что $d_0 > 0$. Действительно, в противном случае $d_0 = 0$ и, следовательно, множество $A(M)$ относительно компактно. Согласно лемме 1, отображение A является собственным. Поэтому множество M тоже относительно компактно, а значит, относительно компактно и множество $F(M)$ (см. [1, теорема 1.2.33]). Однако, согласно нашим исходным предположениям, множество $F(M)$ не является относительно компактным. Полученное противоречие означает, что $d_0 > 0$.

Из определения меры некомпактности Хаусдорфа вытекает, что существует $\{q_i \in [\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)]^* : i = 1,\dots,k\}$ — $\left(d_0 + \dfrac{\varepsilon}{\mu}\right)$-сеть множества $A(M)$, где $\varepsilon = \left(\dfrac{1-\mu}{4}\right)d_0 > 0$.

Из леммы 4 $iii)$ следует, что существует единственная функция $u_i \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ такая, что $A(u_i) = q_i$. Рассмотрим набор множеств $F(u_i)$, $i = 1,\dots,k$. Поскольку каждое из этих множеств компактно, то существуют

$$\mathcal{F}_i = \left\{ f_{ij} \in \left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^* : j = 1,\dots s_i \right\}, i = 1,\dots,k,$$

конечные ε-сети множеств $F(u_i)$ соответсвенно.

Покажем, что множество

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$$

является $\left(\dfrac{\mu+1}{2}\right)d_0$-сетью множества $F(M)$.

Возьмем произвольный элемент $f \in F(M)$. Ясно, что существует функция $u \in M$, для которой $f \in F(u)$. Кроме того, при некотором $i_0 \in \{1,\dots,k\}$ верно

$$\| A(u) - q_{i_0} \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < d_0 + \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Вспоминая, что $A(u_{i_0}) = q_{i_0}$, получим

$$\| A(u) - A(u_{i_0}) \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < d_0 + \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

С учетом этого неравенства и оценки (20) имеем

$$\rho(f, F(u_{i_0})) \le h(F(u), F(u_{i_0})) \le$$
$$\le \mu \| A(u) - A(u_{i_0}) \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < \mu d_0 + \varepsilon.$$

Поэтому существует элемент $z \in F(u_{i_0})$ такой, что

$$\| f - z \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < \mu d_0 + \varepsilon. \tag{21}$$

Кроме того, так как $z \in F(u_{i_0})$, то существует $f_{i_0 j_0} \in \mathcal{F}_{i_0}$, для которого

$$\| z - f_{i_0 j_0} \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < \varepsilon. \tag{22}$$

С помощью (21), (22) получим

$$\| f - f_{i_0 j_0} \|_{\left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*} < \mu d_0 + 2\varepsilon = \left(\frac{\mu+1}{2}\right)d_0. \tag{23}$$

Таким образом, для произвольного $f \in F(M)$ найдется $f_{i_0 j_0} \in \mathcal{F}$, для которого выполнено (23). Это и означает, что $\mathcal{F}$ является $\left(\dfrac{\mu+1}{2}\right)d_0$ -сетью множества $F(M)$.

Поэтому

$$\chi(F(M)) \leqslant \left(\frac{\mu+1}{2}\right)d_0 < d_0 = \chi(A(M)),$$

Лемма полностью доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Сначала покажем, что множество $Q = Coin(A,F)$ непусто, компактно и связно. С учетом теоремы 2, лемм 4, 5 для этого достаточно установить, что Q содержится в некотором шаре $\mathcal{B}_R = \left\{ u \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) : \| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)} < R \right\}$ и

$$\mathrm{Deg}(A - F, \overline{\mathcal{B}}_R, 0) \neq 0. \tag{24}$$

Возьмем число $R > 0$ настолько большим, что для всех $s \ge R$ верно

$$0 \leqslant \frac{\psi(s)}{s^{p-1}} < \alpha.$$

Здесь ψ — функция из условия $F_2)$, α — константа из леммы 4 $iv)$.

Нетрудно проверить, что множество решений семейства включений

$$A(u) \in tF(u), t \in [0,1],$$

содержится в шаре $\mathcal{B}_R$.

В этом случае легко установить (см. предложение 2), что

$$\mathrm{Deg}(A - F, \bar{\mathcal{B}}_R, 0) = \mathrm{Deg}(A, \bar{\mathcal{B}}_R, 0). \qquad (25)$$

Кроме того, из свойств степени $(S)_+$-отображений [8] следует равенство

$$\mathrm{Deg}(A, \bar{\mathcal{B}}_R, 0) = 1,$$

которое вместе с (25) и доказывает (24).

Таким образом, мы установили, что множество $Q = Coin(A, F)$ непусто, компактно и связно.

Далее, из леммы 3 вытекает, что $\mathcal{M}$ — множество обобщенных решений задачи (15—17) — можно представить в виде

$$\mathcal{M} = \mathcal{A}(Q),$$

где $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \times \left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^*$ — непрерывное отображение, заданное по правилу

$$\mathcal{A}(u) = (u, A(u)), \;\; u \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega).$$

Поскольку непрерывное отображение компактное множество переводит в компактное, а связное множество — в связное, то, ясно, что множество $\mathcal{M}$ компактно и связно.

Из компактности $\mathcal{M}$ следует, что для любого полунепрерывного снизу функционала $\mathfrak{J} : \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \times \left[\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\right]^* \to \mathbb{R}$ существует обобщенное решение (w_*, f_*) такое, что

$$\mathfrak{J}(w_*, f_*) = \inf_{(w,f)\in\mathcal{M}} \mathfrak{J}(w, f),$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович Ю. Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: КомКнига. — 2005.

2. *Байокки К.* Вариационные и квазивариационные неравенства. / К. Байокки, А. Капело. — Москва: Наука. — 1988.

3. *Барановский Е. С.* Конструкция степени одного класса многозначных возмущений операторов, удовлетворяющих условию альфа / Е. С. Барановский, В. Г. Звягин // Нелинейные граничные задачи. — 2006. — Вып. 16. — С. 107—117.

4. *Барановский Е. С.* О применении топологической степени к изучению структуры множества решений одного класса включений / Е. С. Барановский // Вестник ВГУ. Серия «Физика, Математика». — 2007. — № 1. — С. 112—120.

5. *Звягин В. Г.* Топологическая степень уплотняющих многозначных возмущений отображений класса (S)+ и ее приложения / В. Г. Звягин, Е. С. Барановский // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — Т. 35. — С. 60—77.

6. *Красносельский М. А.* О существовании решений у некоторых нелинейных операторных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 126. № 1. — С. 15—18.

7. *Гельман Б. Д.* Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений / Б. Д. Гельман // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 12. С. 33—56.

8. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач / И. В. Скрыпник. — М.: Наука, 1990.

9. *Барановский Е. С.* Теорема о связи условия α и собственности отображения / Е. С. Барановский // Труды математического факультета, Воронеж, ВГУ. — 2006. — Вып. 10 (новая серия). — С. 15—17.

10. *Мышкис А. Д.* Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории / А. Д. Мышкис // Матем. сборник. 1954. — Т. 34. № 3. — С. 525—540.

11. *Gorniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Gorniewicz. — Dordrecht—Boston—London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

12. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М.: Наука,1975.

13. *Качанов Л. М.* Некоторые вопросы теории ползучести / Л. М. Качанов. — М.: Гостехиздат, 1949.

14. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка / И. В. Скрыпник. — Киев: Наук. думка, 1973.

Барановский Евгений Сергеевич — научный сотрудник НИИ математики Воронежского госуниверситета, тел. 89601394663, E-mail: bes220@rambler.ru

Baranovski Evgeni Sergeevich — research assistant of Research Institute of Mathematics of Voronezh State University, phone 89601394663, E-mail: bes220@rambler.ru