УДК 517.988

ДИАГРАММА НЬЮТОНА И ИНДЕКС ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

И. В. Антюшина, Н. М. Близняков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.04.2010 г.

Аннотация. В работе устанавливается формула для вычисления топологического индекса нулевой особой точки аналитического векторного поля на плоскости в терминах диаграмм Ньютона компонент поля и индексов Коши вещественных рациональных функций, позволяющая для почти всех векторных полей вычислять индекс в результате конечного числа арифметических и логических операций над коэффициентами компонент векторного поля.
Ключевые слова: топологический индекс, диаграмма Ньютона, индекс Коши.

Abstract. The formula for computation of the topological index for the zero singular point of an analytical vector field on a plain in terms of Newton diagrams of field's components and Cauchy indices of real rational functions, which allows to compute the index for almost all vector fields in consequence of final quantity of arithmetical and logical operations on coefficients of vector field's components, is established in the work.
Keywords: topological index, Newton diagram, Cauchy index.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании задач нелинейного анализа многие вопросы качественного характера сводятся к вычислению степени отображения (см. например [1], [2]). Возможность фактического вычисления степени отображения превращает общие методы нелинейного анализа в эффективный инструмент при анализе конкретных задач. Важную роль в теории степени отображения (см. например [3]) играет понятие индекса особой точки векторного поля. Задача вычисления индекса в разных терминах и для различных классов векторных полей рассматривалась многими авторами (см. например [4]—[19]). Особый интерес для анализа представляют алгебраические алгоритмы и формулы вычисления индекса, т. е. алгоритмы и формулы, позволяющие вычислить индекс в результате конечного числа арифметических и логических операций над коэффициентами Тейлора векторного поля в особой точке (принципиальная возможность такого решения задачи вычисления индекса для почти всех C^∞-векторных полей в $\mathbb{R}^n$ была установлена В. М. Заклюкиным [20]). В различных частных случаях задача алгебраического вычисления индекса рассматривалась рядом авторов (см. например [4], [5], [17], [21], [6], [1], [2], [11]).

С точки зрения экономности вычислительных процедур наиболее эффективны результаты алгебраического вычисления индекса, использующие метод диаграммы Ньютона (см. например [23]), который обеспечивает наиболее естественную градуировку возможных случаев (от простых к более сложным) при решении задачи. В этом направлении в настоящее время имеются лишь результаты вычисления индекса для некоторых частных классов векторных полей [17], [22] и анонсы результатов большей степени общности [16], [17]. В настоящей работе указывается формула вычисления индекса нулевой особой точки для почти всякого аналитического векторного поля на плоскости, позволяющая алгебраически вычислить индекс в тех случаях, когда он определен диаграммами Ньютона компонент векторного поля.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Напомним используемые понятия и обозначения. Под суммой $A+B$ подмножеств A, B линейного пространства далее понимается сумма Минковского $A+B=\{a+b : a\in A,\, b\in B\}$. Носителем $\operatorname{supp} f$ ряда $f(x)=\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}_+^n} a_m x^m$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, $x^m = x_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{m_n}$ называется множество $suppf = \{m \in \mathbb{Z}_+^n : a_m \neq 0\}$; многогранником Ньютона Γ_+ ряда f называется выпуклая оболочка $\Gamma_+ = co\left(\bigcup_{m \in suppf}(m + \mathbb{R}_+^n)\right)$; объединение компактных граней многогранника Γ_+ называется диаграммой Ньютона Γ ряда f. Диаграмма Ньютона называется удобной, если она пересекает все координатные оси. Для любой грани $\Delta \in \Gamma$ будем обозначать $f_\Delta(x) = \sum_{m \in \Delta} a_m x^m$. Далее мы будем рассматривать только двумерный случай, здесь возможны только нульмерные и одномерные грани (вершины и ребра соответственно).

Отметим, что для всякого ребра Δ диаграммы Ньютона Γ уравнение прямой, содержащей Δ, можно записать в виде $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = d$, где $\alpha_1, \alpha_2, d \in \mathbb{Z}$ и НОД $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ (здесь среди чисел α_1, α_2 по крайней мере одно нечетное). Мы будем рассматривать только такие уравнения. Пусть Γ — диаграмма Ньютона некоторого ряда и Δ — некоторое ее ребро. Пусть $\alpha_1^{(\Delta)} y_1 + \alpha_2^{(\Delta)} y_2 = d^{(\Delta)}$ — уравнение прямой, содержащей Δ. Будем говорить, что Δ имеет тип $(0/1)$ если $\alpha_1^{(\Delta)} \equiv 0(\bmod 2), \alpha_2^{(\Delta)} \equiv 1(\bmod 2)$. Аналогичным образом определим другие типы ребер $(1/0)$ и $(1/1)$. Разобьем множество всех ребер диаграммы Γ на два класса $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$. К классу $\Gamma^{(1)}$ отнесем всякое ребро диаграммы Γ, имеющее тип $(1/1)$ или $(1/0)$, к классу $\Gamma^{(2)}$ отнесем ребра типа $(0/1)$.

Пусть $F = (F_1, F_2)$ — аналитическое поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0, диаграммы Ньютона Γ_1, Γ_2 компонент которого удобны. Для всякого ребра Δ диаграммы Ньютона Γ_1 обозначим $\widetilde{\Delta}$ ребро или вершину диаграммы Γ_2, получаемую пересечением многогранника Ньютона $\Gamma_{2,+}$ с опорной к нему прямой, параллельной ребру Δ. Поле F назовем $\mathbb{R}$-невырожденным, если для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1^{(1)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(1, x_2), F_{2,\widetilde{\Delta}}(1, x_2)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней и для всякого ребра $\Delta \in \Gamma_1^{(2)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(x_1, 1), F_{2,\widetilde{\Delta}}(x_1, 1)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней.

Пусть $P(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} a_m x^m$ — произвольный многочлен. Упорядочим его коэффициенты лексикографически. Если $P(x)$ ненулевой многочлен, то его первый и последний ненулевые коэффициенты при такой упорядоченности коэффициентов обозначим $firP$ и $lasP$ соответственно. Удобно считать, что $firP = 0$ и $lasP = 0$, если $P \equiv 0$.

2. ИНДЕКСЫ КОШИ

Определение 1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле и $g : U \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция. Пусть множество $F^{-1}(0)$ особых точек поля F конечно и $F^{-1}(0) \bigcap g^{-1}(0) = \varnothing$. Сумму*

$$\operatorname{ind}_C(F, g, U) = \sum_{x \in F^{-1}(0)} \operatorname{ind}(F, x) \operatorname{sgn} g(x)$$

назовем индексом Коши пары (F, g) на U (здесь $ind(F, x)$ — топологический индекс особой точки x векторного поля F).

С точки зрения вычисления топологического индекса особой точки векторного поля, особый интерес будет представлять случай индекса Коши при $n = 1$. Пусть $U = (a, b)$ — интервал, $F : U \to \mathbb{R}^1$, $g : U \to \mathbb{R}^1$ — многочлены, не имеющие общих вещественных корней на U. Тогда нетрудно видеть, что $\operatorname{ind}_C(F, g, U) = I_a^b \dfrac{g}{F}$, где $I_a^b \dfrac{g}{F}$ — классическое понятие — индекс Коши вещественной рациональной функции $R = \dfrac{g}{F}$, определяемый как разность между числом разрывов $R(x)$ с переходом от $-\infty$ к $+\infty$ и числом разрывов с переходом от $+\infty$ к $-\infty$ при изменении x от a к b (при подсчете числа разрывов крайние значения аргумента — пределы a и b — не включаются) (см. [24]). Действительно, величина $\operatorname{ind}(F, x) \operatorname{sgn} g(x)$ характеризует тип разрыва рациональной функции $R = \dfrac{g}{F}$ в полюсе x. Отметим, что индекс $I_a^b \dfrac{g}{F}$, в отличие от индекса $\operatorname{ind}_C(F, g, U)$, определен и в том случае, когда многочлены F и g имеют общие вещественные корни на U. Приведем некоторые простейшие свойства индексов Коши вещественных рациональных функций, необходимые в дальнейшем.

1) Пусть $(a, b) \subset (c, d)$ (числа a, b, c, d могут равняться $\pm\infty$). Если вещественная рациональная функция $R(x)$ не имеет вещественных полюсов на множестве $(c, d) \setminus (a, b)$, то

$$I_a^b R(x) = I_c^d R(x).$$

2) Для всякой вещественной рациональной функции $R(x)$ на любом интервале (a, b) справедливо равенство

$$I_a^b R(x) = -I_{-b}^{-a} R(-x).$$

3) Если для вещественной рациональной функции $R_1(x) = \dfrac{g(x)}{F(x)}$ на интервале (a,b) выполнено одно из неравенств $g(x)F(x) > 0$, $g(x)F(x) < 0$, то для всякой рациональной функции $R(x)$ справедливо равенство

$$I_a^b R(x)R_1(x) = s(R_1) I_a^b R(x),$$

где $s(R_1) = \begin{cases} 1 & \text{если } g(x)F(x) > 0 \text{ при } x \in (a,b), \\ -1 & \text{если } g(x)F(x) < 0 \text{ при } x \in (a,b). \end{cases}$

4) Для всякой вещественной рациональной функции $R(x)$ и положительного числа a справедливы равенства

$$I_{-\infty}^0 R(ax) = I_{-\infty}^0 R(x),\; I_0^{+\infty} R(ax) = I_0^{+\infty} R(x). \quad (1)$$

5) Для всякой вещественной рациональной функции $R(x)$ справедливо равенство

$$I_{-\infty}^0 R(-x) + I_0^{+\infty} R(-x) = -(I_{-\infty}^0 R(x) + I_0^{+\infty} R(x)).$$

6) Для всякой вещественной рациональной функции $R(x)$ справедливо равенство (см. [24])

$$I_a^b R(x) + I_a^b \frac{1}{R(x)} = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{2},$$

где $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ — знаки рациональной функции $R(x)$ внутри (a,b) вблизи a и b соответственно. В частности, если $a = -\infty$, $b = +\infty$ и $P_1(x) = \sum_{m=0}^{k_1} a_m x^m,\ a_{k_1} \neq 0,\ P_2(x) = \sum_{m=0}^{k_2} b_m x^m,\ b_{k_2} \neq 0,$ то

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2}{P_1} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1}{-P_2} + \frac{1-(-1)^{k_1+k_2}}{2} \operatorname{sgn}(a_{k_1} b_{k_2}). \quad (2)$$

7) Если $R(x) = \dfrac{g(x)}{F(x)}$, где $F(x)$, $g(x)$ — многочлены и $a_{k_1} = firF$, $b_{k_2} = firg$, то

$$I_{-\infty}^0 R(x) + I_0^{+\infty} R(x) = I_{-\infty}^{+\infty} R(x) - \sigma,$$

где $\sigma = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_{k_1} b_{k_2}), & \text{если } k_1 > k_2, (k_1 - k_2) \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Свойства 1) — 3) следуют непосредственно из определения индекса Коши вещественной рациональной функции. Свойство 4) вытекает из того, что при замене переменной x на переменную $y = ax$, $a > 0$ не меняется количество полюсов рациональной функции $R(x)$ и остаются прежними знаки пределов при стремлении переменной к каждому из полюсов слева и справа. Свойство 5) следует из того, что число вещественных полюсов вещественной рациональной функции $R(-x)$ на интервале $(-\infty, 0)$ такое же, как у $R(x)$ на интервале $(0, +\infty)$, а число вещественых полюсов у $R(-x)$ на $(0,+\infty)$ — как у $R(x)$ на $(-\infty,0)$, и из замечания, что если функция $R(x)$ имеет разрыв в некотором полюсе x^* с переходом от $-\infty$ к $+\infty$ (от $+\infty$ к $-\infty$), то $R(-x)$ имеет разрыв в полюсе $-x^*$ с переходом от $+\infty$ к $-\infty$ (от $-\infty$ к $+\infty$). Свойство 7) вытекает из того, что знак многочлена вблизи нуля равен знаку его коэффициента в мономе минимальной степени.

Установим еще два свойства индексов Коши рациональных функций, в числителе и знаменателе которых — многочлены, получающиеся из квазиоднородных многочленов от двух переменных.

Лемма 1. *Если $P_1(x_1,x_2), P_2(x_1,x_2)$ — ненулевые квазиоднородные многочлены из $\mathbb{R}[x_1,x_2]$ с показателями α_1, α_2 степеней d_1, d_2 соответственно, $\alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ и НОД $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, то*

1) при $\alpha_1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ справедливо равенство

$$I_{-\infty}^0 \frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)} + I_0^{+\infty} \frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)} = \\ = (-1)^{d_1+d_2+\alpha_1+\alpha_2+1} \left(I_{-\infty}^0 \frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)} + I_0^{+\infty} \frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)} \right); \quad (3)$$

2) при $\alpha_2 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ справедливо равенство

$$I_{-\infty}^0 \frac{P_2(x_1,-1)}{P_1(x_1,-1)} + I_0^{+\infty} \frac{P_2(x_1,-1)}{P_1(x_1,-1)} = \\ = (-1)^{d_1+d_2+\alpha_1+\alpha_2+1} \left(I_{-\infty}^0 \frac{P_2(x_1,1)}{P_1(x_1,1)} + I_0^{+\infty} \frac{P_2(x_1,1)}{P_1(x_1,1)} \right). \quad (4)$$

Доказательство. Отметим вначале, что так как $P_i(x_1,x_2)$, $i = 1,2$ — ненулевые квазиоднородные многочлены и $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то многочлены $P_i(1,x_2)$, $P_i(-1,x_2)$, $P_i(x_1,1)$, $P_i(x_1,-1)$, $i = 1,2$ также ненулевые, поскольку каждый из многочленов $P_1(x_1,x_2)$, $P_2(x_1,x_2)$ не имеет ни одной пары мономов, содержащих переменную x_1 в одинаковых степенях (и, таким образом, имеет смысл рассматривать индексы Коши, фигурирующие в равенствах (3), (4)).

Установим равенство (3), равенство (4) показывается аналогично. Возможны два случая: $\alpha_2 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ и $\alpha_2 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$.

Если $\alpha_2 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$, то в силу квазиоднородности многочленов $P_1(x_1,x_2)$, $P_2(x_1,x_2)$ имеем $P_i(-1,x_2) = P_i((-1)^{\alpha_1}, (-1)^{\alpha_2}(-x_2)) = (-1)^{d_i} P_i(1,-x_2)$,

$i=1,2$. Используя последние равенства и свойства 3), 5) индексов Коши, получаем

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)}=$$

$$=I_{-\infty}^{0}\frac{(-1)^{d_2}P_2(1,-x_2)}{(-1)^{d_1}P_1(1,-x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{(-1)^{d_2}P_2(1,-x_2)}{(-1)^{d_1}P_1(1,-x_2)}=$$

$$=(-1)^{d_1+d_2+\alpha_1+\alpha_2+1}\left(I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)}\right).$$

Если $\alpha_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, то в силу квазиоднородности многочленов $P_1(x_1,x_2),P_2(x_1,x_2)$ имеем $P_i(-1,x_2)=P_i((-1)^{\alpha_1},(-1)^{\alpha_2}x_2)=(-1)^{d_i}P_i(1,x_2)$, $i=1,2$. Используя последние равенства и свойства 3), 5) индексов Коши, получаем

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)}=$$

$$=I_{-\infty}^{0}\frac{(-1)^{d_2}P_2(1,x_2)}{(-1)^{d_1}P_1(1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{(-1)^{d_2}P_2(1,x_2)}{(-1)^{d_1}P_1(1,x_2)}=$$

$$=(-1)^{d_1+d_2+\alpha_1+\alpha_2+1}\left(I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)}\right).$$

■

Лемма 2. *Если $P_1(x_1,x_2),P_2(x_1,x_2)$ — ненулевые квазиоднородные многочлены из $\mathbb{R}[x_1,x_2]$ с показателями α_1,α_2 степеней d_1,d_2 соответственно, $\alpha_1,\alpha_2,d_1,d_2\in\mathbb{Z}$, $\alpha_1\alpha_2\neq 0$ и* НОД$(\alpha_1,\alpha_2)=1$, *то для всякого $\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus 0$*

1) при $\alpha_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ справедливы равенства

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\varepsilon,x_2)}{P_1(\varepsilon,x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}{P_1(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)},\quad I_0^{+\infty}\frac{P_2(\varepsilon,x_2)}{P_1(\varepsilon,x_2)}=I_0^{+\infty}\frac{P_2(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}{P_1(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)};\tag{5}$$

2) при $\alpha_2\equiv 1(mod2)$ справедливы равенства

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(x_1,\varepsilon)}{P_1(x_1,\varepsilon)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(x_1,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)}{P_1(x_1,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)},\quad I_0^{+\infty}\frac{P_2(x_1,\varepsilon)}{P_1(x_1,\varepsilon)}=I_0^{+\infty}\frac{P_2(x_1,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)}{P_1(x_1,\mathrm{sgn}\,\varepsilon)}.\tag{6}$$

Доказательство. Как и в лемме 1, в равенствах (5), (6) каждый из многочленов ненулевой. Таким образом, имеет смысл рассматривать индексы Коши, фигурирующие в этих равенствах.

Установим первое из равенств в (5), остальные показываются аналогично. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $\varepsilon>0$. Обозначим λ вещественный корень степени α_1 из ε, тогда $\varepsilon=\lambda^{\alpha_1}$. В силу квазиоднородности многочленов $P_1(x_1,x_2),P_2(x_1,x_2)$ имеем $P_i(\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)=\lambda^{d_i}P_i(1,x_2)$, $i=1,2$. Используя последние равенства, а также свойства 3), 4) индексов Коши, получаем

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\varepsilon,x_2)}{P_1(\varepsilon,x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\lambda^{\alpha_1},x_2)}{P_1(\lambda^{\alpha_1},x_2)}=$$

$$=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)}{P_1(\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{\lambda^{d_2}P_2(1,x_2)}{\lambda^{d_1}P_1(1,x_2)}=$$

$$=\mathrm{sgn}\,\lambda^{d_1+d_2}I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(1,x_2)}{P_1(1,x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}{P_1(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}.$$

б) Пусть $\varepsilon<0$. Обозначим λ вещественный корень степени α_1 из $(-\varepsilon)$, тогда $\varepsilon=-\lambda^{\alpha_1}$. В силу квазиоднородности многочленов $P_1(x_1,x_2),P_2(x_1,x_2)$ имеем $P_i(-\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)=\lambda^{d_i}P_i(-1,x_2)$, $i=1,2$. Используя последние равенства, а также свойства 3), 4) индексов Коши, получаем

$$I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\varepsilon,x_2)}{P_1(\varepsilon,x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2((-1)\lambda^{\alpha_1},x_2)}{P_1((-1)\lambda^{\alpha_1},x_2)}=$$

$$=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2((-1)\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)}{P_1((-1)\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2}x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{\lambda^{d_2}P_2(-1,x_2)}{\lambda^{d_1}P_1(-1,x_2)}=$$

$$=\mathrm{sgn}\,\lambda^{d_1+d_2}I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(-1,x_2)}{P_1(-1,x_2)}=I_{-\infty}^{0}\frac{P_2(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}{P_1(\mathrm{sgn}\,\varepsilon,x_2)}.$$

■

Техника вычисления индексов Коши вещественных рациональных функций хорошо развита (см. [24], [25], [11]). Приведем один из результатов.

Пусть

$$\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_k\tag{7}$$

некоторая последовательность вещественных чисел, причем $\mu_0\neq 0,\ \mu_k\neq 0$. В последовательности (7) заменим нули (если они имеются) на ненулевые числа по следующему правилу: для всякой группы подряд идущих нулей $\mu_{h+1}=\dots=\mu_{h+q}=0$ $(\mu_h\neq 0,\ \mu_{h+q+1}\neq 0)$ заменим μ_{h+i} $(1\le i\le q)$ на $(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\,\mathrm{sgn}\,\mu_h$. Число знакоперемен в полученной таким образом последовательности обозначим $V(\mu_0,\dots,\mu_k)$.

Пусть $P_1(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^n}a_mx^m$, $P_2(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^n}b_mx^m$ — произвольные многочлены и $a_{k_1}=\mathrm{las}\,P_1$, $b_{k_2}=\mathrm{las}\,P_2$, $k=\max\{k_1,k_2\}$. Положим

$$\text{æ}(P_1, P_2) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_{k_1} b_{k_2}), \text{ если } \begin{matrix} k_1 - k_2 < 0, \\ k_1 \not\equiv k_2 (\operatorname{mod} 2), \end{matrix} \\ 0, \qquad\qquad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для всякого $i = 1, \ldots, k$ обозначим

$$\nabla_i(P_1, P_2) = \begin{vmatrix} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_{k-2i+1} \\ b_k & b_{k-1} & \cdots & b_{k-2i+1} \\ & a_k & \cdots & a_{k-2i+2} \\ & b_k & \cdots & b_{k-2i+2} \\ & & \cdots & \\ & & a_k \ \cdots & a_{k-i} \\ & & b_k \ \cdots & b_{k-i} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где $a_j = 0$, если $j < 0$ или $j > k_1$; $b_j = 0$, если $j < 0$ или $j > k_2$.

Теорема 1. *Если $\nabla_m(P_1, P_2)$ — последнее отличное от нуля число в ряду $\nabla_1(P_1, P_2), \ldots, \nabla_k(P_1, P_2)$, то справедлива формула*

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2}{P_1} = \qquad (9)$$
$$= m - 2V(1, \nabla_1(P_1, P_2), \ldots, \nabla_m(P_1, P_2)) + \text{æ}(P_1, P_2).$$

Теорема 1 представляет собой теорему 10, § 11, гл. XVI, [24] (см. также замечание к теореме 10), записанную в удобной для нас форме и распространенную при помощи равенства (2) на случай, когда степень многочлена P_2 выше степени многочлена P_1. Формула (9) позволяет выразить индекс Коши $I_{-\infty}^{+\infty} R$ любой рациональной функции R через коэффициенты числителя и знаменателя.

Существуют также достаточно эффективные способы вычисления индексов Коши в терминах непрерывных дробей (см. [18], а также [26]).

3. ИНДЕКС ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим гладкое отображение $F = (F_1, \ldots, F_n) : M^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ гладкого компактного ориентированного многообразия без края M^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Для всякого $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ положим $\rho(x) = \dfrac{x}{\| x \|}$. Всюду в дальнейшем под ρ будем понимать именно это отображение без специальных напоминаний. Пусть $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ — проекция «вычеркивания i-ой координаты».

Теорема 2. *Пусть множество $(\pi_i F)^{-1}(0)$ конечно и $\mathfrak{A} = \{(U_k, \varphi_k)\}$ — множество карт из данного ориентирующего атласа на M^{n-1}, удовлетворяющее условиям:*

1) $(\pi_i F)^{-1}(0) \subset \bigcup\limits_{U_k \in \mathfrak{A}} U_k$;

2) *каждая точка множества $(\pi_i F)^{-1}(0)$ принадлежит только одному из множеств U_k.*

Тогда для степени отображения $\rho F : M^{n-1} \to S^{n-1}$ справедлива формула

$$\deg(\rho F) = \frac{(-1)^{i-1}}{2} \times$$
$$\times \sum_{U_k \in \mathfrak{A}} ind_C((\pi_i F \varphi_k^{-1}), (F\varphi_k^{-1})_i, \varphi_k(U_k)), \qquad (10)$$

где $(F\varphi_k^{-1})_i$ означает i-ю компоненту отображения $F\varphi_k^{-1}$.

Доказательство. Обозначим через c_1, c_2 прообразы точки 0 при проектировании π_i, принадлежащие S^{n-1} ($c_1 = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$, $c_2 = -c_1$; здесь δ_{ij} — символ Кронекера). Множество $A = [(\rho F)^{-1}(c_1)] \bigcup [(\rho F)^{-1}(c_2)]$ конечно, так как $A = (\pi_i F)^{-1}(0)$. Поэтому для степени отображения ρF многообразия M^{n-1} в сферу S^{n-1} справедливы формулы:

$$\deg(\rho F) = \sum_{x \in (\rho F)^{-1}(c_i)} \operatorname{ind}(\rho F, x), \ i = 1, 2,$$

где $\operatorname{ind}(\rho F, x)$ — индекс точки x (если $(U, \varphi), (V, \psi), \varphi : U \to \mathbb{R}^{n-1}, \psi : V \to \mathbb{R}^{n-1}$ — карты из ориентированных атласов многообразий M^{n-1} и S^{n-1} соответственно и $x \in U$, $c_i \in V$, то $\operatorname{ind}(\rho F, x)$ равен индексу $\operatorname{ind}(\psi \rho F \varphi^{-1} - \psi(c_i), \varphi(x))$ изолированной особой точки $\varphi(x)$ векторного поля $\psi \rho F \varphi^{-1} - \psi(c_i)$ в R^{n-1}).

Пусть ориентацию S^{n-1} задает следующий атлас $\{(V_k, \psi_k)\}$ из $2n$ карт:

$$V_k = \left\{ x \in S^{n-1} : \begin{matrix} x_k > 0, & \text{если } 1 \le k \le n \\ x_{k-n} < 0, & \text{если } n+1 \le k \le 2n \end{matrix} \right\},$$

$$\psi_k = \begin{cases} T^{k-1} \pi_k, & \text{если } 1 \le k \le n \\ T^{k-n} \pi_{k-n}, & \text{если } n+1 \le k \le 2n, \end{cases}$$

$\psi_k : V_k \to \psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (T — произвольное фиксированное отображение из $GL_{-}(n-1, \mathbb{R})$). Тогда $\psi_i(c_1) = 0$ и $\psi_i \rho F \varphi^{-1} - \psi_i(c_1) = T^{i-1} \pi_i \rho F \varphi^{-1}$. Пусть $x \in (\rho F)^{-1}(c_1)$, тогда $\varphi(x)$ — изолированная особая точка векторного поля $\pi_i \rho F \varphi^{-1}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Так как 0 — изолированная особая точка линейного векторного поля $T^{i-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, то по формуле произведения индексов (см. [2]) имеем:

$$\operatorname{ind}(T^{i-1}\pi_i\rho F\varphi^{-1},\varphi(x)) =$$
$$= \operatorname{ind}(T^{i-1},0)\cdot\operatorname{ind}(\pi_i\rho F\varphi^{-1},\varphi(x)) =$$
$$= \operatorname{sgn}\det T^{i-1}\cdot\operatorname{ind}(\pi_i\rho F\varphi^{-1},\varphi(x)).$$

Так как $\|F(x)\|>0$ для $x\in M^{n-1}$ и $\pi_i\rho F(x)=\dfrac{1}{\|F(x)\|}\pi_i F(x)$, а умножение векторного поля на функцию, положительную в проколотой окрестности особой точки векторного поля, не изменяет индекса (см. [2]), то $\operatorname{ind}(\pi_i\rho F\varphi^{-1},\varphi(x))=\operatorname{ind}(\pi_i F\varphi^{-1},\varphi(x))$. Обозначая $\operatorname{ind}(\pi_i F\varphi^{-1},\varphi(x))=\operatorname{ind}(\pi_i F,x)$, получаем

$$\deg(\rho F)=\operatorname{sgn}\det T^{i-1}\sum_{x\in(\rho F)^{-1}(c_1)}\operatorname{ind}(\pi_i F,x). \quad (11)$$

Аналогичным образом получаем

$$\deg(\rho F)=\operatorname{sgn}\det T^{i}\sum_{x\in(\rho F)^{-1}(c_2)}\operatorname{ind}(\pi_i F,x). \quad (12)$$

Так как $T\in GL_-(n-1,\mathbb{R})$, то $\operatorname{sgn}\det T^i=-\operatorname{sgn}\det T^{i-1}$. Складывая (11) и (12), получаем следующую формулу:

$$\deg(\rho F)=\frac{(-1)^{i-1}}{2}\sum_{x\in(\pi_i F)^{-1}(0)}\operatorname{ind}(\pi_i F,x)\operatorname{sgn}F_i(x).$$

Далее, так как множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы, то правую часть последнего равенства можно записать в виде суммы (10) индексов Коши:

$$\deg(\rho F)=$$
$$=\frac{(-1)^{i-1}}{2}\sum_{U_k\in\mathfrak{A}}\operatorname{ind}_C\left((\pi_i F\varphi_k^{-1}),(F\varphi_k^{-1})_i,\varphi_k(U_k)\right).$$

■

Теорема 3. *Пусть $F=(F_1,F_2)$ — аналитическое векторное поле в $\mathbb{R}^2$ с особой точкой 0 и удобными диаграммами Ньютона Γ_1,Γ_2 компонент, являющееся $\mathbb{R}$-невырожденным. Пусть для всякого ребра Δ диаграммы Γ_1 прямая, содержащая это ребро, имеет уравнение $\alpha_1^{(\Delta)}y_1+\alpha_2^{(\Delta)}y_2=d_1^{(\Delta)}$, а прямая, содержащая $\tilde{\Delta}$ — уравнение $\alpha_1^{(\Delta)}y_1+\alpha_2^{(\Delta)}y_2=d_2^{(\Delta)}$. Тогда 0 — изолированная особая точка поля F и для ее топологического индекса $ind(F,0)$ справедлива формула:*

$$\operatorname{ind}(F,0)=$$
$$=-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}}æ_\Delta\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde\Delta}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde\Delta}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}\right)+ \quad (13)$$
$$+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}}æ_\Delta\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde\Delta}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde\Delta}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}\right),$$

где $æ_\Delta=\dfrac{1+(-1)^{d_1^{(\Delta)}+d_2^{(\Delta)}+\alpha_1^{(\Delta)}+\alpha_2^{(\Delta)}}}{2}$.

Доказательство. Каждую из вещественных ветвей аналитических кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0$, $F_2(x_1,x_2)=0$, в окрестности точки 0 разложим в дробно-степенные ряды (Пюизо) вида $x_2=cx_1^{\nu}+o(x_1^{\nu})$ или $x_1=dx_2^{\mu}+o(x_2^{\mu})$ в зависимости от того, определяется ли данная ветвь ребром из класса $\Gamma_1^{(1)},\Gamma_2^{(1)}$ или $\Gamma_1^{(2)},\Gamma_2^{(2)}$, соответственно. Кривые с уравнениями вида $x_2=cx_1^{\nu}$ или $x_1=dx_2^{\mu}$, соответственно, будем называть асимптотиками этих ветвей. Так как диаграммы Γ_1,Γ_2 удобны, то прямые, задаваемые уравнениями $x_1=0$ и $x_2=0$, не являются решениями уравнений $F_i(x_1,x_2)=0, i=1,2$ и, следовательно, ряды Пюизо указанного вида полностью описывают множества $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:F_i(x_1,x_2)=0\}$, $i=1,2$ в окрестности точки 0. По условию для всякого ребра Δ из класса $\Gamma_1^{(1)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(1,x_2)$, $F_{2,\tilde\Delta}(1,x_2)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней и для всякого ребра Δ из класса $\Gamma_1^{(2)}$ многочлены $F_{1,\Delta}(x_1,1)$, $F_{2,\tilde\Delta}(x_1,1)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней. Поэтому разложения Пюизо кривых $F_1(x_1,x_2)=0,$ $F_2(x_1,x_2)=0$ в окрестности точки 0 не имеют одинаковых первых членов и, следовательно, особая точка 0 векторного поля F всегда изолирована. Пусть $\varepsilon>0$ мало так, что в квадрате $Q_{\varepsilon,\varepsilon}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:|x_1|\le\varepsilon,|x_2|\le\varepsilon\}$ нет ненулевых особых точек векторного поля F и так, чтобы все вещественные ветви аналитических кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0,$ $F_2(x_1,x_2)=0$, и их асимптотики пересекали всякую прямую вида $x_1=h,$ $x_2=h,$ $h\neq0$ внутри квадрата $Q_{\varepsilon,\varepsilon}$ трансверсально, а также чтобы в множестве $Q_{\varepsilon,\varepsilon}\setminus 0$ вещественные ветви кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0,$ $F_2(x_1,x_2)=0$, не пересекались сами с собой, друг с другом, со своими асимптотиками и асимптотиками друг друга, а также чтобы не пересекались их асимптотики. Кроме того, будем считать, что $\varepsilon>0$ настолько мало, чтобы этого было достаточно в дальнейших рассуждениях.

Индекс $\operatorname{ind}(F,0)$ нулевой особой точки векторного поля F будем вычислять как степень отображения $\rho F:M^1\to S^1$ специального малого положительно ориентированного многообразия M^1, диффеоморфного окружности, в единичную окружность $S^1=S_1^1(0)$. При этом для каждого векторного поля конструируется свое многообразие M^1. Построим многообразие M^1. Пусть Δ — некоторое ребро диаграммы Ньютона Γ_1 компоненты $F_1(x_1,x_2)$ поля F. Рассмотрим два случая.

1) $\Delta \in \Gamma_1^{(1)}$.

В каждом из четырех открытых квадрантов внутри квадрата $Q_{\varepsilon,\varepsilon}$ выберем по вертикальному интервалу

$$\begin{aligned}
J_\Delta^{(1)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 = \varepsilon_\Delta^{(1)},\\
&\qquad \varepsilon_\Delta^{(1)} > 0,\ \beta_\Delta^{(1)} < x_2 < \gamma_\Delta^{(1)}\},\\
J_\Delta^{(2)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 = -\varepsilon_\Delta^{(2)},\\
&\qquad \varepsilon_\Delta^{(2)} > 0,\ \beta_\Delta^{(2)} < x_2 < \gamma_\Delta^{(2)}\},\\
J_\Delta^{(3)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 = -\varepsilon_\Delta^{(3)},\\
&\qquad \varepsilon_\Delta^{(3)} > 0,\ \beta_\Delta^{(3)} < x_2 < \gamma_\Delta^{(3)}\},\\
J_\Delta^{(4)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1 = \varepsilon_\Delta^{(4)},\\
&\qquad \varepsilon_\Delta^{(4)} > 0,\ \beta_\Delta^{(4)} < x_2 < \gamma_\Delta^{(4)}\},
\end{aligned}$$

так, чтобы интервал $J_\Delta^{(k)}$ пересекал все вещественные ветви кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0,\ F_2(x_1,x_2)=0$, и их асимптотики, определяемые ребрами Δ и $\widetilde{\Delta}$ (расположенные в k-ом квадранте), $k=1,2,3,4$ и не пересекал других вещественных ветвей кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0$, $F_2(x_1,x_2)=0$, и их асимптотик. (При отсутствии вещественных ветвей и асимптотик в соответствующем квадранте интервал $J_\Delta^{(k)}$ должен пересекать кривую с уравнением $x_2 = x_1^{\nu_\Delta}$).

2) $\Delta \in \Gamma_1^{(2)}$.

В каждом из четырех открытых квадрантов внутри квадрата $Q_{\varepsilon,\varepsilon}$ выберем по горизонтальному интервалу

$$\begin{aligned}
J_\Delta^{(1)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \beta_\Delta^{(1)} < x_1 < \gamma_\Delta^{(1)},\\
&\qquad x_2 = \varepsilon_\Delta^{(1)},\ \varepsilon_\Delta^{(1)} > 0\},\\
J_\Delta^{(2)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \beta_\Delta^{(2)} < x_1 < \gamma_\Delta^{(2)},\\
&\qquad x_2 = \varepsilon_\Delta^{(2)},\ \varepsilon_\Delta^{(2)} > 0\},\\
J_\Delta^{(3)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \beta_\Delta^{(3)} < x_1 < \gamma_\Delta^{(3)},\\
&\qquad x_2 = -\varepsilon_\Delta^{(3)},\ \varepsilon_\Delta^{(3)} > 0\},\\
J_\Delta^{(4)} &= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \beta_\Delta^{(4)} < x_1 < \gamma_\Delta^{(3)},\\
&\qquad x_2 = -\varepsilon_\Delta^{(4)},\ \varepsilon_\Delta^{(4)} > 0\},
\end{aligned}$$

так, чтобы интервал $J_\Delta^{(k)}$ пересекал все вещественные ветви кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0,\ F_2(x_1,x_2)=0$, и их асимптотики, определяемые ребрами Δ и $\widetilde{\Delta}$ (расположенные в k-ом квадранте), $k=1,2,3,4$ и не пересекал других вещественных ветвей кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0$, $F_2(x_1,x_2)=0$, и их асимптотик. (При отсутствии вещественных ветвей и асимптотик в соответствующем квадранте интервал $J_\Delta^{(k)}$ должен пересекать кривую с уравнением $x_1 = x_2^{\nu_\Delta}$).

Все интервалы (вертикальные и горизонтальные), построенные для каждого из ребер Δ диаграммы Γ_1, соединим последовательно гладкими кривыми, не пересекая кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1,x_2)=0$, $F_2(x_1,x_2)=0$, и асимптотик их ветвей, образуя одномерное многообразие M^1, диффеоморфное окружности S^1. Эти соединения осуществим таким образом, чтобы при обходе многообразия M^1 в положительном направлении (против часовой стрелки): обход всех горизонтальных интервалов в верхней полуплоскости совершался в направлении, обратном направлению оси x_1, а в нижней полуплоскости — в направлении оси x_1; обход всех вертикальных интервалов в правой полуплоскости совершался в направлении оси x_2, а в левой полуплоскости — в направлении, обратном направлению оси x_2. Принцип соединения интервалов продемонстрируем на примере I-го квадранта. Ребра диаграммы Ньютона Γ_1 упорядочим обходя Γ_1 снизу вверх. Таким же образом упорядочим интервалы I-го квадранта, построенные по ребрам диаграммы Γ_1. Пусть $J_1,\dots,J_p$ — указанная последовательность интервалов и J_s, J_{s+1} — какие-нибудь соседние интервалы последовательности. Тогда, если J_s — горизонтальный интервал, то его левый конец, а если J_s — вертикальный интервал, то его верхний конец соединим с правым концом интервала J_{s+1}, если он горизонтальный, и с нижним концом интервала J_{s+1}, если он вертикальный. Пример построения многообразия M^1 приведен на рисунке 1.

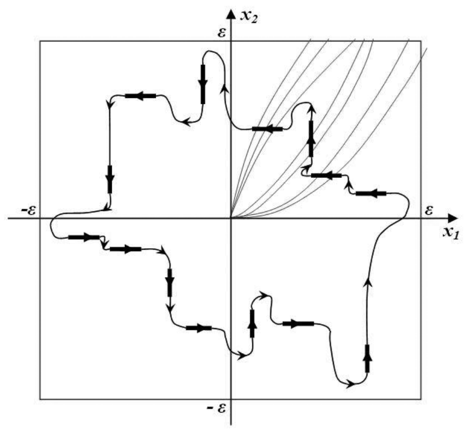

Рис. 1

Заданную положительную ориентацию на M^1 можно описать на языке ориентированных атласов. Нам потребуется лишь следующее подмножество $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ карт такого ориентированного атласа: множествами U_λ его карт $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ являются все построенные вертикальные и горизонтальные интервалы, а отображениями $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}$ служат проекции (с альтернирующим множителем): вертикальных интервалов на ось x_2, а горизонтальных — на ось x_1. Точнее,

1) для всякого вертикального интервала U_λ из первого и четвертого квадрантов отображением карты $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ является отображение $\varphi_\lambda = \pi_1$, а из второго и третьего квадрантов — отображение $\varphi_\lambda = -\pi_1$;

2) для всякого горизонтального интервала U_λ из первого и второго квадрантов отображением карты $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ является отображение $\varphi_\lambda = -\pi_2$, а из третьего и четвертого квадрантов — отображение $\varphi_\lambda = \pi_2$.

Так как число вещественных ветвей кривых, задаваемых уравнениями $F_1(x_1, x_2) = 0$, $F_2(x_1, x_2) = 0$, конечно и все они пересекают многообразие M^1 только по горизонтальным и вертикальным интервалам атласа $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, причем трансверсально, то множество $F_1^{-1}(0,0) \cap M^1$ конечно, следовательно, для вычисления степени отображения $\rho F : M^1 \to S^1$ можно воспользоваться формулой (10) п. 2, применяя которую для $i = 2$, получаем

$$\begin{gathered}
\operatorname{ind}(F, 0) = \\
= -\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} \operatorname{ind}_C(F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), F_2(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), \pi_1(J_\Delta^{(1)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} \operatorname{ind}_C(F_1(-\varepsilon_\Delta^{(2)}, -x_2), F_2(-\varepsilon_\Delta^{(2)}, -x_2), -\pi_1(J_\Delta^{(2)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} \operatorname{ind}_C(F_1(-\varepsilon_\Delta^{(3)}, -x_2), F_2(-\varepsilon_\Delta^{(3)}, -x_2), -\pi_1(J_\Delta^{(3)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} \operatorname{ind}_C(F_1(\varepsilon_\Delta^{(4)}, x_2), F_2(\varepsilon_\Delta^{(4)}, x_2), \pi_1(J_\Delta^{(4)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} \operatorname{ind}_C(F_1(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(1)}), F_2(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(1)}), -\pi_2(J_\Delta^{(1)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} \operatorname{ind}_C(F_1(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(2)}), F_2(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(2)}), -\pi_2(J_\Delta^{(2)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} \operatorname{ind}_C(F_1(x_1, -\varepsilon_\Delta^{(3)}), F_2(x_1, -\varepsilon_\Delta^{(3)}), \pi_2(J_\Delta^{(3)})) + \\
+ \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} \operatorname{ind}_C(F_1(x_1, -\varepsilon_\Delta^{(4)}), F_2(x_1, -\varepsilon_\Delta^{(4)}), \pi_2(J_\Delta^{(4)})) \Bigg).
\end{gathered} \tag{14}$$

В каждом из индексов Коши, фигурирующих в последнем равенстве, функции $F_1(x_1, x_2)$, $F_2(x_1, x_2)$ можно заменить их главными частями $F_{1,\Delta}(x_1, x_2), F_{2,\tilde\Delta}(x_1, x_2)$. Возможность такой замены покажем на примере первого индекса Коши из правой части равенства (14), т. е. установим равенство

$$\begin{gathered}
\operatorname{ind}_C\left(F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right), F_2\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right), \pi_1\left(J_\Delta^{(1)}\right)\right) = \\
= \operatorname{ind}_C\left(F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right), F_{2,\tilde\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right), \pi_1\left(J_\Delta^{(1)}\right)\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Возможность замен в других индексах Коши устанавливается аналогично. Нули функции $F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right) \in \mathbb{R}[x_2]$ на интервале $\pi_1\left(J_\Delta^{(1)}\right)$ определяются точками пересечения интервала $J_\Delta^{(1)}$ с вещественными ветвями, определяемыми ребром Δ, кривой, задаваемой уравнением $F_1(x_1, x_2) = 0$. Соответствующие этим ветвям ряды Пюизо, в данном случае, имеют вид $x_2 = cx_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta})$, где c — положительный корень многочлена $F_{1,\Delta}(1, x_2)$. Пусть $M = \{c_1, \ldots, c_p\}$ — множество всех положительных корней многочлена $F_{1,\Delta}(1, x_2)$ и c_i — какой-нибудь корень из M. Пусть кратность корня c_i равна k_i. Тогда вещественная кривая с уравнением $F_1(x_1, x_2) = 0$ имеет ровно k_i ветвей (с учетом их алгебраической кратности), соответствующие ряды Пюизо которых имеют вид $x_2 = c_i x_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta})$. Пусть $\left\{(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_1^{(i)}), \ldots, (\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}), a_1^{(i)} < a_2^{(i)} < \cdots < a_{q_i}^{(i)}\right\}$ — множество всех точек пересечения этих ветвей с интервалом $J_\Delta^{(1)}$, а $(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)})$ — точка пересечения кривой, задаваемой уравнением $x_2 = c_i x_1^{v_\Delta}$, с интервалом $J_\Delta^{(1)}$, т. е. $b^{(i)} = c_i\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}\right)^{v_\Delta}$. По условию многочлены $F_{1,\Delta}(1, x_2)$, $F_{2,\tilde\Delta}(1, x_2)$ не имеют общих ненулевых вещественных корней. Поэтому вещественная кривая с уравнением $F_2(x_1, x_2) = 0$ не имеет ветвей, ряды Пюизо которых имеют вид $x_2 = c_i x_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta})$ (независимо от того, является $\tilde\Delta$ ребром или точкой). Следовательно, для любого ряда вида $c_i x_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta})$ справедливо неравенство $F_2(x_1, c_i x_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta})) \not\equiv 0$. При всех достаточно малых $x_1 > 0$ знак всякого ряда $F_2(x_1, c_i x_1^{v_\Delta} + o(x_1^{v_\Delta}))$ определяется членом минимальной степени, который по построению рядов Пюизо равен $F_{2,\tilde\Delta}(x_1, c_i x_1^{v_\Delta})$. Поэтому при всех достаточно малых $x_1 = \varepsilon_\Delta^{(1)} > 0$ справедливы равенства

$$\begin{gathered}
\operatorname{sgn} F_2\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_1^{(i)}\right) = \cdots = \\
= \operatorname{sgn} F_2(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}) = \operatorname{sgn} F_{2,\tilde\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}).
\end{gathered} \tag{16}$$

Далее, имеем

$$\sum_{j=1}^{q_i} \operatorname{ind}(F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), a_j^{(i)}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q_i}(\operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}+0) - \operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}-0)). \quad (17)$$

Поскольку функция $F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right)$ между соседними нулями $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_{q_i}^{(i)}$ сохраняет знак, то справедливы равенства

$$\operatorname{sgn} F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}+0\right) = \\ = \operatorname{sgn} F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{j+1}^{(i)}-0\right), \ j = 1, \ldots, q_i - 1.$$

Поэтому равенство (17) можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{q_i} \operatorname{ind}\left(F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right), a_j^{(i)}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn} F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}+0\right) - \operatorname{sgn} F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_1^{(i)}-0\right)\right). \quad (18)$$

Покажем теперь, что

$$\operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}+0) = \operatorname{sgn} F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}+0), \quad (19)$$

$$\operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_1^{(i)}-0) = \operatorname{sgn} F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}-0). \quad (20)$$

Установим равенство (19), равенство (20) устанавливается аналогично. На интервале $J_\Delta^{(1)}$ точки, сколь угодно близкие сверху к точке $(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)})$, можно получить как точки пересечения интервала $J_\Delta^{(1)}$ с кривой, задаваемой уравнением $x_2 = (c_i + \delta)x_1^{\nu_\Delta}$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Знак числа $F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}+0)$ совпадает со знаком ряда

$$F_1(x_1, (c_i + \delta)x_1^{\nu_\Delta}) \quad (21)$$

при всех достаточно малых $x_1 = \varepsilon_\Delta^{(1)}$ и $\delta > 0$. Знак ряда (21) определяется его членом наименьшей степени. Член наименьшей степени ряда (21) равен

$$F_{1,\Delta}(x_1, (c_i + \delta)x_1^{\nu_\Delta}). \quad (22)$$

Полагая в (22) $x_1 = \varepsilon_\Delta^{(1)}$, обозначая $\delta_1 = \delta(\varepsilon_\Delta^{(1)})^{\nu_\Delta}$ и учитывая, что $b^{(i)} = c_i(\varepsilon_\Delta^{(1)})^{\nu_\Delta}$, получим

$$F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, (c_i+\delta)(\varepsilon_\Delta^{(1)})^{\nu_\Delta}\right) = \\ = F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, c_i(\varepsilon_\Delta^{(1)})^{\nu_\Delta} + \delta(\varepsilon_\Delta^{(1)})^{\nu_\Delta}\right) = F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)} + \delta_1\right).$$

При малых $\varepsilon_\Delta^{(1)} > 0$ и $\delta > 0$ величина δ_1 также мала и положительна. Таким образом при всех достаточно малых $\varepsilon_\Delta^{(1)} > 0$ и $\delta > 0$ справедливы равенства

$$\operatorname{sgn} F_1\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_{q_i}^{(i)}+0\right) = \operatorname{sgn} F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}+\delta_1\right) = \\ = \operatorname{sgn} F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}+0\right).$$

Теперь, используя равенства (16), (18), (19), (20), запишем индекс Коши (15) следующим образом:

$$\operatorname{ind}_C(F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), F_2(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), \pi_1(J_\Delta^{(1)})) = \\ = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q_i} \operatorname{ind}(F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), a_j^{(i)}) \operatorname{sgn} F_2(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}) = \\ = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q_i} \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}+0) - \\ - \operatorname{sgn} F_1(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}-0)) \operatorname{sgn} F_2(\varepsilon_\Delta^{(1)}, a_j^{(i)}) = \\ = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}+0) - \\ - \operatorname{sgn} F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}-0)) \operatorname{sgn} F_{2,\tilde\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}) = \\ = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{ind}(F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), b^{(i)}) \operatorname{sgn} F_{2,\tilde\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, b^{(i)}) = \\ = \operatorname{ind}_C(F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), F_{2,\tilde\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2), \pi_1(J_\Delta^{(1)})),$$

что и завершает доказательство равенства (15).

Заменив в каждом из слагаемых в равенстве (14) функции $F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)$ на их главные части $F_{1,\Delta}(x_1, x_2)$, $F_{2,\tilde\Delta}(x_1, x_2)$, а одномерные индексы Коши, фигурирующие в этом равенстве, на соответствующие индексы Коши рациональных функций (см. п. 2), получим

$$\operatorname{ind}(F, 0) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(1)}}^{\gamma_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)}, x_2\right)} + \right. \\ + \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{-\gamma_\Delta^{(2)}}^{-\beta_\Delta^{(2)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)}, -x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)}, -x_2\right)} + \\ + \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{-\gamma_\Delta^{(3)}}^{-\beta_\Delta^{(3)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)}, -x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)}, -x_2\right)} + \\ + \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(4)}}^{\gamma_\Delta^{(4)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)}, x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)}, x_2\right)} + \\ + \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{-\gamma_\Delta^{(1)}}^{-\beta_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(1)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(1)}\right)} + \\ + \sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{-\gamma_\Delta^{(2)}}^{-\beta_\Delta^{(2)}} \frac{F_{2,\tilde\Delta}\left(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(2)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(-x_1, \varepsilon_\Delta^{(2)}\right)} +$$

$$+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(3)}}^{\gamma_\Delta^{(3)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}+$$

$$\left.+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(4)}}^{\gamma_\Delta^{(4)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}\right). \qquad (23)$$

Используя свойство 2) индексов Коши рациональных функций, запишем последнее равенство следующим образом:

$$\operatorname{ind}(F,0)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(1)}}^{\gamma_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}-\right.$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(2)}}^{\gamma_\Delta^{(2)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)},x_2\right)}-$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(3)}}^{\gamma_\Delta^{(3)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)},x_2\right)}+$$
$$+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{\beta_\Delta^{(4)}}^{\gamma_\Delta^{(4)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)},x_2\right)}- \qquad (24)$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(1)}}^{\gamma_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(1)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(1)}\right)}-$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(2)}}^{\gamma_\Delta^{(2)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(2)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(2)}\right)}+$$
$$+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(3)}}^{\gamma_\Delta^{(3)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}+$$
$$\left.+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{\beta_\Delta^{(4)}}^{\gamma_\Delta^{(4)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}\right).$$

Индексы Коши рациональных функций в правой части последнего равенства вычисляются на специально выбранных конечных интервалах $(\beta_\Delta^{(i)},\gamma_\Delta^{(i)})$, $i=1,2,3,4$. Эти интервалы можно расширить так, что указанные индексы Коши рациональных функций не изменятся. Точнее, если $(\beta_\Delta^{(i)},\gamma_\Delta^{(i)})\subset(0,+\infty)$, то интервал $(\beta_\Delta^{(i)},\gamma_\Delta^{(i)})$ можно заменить на интервал $(0,+\infty)$, а если $(\beta_\Delta^{(i)},\gamma_\Delta^{(i)})\subset(-\infty,0)$, то на интервал $(-\infty,0)$. Указанную замену поясним на примере первого индекса Коши $I_{\beta_\Delta^{(1)}}^{\gamma_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}$ из правой части равенства (24), возможность замены интервала для других индексов Коши объясняется аналогично. По условию, интервал $J_\Delta^{(1)}$ пересекает все вещественные ветви алгебраической кривой, задаваемой уравнением $F_{1,\Delta}(x_1,x_2)=0$, расположенные в I-ом открытом квадранте. Поскольку многочлен $F_{1,\Delta}(x_1,x_2)$ квазиоднороден, то любая вертикальная полупрямая в каждом открытом квадранте пересекает каждую из вещественных ветвей алгебраической кривой с уравнением $F_{1,\Delta}(x_1,x_2)=0$ только в одной точке. Поэтому вещественные ветви алгебраической кривой с уравнением $F_{1,\Delta}(x_1,x_2)=0$ не пересекают полупрямой $L_\Delta^{(1)}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1=\varepsilon_\Delta^{(1)}, 0<x_2<+\infty\}$ вне интервала $J_\Delta^{(1)}$, т. е. многочлен $F_{1,\Delta}(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2)\in\mathbb{R}[x_2]$ не имеет вещественных корней на множестве $(0,+\infty)\setminus(\beta_\Delta^{(1)},\gamma_\Delta^{(1)})$ и, значит, в силу свойства 1) индексов Коши справедливо равенство

$$I_{\beta_\Delta^{(1)}}^{\gamma_\Delta^{(1)}} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}=I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}.$$

Заменяя индексы Коши рациональных функций в формуле (24) по указанному правилу, получим

$$\operatorname{ind}(F,0)=-\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(1)},x_2\right)}-\right.\right.$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(2)},x_2\right)}-$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{-\infty}^{0} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(-\varepsilon_\Delta^{(3)},x_2\right)}+$$
$$\left.+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}} I_{-\infty}^{0} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)},x_2\right)}{F_{1,\Delta}\left(\varepsilon_\Delta^{(4)},x_2\right)}\right)+ \qquad (25)$$
$$+\left(-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(1)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(1)}\right)}-\right.$$
$$-\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{-\infty}^{0} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(2)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,\varepsilon_\Delta^{(2)}\right)}+$$
$$+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_{-\infty}^{0} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(3)}\right)}+$$
$$\left.\left.+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}} I_0^{+\infty} \frac{F_{2,\tilde{\Delta}}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}{F_{1,\Delta}\left(x_1,-\varepsilon_\Delta^{(4)}\right)}\right)\right).$$

Заменяя индексы Коши рациональных функций в правой части последнего равенства согласно лемме 2 и производя перегруппировку слагаемых, получим

$$\operatorname{ind}(F,0) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(1)}}\left(\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}\right)-\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(-1,x_2)}{F_{1,\Delta}(-1,x_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(-1,x_2)}{F_{1,\Delta}(-1,x_2)}\right)\right)+\sum_{\Delta\in\Gamma_1^{(2)}}\left(-\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}+\right.\right. \tag{26}$$

$$\left.+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}\right)+\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,-1)}{F_{1,\Delta}(x_1,-1)}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,-1)}{F_{1,\Delta}(x_1,-1)}\right)\right)\right).$$

Для вторых слагаемых под знаками сумм в (26) в силу леммы 1 справедливы равенства

$$I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(-1,x_2)}{F_{1,\Delta}(-1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(-1,x_2)}{F_{1,\Delta}(-1,x_2)}=$$

$$=(-1)^{d_1^{(\Delta)}+d_2^{(\Delta)}+\alpha_1^{(\Delta)}+\alpha_2^{(\Delta)}+1}\times \tag{27}$$

$$\times\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(1,x_2)}{F_{1,\Delta}(1,x_2)}\right),$$

$$I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,-1)}{F_{1,\Delta}(x_1,-1)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,-1)}{F_{1,\Delta}(x_1,-1)}=$$

$$=(-1)^{d_1^{(\Delta)}+d_2^{(\Delta)}+\alpha_1^{(\Delta)}+\alpha_2^{(\Delta)}+1}\times \tag{28}$$

$$\times\left(I_{-\infty}^{0}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}+I_0^{+\infty}\frac{F_{2,\tilde{\Delta}}(x_1,1)}{F_{1,\Delta}(x_1,1)}\right).$$

Заменяя вторые слагаемые под знаками сумм в (26) согласно равенствам (27), (28) и приводя подобные члены, получим равенство (13). ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Физматгиз, 1963. — 248 с.

2. *Красносельский М.А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

3. Введение в топологию : учеб. пособие / Ю. Г. Борисович [и др.]. — 2-е изд., доп. — М. : Наука : Физматлит, 1995. — 416 с.

4. *Близняков Н.М.* К задаче алгебраического вычисления индекса плоских полей / Н. М. Близняков // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. — 1974. — Вып. XV. — С. 14—18.

5. *Близняков Н.М.* Алгебраическое вычисление индекса / Н. М. Близняков // Методы решения операторных уравнений. — Воронеж, 1978. — С. 13—20.

6. *Близняков Н.М.* К вычислению индекса особой точки полилинейного векторного поля / Н. М. Близняков, Э. М. Мухамадиев // Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та. — 1971. — Вып. 4. — С. 19—29.

7. *Забрейко П.П.* О вычислении индекса Пуанкаре / П. П. Забрейко // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145, № 5. — С. 979—982.

8. *Забрейко П.П.* Вычисление индекса неподвижной точки векторного поля / П. П. Забрейко, М. А. Красносельский // Сиб. мат. ж. — 1964. — Т. 5, № 3. — С. 509—531.

9. *Забрейко П.П.* О вычислении индекса Пуанкаре плоских векторных полей / П. П. Забрейко, Н. В. Сенчакова // Вест. Ярослав. ун-та. — 1975. — Вып. 12. — С. 38—45.

10. *Мухамадиев Э.* О вычислении вращения конечномерного векторного поля / Э. Мухамадиев // Докл. АН Тадж. ССР. — 1967. — Т. XI, № 3. — С. 6—9.

11. *Сенчакова Н.В.* О вычислении индекса Пуанкаре нулевой особой точки векторных полей с однородными компонентами / Н. В. Сенчакова // Вестн. Ярослав. ун-та. — 1975. — Вып. 12. — С. 103—124.

12. *Сенчакова Н.В.* К теории особых точек плоских векторных полей / Н. В. Сенчакова // Качеств. и приближ. методы исслед. операторных уравнений. — Ярославль, 1976. — Вып. 1. — С. 136—150.

13. *Химшиашвили Г.Н.* О локальной степени гладкого отображения / Г. Н. Химшиашвили // Сообщ. АН Грузин. ССР. — 1977. — Т. 85, № 2. — С. 309—312.

14. *Химшиашвили Г.Н.* О локальной степени гладкого отображения / Г. Н. Химшиашвили // Труды Тбилисского мат. ин-та. — 1980. — Т. LXIV. — С. 105—124.

15. *Eisenbud D.* An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ / D. Eisenbud, H. Levine // Ann. Math. — 1977. — V. 106, № 1. — P. 19—44.

16. *Близняков Н.М.* К задаче вычисления индекса особой точки векторного поля в $\mathbb{R}^n$ / Н. М. Близняков // Успехи математических наук. — 1983. — Т. 38, № 5. — С. 143.

17. *Bliznyakov N.M.* Cauchy Indices and the Index of a Singular Point of a Vector Field / N. M. Bliznyakov // Lecture Notes in Mathematics. — 1986. — V. 1214. — P. 1—20.

18. *Khovanskii A.* Degree of rational mappings, and the theorems of Sturm and Tarski / A. Khovanskii, Y. Burda // Journal of Fixed Point Theory and Applications. — 2008. — V. 3, № 1. — P. 79—93.

19. *Эстеров А.И.* Индекс вещественной особой точки и ее диаграмма Ньютона / А. И. Эстеров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2003. — № 1. С. 8—12.

20. *Закалюкин В.М.* Алгебраическая вычислимость индекса особой точки векторного поля / В. М. Закалюкин // Функц. анализ и его прил. — 1972. — Т. 6, вып. 1. — С. 77—78.

21. *Близняков Н.М.* Вычисление и оценки особой точки векторного поля на плоскости / Н. М. Близняков ; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 26 с. — Деп. в ВИНИТИ 14.08.79, № 3041-79.

22. *Хованский А.Г.* Многогранники Ньютона и индекс векторного поля / А. Г. Хованский // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 4. — С. 234.

23. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

25. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены / М. М. Постников. — М. : Наука, 1981. — 176 с.

26. *Джоунс У.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. — М. : Мир, 1985. — 414 с.

Антюшина Ирина Викторовна — аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, тел. 8-960-123-50-62, E-mail: iamveryok@mail.ru.

Близняков Николай Михайлович — к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа математического факультета Воронежского государственного университета, тел. (4732)208-812, E-mail: bliznyakov@math.vsu.ru.

Antyushina Irina Viktorovna — post-graduate student of Mathematical Department, Voronezh State University, tel. 8-960-123-50-62, E-mail: iamveryok@mail.ru.

Bliznyakov Nikolay Mihaylovich — Cand. Sc. (Phys. and Math.), associate professor of the Chair of the Algebra and Topological Methods in Analysis of Mathematical Department, Voronezh State University, tel. (4732)208-812. E-mail: bliznyakov@math.vsu.ru.