УДК 537.86:519.2

РЕШАЮЩАЯ СТАТИСТИКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ ПРИ ПРИЕМЕ РАДИОСИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОЛИГАУССОВСКОГО ШУМА

В. И. Костылев, М. П. Сличенко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.03.2010 г.

Аннотация. Используя свойство инвариантности дифференциала вероятности, получены общие аналитические выражения для характеристической функции решающей статистики энергетического обнаружителя. Рассмотрен случай приема радиосигналов, случайные искажения которых описываются различными математическими моделями: нормальной, полигауссовской, и моделью, адекватной в случае наличия стационарно связанных гауссовских узкополосных помех.
Ключевые слова: гауссовский белый шум, гауссовские узкополосные помехи, полигауссовский шум, решающая статистика, характеристическая функция, энергетический обнаружитель.

Abstract. General analytical expressions for the characteristic function of the energy detector decision statistics are obtained using the invariance of the probability differential. The case of receiving radio signals which random distortions are described by different mathematical models (normal, polygaussian, and the model adequate in the presence of stationary related Gaussian narrowband interference) is considered.
Keywords: Gaussian white noise, Gaussian narrowband interference, polygaussian noise, decision statistics, the characteristic function, the energy detector.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе эффективности одного из этапов первичной обработки радиосигналов, предполагающего их энергетическое обнаружение на фоне шума, возникает задача определения вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения. Получение аналитического вида данных характеристик представляется возможным лишь при определении статистических параметров решающей (выходной) статистики обнаружителя.

Например, в работе [1] рассматривается случай энергетического обнаружения детерминированных радиосигналов на фоне гауссовского белого шума (ГБШ). При этом величина математической спектральной плотности мощности шумового фона полагалась известной. В данном случае, вид решающей статистики позволяет сделать непосредственный вывод о том, что последняя, в случае наличия радиосигнала, подчиняется нецентральному хи-квадрат распределению.

В [2—5] получены характеристики энергетического обнаружения в случае приема квазидетерминированных радиосигналов на фоне ГБШ. Плотность вероятности решающей статистики получена посредством усреднения условных одномерных функций распределения по области возможных значений случайной амплитуды радиосигнала.

В качестве модели шумового фона в [6, 7] используется негауссовская шумовая модель Лихтера, в [8] шумовой фон представлен в виде аддитивной смеси стационарных некоррелированных, а в [9—11] стационарно связанных гауссовских узкополосных помех и ГБШ.

Однако, в случае энергетического приема радиосигналов на фоне сложного шумового фона [6—11], для получения статистических характеристик решающей статистики необходимыми является использование соответствующего математического аппарата и выполнение ряда нетривиальных математических преобразований.

В качестве одного из возможных методов определения статистических характеристик решающей статистики является использование аппарата одномерных характеристических функций (ХФ) [6—11]. Необходимым условием

© Костылев В. И., Сличенко М. П., 2010

эффективности его применения является наличие известного аналитического вида решающей статистики, Ξ. Последний определяется выбором соответствующего алгоритма обработки входных данных.

Целью настоящей работы является получение общего вида одномерной характеристической функции решающей статистики энергетического обнаружителя в случае приема радиосигналов на фоне полигауссовского шума.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем случае, в работах [6, 8] решающая статистика имеет вид

$$\Xi = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2, \tag{1}$$

где $\Xi = \{\omega\}$; $\rho_k = \{x_k\}$ — статистически независимые гауссовские случайные величины с различными параметрами распределения; ω и x_k — области возможных значений Ξ и ρ_k соответственно, n — число отсчетов, $k = \overline{1,n}$.

Введем в рассмотрение случайные величины $\vartheta_k = \rho_k^2$, $k = \overline{1,n}$. ХФ ϑ_k обозначим в виде $\Theta_k(j\eta)$. С учетом статистической независимости слагаемых в (1), одномерная ХФ $\Theta_\Xi(j\eta)$ решающей статистики Ξ примет вид

$$\Theta_\Xi(j\eta) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_k(j\eta). \tag{2}$$

Таким образом, для вычисления (2), необходимо получить аналитический вид $\Theta_k(j\eta)$. Для этого, рассмотрим одно из следствий инвариантности дифференциала вероятности.

Известно [12], что одномерная ХФ случайной величины $\xi = \{x\}$, где x - возможное значение ξ, определяется как прямое преобразование Фурье ее одномерной плотности вероятности $W_\xi(x)$:

$$\Theta_\xi(j\eta) = \langle \exp(j\eta\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) \exp(j\eta x)\, dx\,, \tag{3}$$

где $\langle * \rangle$ — оператор статистического усреднения.

Введем в рассмотрение случайную величину $\chi = \{y\}$, имеющую одномерную плотность вероятности $W_\chi(y)$, причем $\chi = h(\xi) = \xi^2$. Область возможных значений χ неотрицательна: $y \geq 0$. Случайные величины ξ и χ связаны неоднозначной детерминированной зависимостью, так как обратная функция $h^{-1}(z)$ неоднозначна:

$$\xi = h^{-1}(\chi) = \pm\sqrt{\chi}\,.$$

Имеются две ветви $h_1^{-1}(\chi) = \sqrt{\chi}$ и $h_2^{-1}(\chi) = -\sqrt{\chi}$, а значит, существуют две несовместные возможности

$${}_1x_1 < \xi \leq {}_1x_1 + d\,{}_1x_1\,;\ {}_2x_1 < \xi \leq {}_2x_1 + d\,{}_2x_1\,,$$

обеспечивающие выполнение неравенства

$$y_0 < \chi \leq y_0 + dy_0\,,$$

где ${}_1x_1 = -{}_2x_1$, $d\,{}_1x_1 = -d\,{}_2x_1$, $y_0 = {}_1x_1^2 = {}_2x_1^2$; ${}_1x_1, {}_2x_1 \in x_1$.

Тогда свойство инвариантности дифференциала вероятности [12] запишется в виде:

$$W_\chi(y_0)|dy_0| = W_\xi({}_1x_1)|d\,{}_1x_1| + W_\xi({}_2x_1)|d\,{}_2x_1|\,. \tag{4}$$

В том случае, если ξ - гауссовская случайная величина (ГСВ), её плотность вероятности имеет вид

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-x^2 \big/ 2\sigma^2\right), \tag{5}$$

где σ^2 — дисперсия ГСВ ξ, причем будем полагать, что математическое ожидание ξ равно нулю. Тогда, учитывая (4) и (5), получим следующее соотношение:

$$W_\chi(y_0)|dy_0| = 2W_\xi({}_1x_1)|d\,{}_1x_1| = 2W_\xi({}_2x_1)|d\,{}_2x_1|\,. \tag{6}$$

Выражение для одномерной характеристической функции $\Theta_\chi(j\eta)$ случайной величины χ имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_\chi(j\eta) &= \int_0^\infty \exp(j\eta y) W_\chi(y)\, dy = \\ &= \int_0^\infty 2W_\xi(x) \exp[j\eta y(x)]\, dx, \end{aligned} \tag{7}$$

так как в пределах интегрирования $(0,\infty)$ переменные $y, x \geq 0$ и $|x| = x$, $|y| = y$.

Учитывая что $y(x) = x^2$, а также четность подынтегрального выражения в (7), получим

$$\begin{aligned} \Theta_\chi(j\eta) &= 2\int_0^\infty \exp(j\eta x^2) W_\xi(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\eta x^2) W_\xi(x)\, dx, \end{aligned}$$

$$\Theta_\chi(j\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\eta x^2) W_\xi(x)\, dx\,. \tag{8}$$

В случае, когда $m \equiv \langle \xi \rangle \neq 0$,

$$W_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

перепишем (4) в следующем виде

$$W_\chi(y)\, dy = W_\xi(x)|dx| + W_\xi(-x)|dx|\,. \tag{9}$$

Выражение (7) с учетом (9)

$$\Theta_\chi(j\eta)=\int_0^\infty \exp(j\eta y)W_\chi(y)\,dy= \\ =\int_0^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)\left[W_\xi(x)|dx|+W_\xi(-x)|dx|\right]. \quad (10)$$

В (10) можно опустить знак модуля, и записать в виде

$$\Theta_\chi(j\eta)=\int_0^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(x)\,dx+ \\ +\int_0^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(-x)\,dx. \quad (11)$$

С помощью замены переменной интегрирования, $z=-x$, выполним следующие математические преобразования

$$\int_0^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(-x)\,dx= \\ =-\int_0^{-\infty} \exp\left[j\eta(-z)^2\right]W_\xi(z)\,dz= \\ =\int_{-\infty}^0 \exp\left(j\eta z^2\right)W_\xi(z)\,dz=\int_{-\infty}^0 \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(x)\,dx.$$

Следовательно

$$\Theta_\chi(j\eta)=\int_{-\infty}^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(x)\,dx. \quad (12)$$

Учитывая (2), одномерную ХФ решающей статистики (1) окончательно можно представить в виде

$$\Theta_\Xi(j\eta)=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\ldots\int_{-\infty}^\infty \exp(j\eta\omega)\prod_{k=1}^n W_{\rho_k}(x_k)dx_k, \quad (13)$$

где $\prod_{k=1}^n W_{\rho_k}(x_k)$ — совместная n - мерная плотность вероятности набора ГСВ ρ_k в случае их статистической независимости.

РАССМОТРЕНИЕ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

В соответствии с (5), применительно к набору случайных величин ξ_k, $k=\overline{1,n}$, из (12) нетрудно получить

$$\Theta_k(j\eta)=\left(1-2j\eta\sigma_k^2\right)^{-1/2},\ \sigma_k^2=\left\langle\xi_k^2\right\rangle-\left\langle\xi_k\right\rangle^2. \quad (14)$$

Ввиду линейности оператора интегрирования в (12), когда $W_\xi(x)$ имеет полигауссовский вид [6, 7]

$$W_\xi(x)= \\ =\frac{(1-\alpha)}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right)+\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (15)$$

ХФ случайной величины $\chi=\xi^2$ также может быть записана в виде

$$\Theta_\chi(j\eta)=\int_{-\infty}^\infty \exp\left(j\eta x^2\right)W_\xi(x)\,dx.$$

Рассматривая решающую статистику Ξ (1), нетрудно получить выражение

$$\Theta_\Xi(j\eta)= \\ =\sum_{k=0}^n C_n^k(1-\alpha)^k\alpha^{n-k}\left(1-2j\eta\sigma_1^2\right)^{-\frac{k}{2}}\left(1-2j\eta\sigma_2^2\right)^{-\frac{n-k}{2}}, \quad (16)$$

используемое в работах [6, 7].

В том случае, когда $W_\xi(x)$ имеет вид [7]

$$W_\xi(x)=\frac{(1-\alpha)}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left[-\frac{\left(x-\langle\xi\rangle\right)^2}{2\beta}\right]+ \\ +\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\gamma}}\exp\left[-\frac{\left(x-\langle\xi\rangle\right)^2}{2\gamma}\right],$$

получаем

$$\Theta_\Xi(j\eta)=\prod_{k=1}^n\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{1-2j\eta\beta}}\exp\left[\frac{j\eta m_k^2}{1-2j\eta\beta}\right]+ \right. \\ \left. +\frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2j\eta\gamma}}\exp\left[\frac{j\eta m_k^2}{1-2j\eta\gamma}\right]\right\}, \quad (17)$$

где $m_k=\langle\rho_k\rangle$; α, β и γ — параметры стохастической шумовой модели, определенные в [7].

СЛУЧАЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СЛАГАЕМЫМИ РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

В [9—11] показано, что решающую статистику, после выполнения соответствующих преобразований, также можно представить в виде (1), однако ρ_k являются статистически зависимыми ГСВ.

В соответствии с определением ХФ

$$\Theta_\Xi(j\eta)=\left\langle\exp(j\eta\Xi)\right\rangle, \quad (18)$$

где статистическое усреднение выполняется по всей области возможных значений случайной величины Ξ. Учтем представление решающей статистики в виде $\Xi = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2$ и статистическую связь величин ρ_k. Последняя, в [9—11], обусловлена физически обоснованными законами, например: наличием эффекта многолучевости [9], распространением радиоволн вдоль физически неоднородных и топологически меняющихся трасс [10], в условиях плотной городской застройки [10—11].

Далее учтем, что статистическое усреднение в (18) выполняется по всей области возможных значений случайной величины Ξ и следствия (10—12) из свойства инвариантности дифференциала вероятности при квадратичном преобразовании элементов набора ГСВ. В случае наличия статистической зависимости между ρ_k, выражение для ХФ (18) примет вид

$$\Theta_\Xi(j\eta) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\eta\omega) W_0(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n, \quad (19)$$

где

$$W_0(x_1, x_2, ..., x_n) = \\ = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{K})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right].$$

Окончательно

$$\Theta_\Xi(j\eta) = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{K})^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right] \times \quad (20) \\ \times \exp\left(j\eta \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \prod_{k=1}^{n} dx_k$$

где $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$ — несингулярная матрица корреляции величин x_i, x_j; $i, j = \overline{1, n}$; $\mathbf{C} = \{C_{ij}\}$ — обратная матрица, удовлетворяющая уравнению $\mathbf{K} \times \mathbf{C} = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ - единичная матрица размера $n \times n$; $m_k = \langle \rho_k \rangle$.

В случае отсутствия статистической связи между ρ_k, имеет место равенство

$$W_0(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{k=1}^{n} W_{\rho_k}(x_k). \quad (21)$$

Выражение (20) примет полученный ранее вид (13)

$$\Theta_\Xi(j\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\eta\omega) \prod_{k=1}^{n} W_{\rho_k}(x_k) dx_k.$$

Отметим, что в работах [5, 7] рассматривается случай энергетического обнаружения радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности. При использовании процедуры обучения, решающая статистика $\tilde{\Xi}$ представима в виде:

$$\tilde{\Xi} = (n_2 \Xi_1)/(n_1 \Xi_2), \quad (22)$$

где Ξ_1 и Ξ_2 — случайные величины вида (1) с различными величинами n_1 и n_2. При этом, в [5] отсчеты ρ_k являются ГСВ, а в [7] — полигауссовскими. Плотность вероятности $W_{\tilde{\Xi}}(z)$ статистики $\tilde{\Xi}$ можно выразить через плотности вероятностей $W_{\Xi_1}(z)$ и $W_{\Xi_2}(z)$ величин Ξ_1 и Ξ_2 следующим образом [7]

$$W_{\tilde{\Xi}}(z) = \int_0^{\infty} W_{\Xi_1}(zx) W_{\Xi_2}(x)\, x dx. \quad (23)$$

Для получения аналитического вида плотности вероятности $W_{\tilde{\Xi}}(z)$ необходимо вычислить $W_{\Xi_1}(z)$ и $W_{\Xi_2}(z)$. Таким образом, выражение (19) совместно со свойством ХФ (3) позволяет получить характеристики энергетического обнаружения радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности. При этом шумовая модель может быть как гауссовской [1—5, 8—11], так и полигауссовской [6, 7].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражения (16—17) позволяют получить аналитический вид характеристик энергетического обнаружения радиосигналов на фоне полигауссовского шума (15), а (19) — на фоне стационарно связанных гауссовских узкополосных помех и ГБШ, а также в случае использования процедуры адаптации. Данные выражение для ХФ решающей статистики энергетического обнаружителя получены на основе свойства инвариантности дифференциала вероятности применительно к полигауссовским случайным величинам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Urkowitz H.* Energy Detection of Unknown Deterministic signals / H. Urkowitz //Proc. IEEE. — 1967. — Vol. 55. — P. 523—531.

2. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов / В. И. Костылев // Известия вузов. Радиофизика. — 2000. — Т. XLIII, № 10. — С. 926—932.

3. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с нерелеевским распределением флуктуаций амплитуды / В. И. Костылев // Изв. вузов. Радиофизика .— 2002 .— Т. 45, № 5 . — С. 450—457.

4. *Kostylev V. I.* Energy Detection of a Signal with Random Amplitude / V. I.Kostylev // Proceeding IEEE International Conference on Communication: ICC'02, May 2002, New York, 2002 .— P. 1606—1610.

5. *Трифонов А. П.* Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности / А. П.Трифонов, В. И. Костылев // Изв. вузов. Радиофизика.— 2002 .— Т. 45, № 6 .— С. 538—547.

6. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения неизвестных радиосигналов на фоне шума Лихтера / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Изв. вузов. Радиофизика, — 2008.— Т. LI, № 10. — С. 889—898.

7. *Костылев В. И.* Энергетическое обнаружение радиосигналов на фоне негауссовского шума неизвестной интенсивности / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Изв. вузов. Радиофизика, — 2009.— Т. LII, № 11.— С. 910—920.

8. *Костылев В. И.* Решающая статистика энергетического обнаружителя при приеме федингующих радиосигналов на фоне гауссовских узкополосных помех и белого шума / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Радиолокация, навигация, связь: 15 Международ. науч.-техн. конф., г. Воронеж, 14—16 апр. 2009 г. — Воронеж, 2009 .— Т. 1. — С. 272—281.

9. *Костылев В. И.* Выходная статистика энергетического обнаружителя при приеме федингующих радиосигналов на фоне стационарно связанных гауссовских узкополосных помех и белого шума / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Радиолокация, навигация, связь: 15 Международ. науч.-техн. конф., г. Воронеж, 14—16 апр. 2009 г. — Воронеж, 2009 .— Т. 1. — С. 260—271.

10. *Радзиевский В. Г.* Многопозиционная система определения координат источников радиоизлучения по измерениям амплитуды на фоне гауссовских узкополосных помех и белого шума / В. Г. Радзиевский, М.П. Сличенко // Теория и техника радиосвязи, — 2009.— №1. — С. 48—56.

11. *Сличенко М. П.* Алгоритм многократного измерения информационных параметров источника радиоизлучения при наличии контрпомех/ М.П. Сличенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии.— Воронеж, 2008 .— № 2. — С. 18—24.

12. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Радио и связь, 1982 .— 624 с.

Костылев Владимир Иванович, доктор ф.-м. наук, профессор кафедры электроники Воронежского государственного университета. Тел.: (4732) 788-181. E-mail: kostylev@phys.vsu.ru

Сличенко Михаил Павлович, аспирант кафедры электроники Воронежского государственного университета. Тел.: (4732) 769-518. E-mail: asp2010@mail.ru

Kostylev V. I., doctor of physical-mathematical sciences, Professor, Department of Electronics, Voronezh State University. Tel.: (4732) 788-181. E-mail: kostylev@phys.vsu.ru

Slichenko M. P., postgraduate student, Department of Electronics, Voronezh State University. Tel.: (4732) 769-518. E-mail: asp2010@mail.ru