УДК 517.956

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЫСТРОЙ ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТЯХ ТИПА ОКТАНТА

А. Д. Баев, А. Ф. Тедеев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.03.2010 г.

Аннотация. В работе получены оценки решения начально-краевой задачи Коши-Дирихле для нелинейного параболического уравнения, описывающего процесс быстрой диффузии быстрой диффузии.
Ключевые слова. Начально-краевая задача, задача Коши—Дирихле, диффузия, оценка решения.
Annotation. In the paper estimates of the solutions of the initial-boundary Cauchy-Dirichlet value problem for a nonlinear parabolic equation describing process of fast diffusion are received.
Keywords. Boundary value problem, Cauchy—Dirichlet problem, diffusion, estimates.

1. ВВЕДЕНИЕ*

В последнее время интенсивно развивается теория нелинейных параболических уравнений. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат В. А. Кондратьеву [1]. В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача Коши—Дирихле для нелинейного параболического уравнения. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \ (x,t) \in R_l^N \times (0,T) \qquad (1.1)$$

$$u = 0 \ \text{на} \ \partial R_l^N \times (0,\infty), \qquad (1.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in R_l^N \qquad (1.3)$$

где $R_l^N = \{x \in R^N : x_1,...,x_l > 0\}, \ 1 \le l \le N$ и

$$0 < m < 1. \qquad (1.4)$$

Условие (1.4) означает, что уравнение (1.1) является уравнением быстрой диффузии.

В работе [2] было рассмотрено уравнение, частным случаем которого является уравнение (1.1). А именно, было рассмотрено уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u^{m-1} \mid Du \mid^{p-2} u_{x_j}). \qquad (1.5)$$

В области $D_T = R^N \times (0,T), \ 0 < T \le +\infty$, с начальным условием $u(x,0) = u_0(x)$, где $u_0(x) \in L_1(R^N)$, при условии $m + p > 3, \ p > 1$ была доказана оценка

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\infty,B_\rho} \le \gamma t^{-\frac{N}{l}} \rho^{\frac{p}{m+p-3}} \left\|u_0\right\|_r^{\frac{p}{l}},$$

где $l = N(m+p-3)+p$, $\left\|u_0\right\|_r = \sup_{\rho \ge r} \rho^{-\frac{l}{m+p-3}} \int_{B_\rho} u_0 dx$, B_ρ — шар с центром в начале координат радиуса ρ.

Аналогичные соотношения для решения задачи Коши для уравнения (1.5), но в случае $m + p < 3, \ p = 2$ были установлены в работе [3]. А именно, для решения задачи Коши с начальной функцией $u_0 \in L_{1,loc}(R^N)$ в [3] установлена оценка

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\infty,B_\rho} \le \gamma[t^{-\theta}(\int_{B_{4\rho}} \mid u_0 \mid dx)^{\frac{2\theta}{N}} + (\frac{t}{\rho^2})^{\alpha}],$$

где $\theta^{-1} = m - 1 + \dfrac{2}{N}, \ \gamma = \gamma(m,N) \ \alpha = \dfrac{1}{1-m}$.

В той же работе была доказана глобальная разрешимость задачи Коши для указанных параметров m и p. Из последнего неравенства вытекает, что если $u_0 \in L_1(R^N)$, то

$$\left\|u(x,t)\right\|_{\infty,R^N} \le \gamma t^{-\theta}(\left\|u_0\right\|_{1,R^N})^{\frac{2\theta}{N}}. \qquad (1.6)$$

Оценка (1.6) при этом дает естественное ограничение на параметр m, $\dfrac{(N-2)_+}{N} < m < 1$, где $(N-2)_+ = N-2$, если $N-2 \ge 0$, и $(N-2)_+ = 0$, если $N-2 < 0$.

В случае, когда область определения Ω переменной x не совпадает с R^N, и имеет некомпактную границу $\partial\Omega$, оценки, подобные (1.6) зависят от геометрии рассматриваемой области, точнее, от параметров, определяющих границу области Ω. Указанная зависимость подтверждается в [4]. В работе [4] была рассмотрена начально-краевая задача следующего вида:

$$u_t = \Delta\varphi(u),\ (x,t) \in D_T = R_l^N \times (0,T)$$
$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial R_l^N \times \{t > 0\}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R_l^N,$$

где $\varphi(s) : R^+ \to R^+$ – абсолютно-непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,$ и условию

$$1 + \nu^{-1}\frac{\varphi'(s)s}{\varphi(s)} \le \nu,\ \nu \ge 2,\ \forall s > 0. \qquad (1.7)$$

Для решения этой задачи доказана оценка

$$\frac{[t\rho^{-2}\Phi(\|u(x,t)\|_{\infty,B_\rho^l})]^{\frac{1}{\theta_1}} \cdot \|u(x,t)\|_{\infty,B_\rho^l}}{\Phi^{-1}(\rho^2)} \le \gamma\,|||u_0|||_r,$$
$$\|u(x,t)\|_{\infty,B_\rho^l} \equiv \sup_{x\in B_\rho^l} u(x,t),$$
$$B_\rho^l = B_\rho \cap \{x_1,\ldots,x_l > 0\}, \qquad (1.8)$$
$$|||u_0|||_r = \sup_{\rho\ge r}\left[\Phi^{-1}(\rho^2)\right]^{-1}\int_{B_\rho^l} X_l u_0 dx,$$
$$\Phi(s) = \frac{\varphi(s)}{s},\ \theta_1 = \frac{2}{N+l}.$$

Заметим, что условие (1.7) при $\varphi(s) = s^m$, $0 < m < 1$ не выполняется. Таким образом, аналогичная задача для уравнения быстрой диффузии остается открытой.

Эта задача в данной работе решается с помощью априорного ограничения в виде неравенства Гарнака.

Под решением задачи (1.1)—(1.3) будем подразумевать функцию $u(x,t) \in W_{2,loc}^2(R_l^N)$ при любом $t > 0$, $u_t(x,t) \in L_1(R_l^N)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду и соотношениям (1.2), (1.3). При этом равенства (1.2), (1.3) понимаются в смысле равенства «следов». Существование этих «следов» следует из теории пространств С. Л. Соболева.

Здесь и далее будем предполагать, что $u_0(x) \ge 0$ почти всюду в R_l^N и, следовательно, будем рассматривать только неотрицательные решения. Естественным ограничением на m в данной работе является условие $1 > m > \left(1 - \frac{2}{N+l}\right)_+$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.3) в D_∞, пусть $u_0(x) \ge 0$ почти всюду в R_l^N, $u_0(x) \in L_{1,loc}(R_l^N)$ и $\mu_l(0) < \infty$. Тогда для всех $t > 0$, $1 > m > \left(1 - \frac{2}{N+l}\right)_+$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{\infty,R_l^N} \le \gamma(m,N,l)(\mu_l(0))^{\frac{2}{\beta_l}} \cdot t^{-\frac{N+l}{\beta_l}},$$

где $\mu_l(0) = \int_{R_l^N} x_1 \cdots x_l u_0(x)dx < \infty$ и $\beta_l = (N+l)\times$ $\times(m-1)+2.$

Здесь и далее символом γ будем обозначать различные положительные постоянные зависящие только от m, N, l.

2. ОЦЕНКА МОМЕНТА

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1.1)—(1.3) в $D_\infty = R_l^N \times (0,\infty)$ и $\mu_l(0) < \infty$. Тогда, для любого $\rho > 0$, $t > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{\tau\in(0,t)} \int_{B_{\rho,l}(0)} X_l u(x,\tau)dx \le$$
$$\le \gamma\Big(\int_{B_{2\rho,l}(0)} X_l u_0 dx + \Big(\frac{t}{\rho^{\beta_l}}\Big)^{\frac{1}{1-m}}\Big), \qquad (2.1)$$

где $X_l = x_1 \cdots x_l$, $B_{\rho,l}(0) = B_\rho(0) \cap \{x_1,...,x_l > 0\}$, $\beta_l = (N+l)(m-1)+2.$

Доказательство. Пусть ζ – гладкая срезающая функция в $B_{2\rho,l}(0)$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\zeta(x) \le 0,\ i = 1,...,l\ 2\ B_{2\rho,l}(0), \qquad (2.2)$$
$$|D\zeta| \le \frac{\gamma}{\rho}, \qquad (2.3)$$
$$\frac{|\Delta\zeta|}{\zeta^m} \le \frac{\gamma}{\rho^2}. \qquad (2.4)$$

Примером срезающей функции удовлетворяющей условиям (2.2), (2.3) и (2.4) является, например, функция

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \rho \\ [1 - \left(\frac{|x|-\rho}{\rho}\right)^{\alpha+1}]^{\alpha+1}, & \rho \le |x| < 2\rho \\ 0, & |x| \ge 2\rho. \end{cases}$$

при условии $\alpha > \frac{m+1}{1-m}$.

Возьмем в качестве пробной функции $\eta(x) = X_l \cdot \zeta(x)$. Умножим обе части (1.1) на η. С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$\int_{B_{2\rho,l}} X_l u(x,T)\zeta(x)dx = = \int_{B_{2\rho,l}} X_l u_0 \zeta dx - \int_0^t \int_{B_{2\rho,l}} Du^m \cdot D(X_l\zeta)dxd\tau. \quad (2.5)$$

Воспользуемся соотношениями

$$-\int_0^t \int_{B_{2\rho,l}} Du^m \cdot D(X_l\zeta)dxd\tau = = \int_0^t \int_{B_{2\rho,l}} u^m \Delta(X_l\zeta)dxd\tau. \quad (2.6)$$

$$\Delta(X_l\zeta) = \zeta\Delta X_l + 2D\zeta \cdot DX_l + X_l\Delta\zeta = = 2D\zeta \cdot DX_l + X_l \cdot \Delta\zeta \le X_l\Delta\zeta. \quad (2.7)$$

Тогда из (2.5)—(2.7) получим

$$\int_{B_{2\rho,l}(0)} X_l u(x,T)\zeta dx \le \le \int_{B_{2\rho,l}(0)} u_0 X_l \zeta dx + \int_0^t \int_{B_{2\rho,l}(0)} u^m X_l \Delta\zeta dxd\tau. \quad (2.8)$$

Представляя подинтегральную функцию $u^m X_l \Delta\zeta$ в виде $u^m \cdot X_l \cdot \Delta\zeta = (u^m \cdot X_l^m \cdot \zeta^m)\times \times(X_l^{1-m}\zeta^{-m}\Delta\zeta)$ и используя (2.4) для второго интеграла правой части (2.8), получим с использованием неравенства Гельдера оценку

$$\left|\int_0^t \int_{B_{2\rho,l}} u^m X_l \Delta\zeta dxd\tau\right| \le$$

$$\le \int_0^t \Big(\int_{B_{2\rho,l}(0)} uX_l\zeta dx\Big)^m \cdot \Big(\int_{B_{2\rho,l}(0)} X_l \left|\Delta\zeta\right|^{\frac{1}{1-m}} \cdot \zeta^{-\frac{m}{1-m}} dx\Big)^{1-m} dt \le \quad (2.9)$$

$$\le \gamma t[\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2\rho,l}(0)} uX_l\zeta dx]^m \cdot \rho^{(N+l)(1-m)-2}.$$

Из (2.8) и (2.9) выводим

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2\rho,l}(0)} uX_l\zeta dx \le \int_{B_{2\rho,l}(0)} u_0 X_l \zeta dx + +\gamma t[\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2\rho,l}(0)} uX_l\zeta dx]^m \cdot \rho^{-\beta_l}.$$

Применяя неравенство Юнга в правой части этого неравенства

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2\rho,l}(0)} uX_l\zeta dx \le \gamma \int_{B_{2\rho,l}(0)} u_0 X_l \zeta dx + \gamma\Big(\frac{t}{\rho^{\beta_l}}\Big)^{\frac{1}{1-m}},$$

получим искомое соотношение. Лемма доказана.

Устремляя в (2.1) $\rho \to \infty$, получим

$$\sup_{\tau\in(0,t)} \int_{R_l^N} X_l u(x,\tau)dx \le \gamma \int_{R_l^N} X_l u_0(x)dx. \quad (2.10)$$

3. ОЦЕНКА МАКСИМУМА

Умножим обе части уравнения (1.1) на $X_l u^p$, где p — произвольное положительное число, и проинтегрируем по R_l^N. Получим равенство

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int X_l u^{p+1}(x,t)dx = -m\int Duu^{m-1}D(X_l u^p)dx,$$

или

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int X_l u^{p+1}(x,t)dx = = -mp\int X_l \left|Du\right|^2 u^{m+p-2}dx - m\int Duu^{m+p-1}DX_l dx.$$

Второй интеграл в правой части можно преобразовать следующим образом

$$\int Du \cdot u^{m+p-1}DX_l dx = \frac{1}{m+p}\int Du^{p+m} \cdot \cdot DX_l dx = -\frac{1}{m+p}\int u^{p+m}\Delta X_l dx = 0.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int X_l u^{p+1}dx = = -mp\int X_l \mid Du \mid^2 u^{p+m-2}dx.$$

Так как $\left|Du\right|^2 u^{p+m-2} = \left|Du^{\frac{p+m}{2}}\right|^2 \dfrac{4}{(p+m)^2}$, то

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int X_l u^{p+1}dx = -\frac{4mp}{(p+m)^2}\int X_l \left|Du^{\frac{p+m}{2}}\right|^2 dx.$$

Введем обозначения

$$v = u^{\frac{p+m}{2}},\ u = v^{\frac{p+m}{2}},$$

$$\lambda = \frac{2(p+1)}{p+m},\ \mu = \frac{2}{p+m},$$

тогда последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int X_l v^\lambda dx = -c(p,m)\int X_l \mid Dv \mid^2 dx. \quad (3.1)$$

Воспользуемся весовым мультипликативным неравенством

$$\Big(\int X_l v^\lambda dx\Big)^{\frac{1}{\lambda}} \le \gamma\Big(\int X_l \left|Dv\right|^2 dx\Big)^{\frac{a}{2}}\Big(\int X_l v^\mu dx\Big)^{\frac{1-a}{\mu}},$$

где параметр $0 < a < 1$ определяется из условия

$$\frac{N+l}{\lambda} = \frac{(N+l-2)a}{2} + \frac{(N+l)(1-a)}{\mu}.$$

Определяя отсюда a и $1-a$, получим неравенство

$$\int v^{\lambda} dx \le \gamma\left(\int X_l \left|Dv\right|^2 dx\right)^{\frac{(N+l)(\lambda-\mu)}{(N+l)(2-\mu)+2\mu}} \left(\int X_l v^{\mu} dx\right)^{\frac{(N+l)(2-\lambda)+2\lambda}{(N+l)(2-\mu)+2\mu}}.$$

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{(N+l)p}{(N+l)(p+m-1)+2},$$
$$\theta = \frac{(N+l)(m-1)+2(p+1)}{(N+l)(p+m-1)+2},$$

получим неравенство

$$\int X_l v^{\lambda} dx \le \gamma\left(\int X_l \left|Dv\right|^2 dx\right)^{\beta} \left(\int X_l u dx\right)^{\theta},$$

отсюда

$$\int X_l \left|Dv\right|^2 dx \ge \gamma\left(\int X_l v^{\lambda} dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \mu_l(0)^{-\frac{\theta}{\beta}}.$$

Используя (3.1), получим

$$\frac{d}{dx}\int X_l v^{\lambda} dx \le -\gamma(p,m)\left(\int X_l v^{\lambda} dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \mu_l(0)^{-\frac{\theta}{\beta}}.$$

Обозначим $E(t) = \int X_l v^{\lambda} dx$, получим дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt}E(t) \le -\gamma(p,m)E(t)^{\frac{1}{\beta}} \mu_l(0)^{-\frac{\theta}{\beta}}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получим оценку

$$E(t) \le \left[\frac{\beta}{\gamma(p,m)(1-\beta)}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} \cdot \mu_l(0)^{\frac{\theta}{1-\beta}} \cdot t^{-\frac{\beta}{1-\beta}}$$

или

$$E(t) = \int X_l u^{p+1} dx \le \gamma(m,N,p)\mu_l(0)^{\frac{(N+l)(m-1)+2+2p}{\beta_l}} \cdot t^{-\frac{(N+l)p}{\beta_l}}.$$

Отсюда

$$\int X_l u^{p+1} dx \le \gamma(p,N,m)\mu_l(0)^{\frac{\beta_l+2p}{\beta_l}} \cdot t^{-\frac{(N+l)p}{\beta_l}},$$

где

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{(N+l)p}{(N+l)(m-1)+2}, \qquad (3.2)$$
$$\beta_l = (N+l)(m-1)+2.$$

Из (3.2) получаем оценку

$$\left(\int X_l u^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \le \gamma(p,m,N)^{\frac{1}{p+1}} \mu_l(0)^{\frac{\beta_l+2p}{\beta_l(p+1)}} t^{-\frac{N+l}{\beta_l}\cdot\frac{p}{p+1}}.$$

Здесь постоянная γ определяется из равенства

$$\gamma = \left\{\frac{(p+m)^2}{4mp(p+1)} \cdot \gamma_1^{\frac{(N+l)p}{(N+l)(p+m-1)+2}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(N+l)p}{(N+l)(m-1)+2}\right\}^{\frac{N+l}{(N+l)(m-1)+2}\cdot\frac{1}{p+1}},$$

причем γ_1 не зависит от p.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $p \to \infty$, получаем оценку

$$\sup_{x \in R_l^N} u(x,t) \le c(m,N,l)\mu_l(0)^{\frac{\beta_l+2}{\beta_l}} \cdot t^{-\frac{N+l}{\beta_l}}.$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В. А.* Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 2. — С. 246—255.

2. *Di Benedetto E.* Continuity of weak solutions to a general porous medium equation // Indiana Univ. Math. — 1983. — V. 32. — P. 83—118.

3. *Herrero A., Pierre M.* The Cauchy problem for the nonlinear diffusion equation // Trans, Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 291. — P. 145—158.

4. *Тедеев А. Ф.* Локальные и глобальные свойства решений задачи Коши-Дирихле для квазилинейного параболического уравнения второго порядка в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, 8. — С. 1071—1078.

Баев Александр Дмитриевич — декан математического факультета Воронежского государственного университета, заведующий кафедрой математического анализа, доктор физико-математических наук, тел. (4732) 208-553, e-mail: alexsandrbaev@mail.ru.

Тедеев Александр Федорович — преподаватель кафедры дифференциальных уравнений Северо-Кавказского государственного университета, соискатель кафедры математического анализа воронежского государственного университета, тел. (867) 3823585, e-mail: naira-m@yandex.ru.

Baev Alexander Dmitrievich — dean of mathematical faculty of the Voronezh state university, the head of the mathematical analysis chair, doctor of physical and mathematical sciences, tel. (4732) 208553, e-mail: alexsandr-baev@mail.ru.

Tedeev Alexander Fedorovich, teacher of the differential equations chair of the North Caucasian state university, applicant of the mathematical analysis chair of the Voronezh state university, tel. (867) 3823585, e-mail: naira-m@yandex.ru