УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. С. Сотников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.09.2009 г.

Аннотация. Абстрактное квазилинейное параболическое уравнение в условии гладкой разрешимости решается проекционно-разностным методом, с использованием по времени линейной схемы Эйлера неявной в главной части. Установлена сходимость и скорость сходимости приближённых решений к точному решению в норме, равномерной по времени и энергетической по пространству.
Ключевые слова: гильбертово пространство, квазилинейное параболическое уравнение, проекционно-разностный метод.

Abstract. In the conditions of smooth resolvability the abstract quasilinear parabolic equation is resolved by the projection difference method, by using in time the linear scheme of Euler which is implicit in its main part. Convergence and speed of convergence of the approached decisions to the exact decision in norm that is uniform in time and energetic in space are calculated.
Keywords: Hilbert space, quasilinear parabolic problem, projection difference method.

ПОСТАНОВКА ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧ

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предполагается, что для всех $u, v \in V$ функции $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$|\, a(t,u,v) \,| \le M_1 \|u\|_V \|v\|_V , \qquad \mathrm{Re}\, a(t,u,u) \ge \delta \|u\|_V^2 , \tag{1}$$

где $\delta > 0$. Предполагается, что для почти всех $t \in [0,T]$ и для $u, v \in V$ выполняется оценка

$$\frac{\partial}{\partial t} a(t,u,v) \le M_2 \|u\|_V \|v\|_V . \tag{2}$$

Далее считаем, что форма $a(t,u,v)$ симметрична, т. е. $a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)}$, где черта над выражением означает комплексное сопряжение.

Форма порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$ и $\|A(t)\|_{V \to V'} \le M_1$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [1]. Оператор $A(t): D[A(t)] \in H \to H$, где $D[A(t)] = \{v \in V \mid A(t)v \in H\}$ самосопряжённый положительно определенный оператор и $D[A^{1/2}(t)] = V$ [2].

Предположим также, что на $[0,T] \times V$ задана функция $f(t,u)$, со значениями в H такая, что функция $f(t,u) \in L_2(0,T;H)$. Пусть также при каждом фиксированном $t \in [0,T]$ и для $u_1, u_2 \in V$

$$\|(f(t,u_1) - f(t,u_2)\|_H \le M_3 \|u_1 - u_2\|_V . \tag{3}$$

Заметим, что для функции $t \to u(t) \in V$, измеримой на $[0,T]$, функция $t \to f(t,u(t)) \in H$ будет измеримой на $[0,T]$. Кроме того, если $u(t) \in L_2(0,T;V)$, то из оценки, следующей из (3)

$$\|f(t,u(t))\|_H \le M_3 \|u(t)\|_V + \|f(t,\theta)\|_H ,$$

получаем $f[t,u(t)] \in L_2(0,T;H)$. Обратим внимание, что в приложениях условие (3) означает возможность нелинейности $f(t,u)$ содержать производные функции $u \in V$ по пространственным переменным.

В пространстве H рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u^0 \in V. \quad (4)$$

Далее рассмотрим вопрос о существовании решения $u(t)$ задачи (4) такого, что $u \in C([0,T],V)$ и $u'(t), A(t)u(t) \in L_2(0,T;H)$, а так же удовлетворяет начальному условию и почти всюду на $[0,T]$ уравнению (4). Такое решение будем называть обобщенным.

В [3] приводится

Лемма 1. *При сделанных выше предположениях на форму $a(t,u,v)$ оператор $A(t)$, как оператор в H, такой, что при всех $0 < \rho < 1/2$ и $t, s \in [0,T]$*

$$\left\| [A^\rho(t) - A^\rho(s)]A^{-\rho}(0) \right\| \le C(\rho) \mid t - s \mid .$$

Эта лемма позволяет воспользоваться результатами работ [4], [5], из которых следует, что операторы $A(t)$ порождают семейство разрешающих операторов $U(t,s)$ класса C^1. При этом линейная задача

$$\begin{gathered} u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \\ u(0) = u^0 \in V, \quad f(t) \in L_2(0,T;H) \end{gathered} \quad (5)$$

имеет обобщенное решение, которое задается формулой

$$u(t) = U(t,0)u^0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds, \quad (6)$$

а также справедлива оценка для всех $t \in [0,T]$

$$\begin{gathered} \|u(t)\|_V^2 + \int_0^t \left(\|u'(s)\|_H^2 + \|A(s)u(s)\|_H^2 \right) ds \le \\ \le M \left\{ \|u^0\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_H^2 \, ds \right\}. \end{gathered} \quad (7)$$

Задачу (4) сведем к интегральному уравнению

$$u(t) = U(t,0)u^0 + \int_0^t U(t,s)f[s,u(s)]ds. \quad (8)$$

Если (8) имеет решение $u \in C([0,T],V)$, то функция $u(t)$ будет обобщенным решением (4). В $C([0,t_0],V)$, где $t_0 \in (0,T]$, определим отображение

$$\Phi u(t) = U(t,0)u^0 + \int_0^t U(t,s)f[s,u(s)]ds.$$

Установим сжатие отображения Φ для $u, v \in C([0,t_0],V)$, используя (3).

$$\max_{0 \le t \le t_0} \|\Phi u - \Phi v\|_V^2 \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le t_0} \left\| \int_0^t U(t,s)\{f[s,u(s)] - f[s,v(s)]\}ds \right\|_V^2 \le$$

$$M\int_0^t \|f[s,u(s)] - f[s,v(s)]\|_H^2 \le$$

$$\le MM_3^2 \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_V^2 \, ds \le MM_3^2 t_0 \max_{0 \le t \le t_0} \|u - v\|_V^2 .$$

Для достаточно малого t_0 отображение $\Phi : C([0,t_0],V) \to C([0,t_0],V)$ является сжимающим, тогда (8) имеет единственное решение $u \in C([0,t_0],V)$, которое будет обобщенным решением на $[0,t_0]$ для (4).

Покажем, что решение $u(t)$ продолжимо на весь $[0,T]$. Для этого достаточно априорной оценки $\|u(t)\|_V \le C$.

$$\|u(t)\|_V^2 \le 2\left\|U(t,0)u^0\right\|_V^2 +$$

$$+2\left\|\int_0^t U(t,s)f[s,u(s)]ds\right\|_V^2 \le$$

$$C_1 \left\|u^0\right\|_V^2 + C_2 \int_0^t \|f[s,u(s)]\|_H^2 \, ds \le$$

$$C_1 \left\|u^0\right\|_V^2 + C_2 \int_0^t \|f[s,\theta]\|_H^2 \, ds + C_3 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 .$$

Отсюда

$$\|u(t)\|_V^2 \le M \left\{ \left\|u^0\right\|_V^2 + \int_0^T \|f(s,\theta)\|_H^2 \, ds \right\}.$$

Итак, задача (4) имеет обобщённое решение на всем отрезке [0,T].

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup \mid (u_h, v_h) \mid$, точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Нетрудно видеть, что $\|u_h\|_{V'_h} \le \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [6] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V'_h$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P}_h u\|_{V'_h} \le \|u\|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\|u_h\|_{V'} \le \le \|P_h\|_{V \to V} \|u_h\|_{V'_h}$ и для $u \in V'$ оценку $\|\overline{P}_h u\|_{V'} \le \le \|P_h\|_{V \to V} \|u\|_{V'}$ [7]. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [8].

Определим для $t \in [0,T]$ гильбертовы пространства

$$V(t) = \{u, v \in V \mid (u,v)_{V(t)} = a(t,u,v)\}. \quad (9)$$

Из (1) следует эквивалентность норм пространств V и $V(t)$, равномерная по $t \in [0,T]$.

$$\delta^{-1/2} \|u\|_V \le \|u\|_{V(t)} \le M_1^{1/2} \|u\|_V . \quad (10)$$

Обозначим через $Q_h(t)$ ортогональный проектор в пространстве $V(t)$ на V_h. Заметим, что

$$a(t,u,v_h)=a(t,Q_h(t)u,v_h)\ (u\in V, v_h\in V_h). \quad (11)$$

Из (11) следует соотношение

$$\overline{P}_h A(t)u=\overline{P}_h A(t)Q_h(t)u\ (u\in V). \quad (12)$$

Приведем 2 леммы, доказанные в [9].

Лемма 2. *Для* $u\in V$ *и* $t\in[0,T]$ *справедливы оценки*

$$\|[I-Q_h(t)]u\|_V\le M_1^{1/2}\delta^{-1/2}\|(I-Q_h)u\|_V \quad (13)$$

$$\|[I-Q_h(t)]u\|_H\le$$
$$\le M_1\|(I-Q_h)A^{-1}(t)\|_{H\to V}\|(I-Q_h)u\|_V. \quad (14)$$

Лемма 3. *Оператор* $Q_h(t)$ *сильно дифференцируем в* V *по* $t\in[0,T]$ *и для* $u\in V$

$$\|Q'_h(t)u\|_V\le M_1^{1/2}M_2\delta^{-3/2}\|(I-Q_h)u\|_V. \quad (15)$$

Установленные далее результаты о энергетической сходимости проекционно-разностного метода дополняют результаты работы [10], где аналогичные утверждения установлены для линейной задачи (5).

Для построения приближенной задачи для (4) предположим дополнительно, что функция $f(t,u)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда проекционно-разностную задачу можно рассмотреть в виде

$$\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P}_h A(t_k)u_k^h=P_h f(t_k,u_{k-1}^h)$$
$$(k=\overline{1,N}), \quad (16)$$

где N — натуральное число, $N\tau=T, t_k=k\tau$ и элемент $u_0^h\in V_h$ считаем заданным. Как и в [11] можно получить, что задача (16) имеет единственное решение.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема 1. *Пусть форма* $a(t,u,v)$, *функция* $f(t,u)$ *и элемент* u_0 *удовлетворяют всем вышеперечисленным условиям, гарантирующим существование обобщенного решения задачи (4). Пусть* $u(t)$ *— обобщенное решение задачи (4) такое, что* $u'\in L_2(0,T;V)$ *и* $u''\in L_1(0,T;H)$. *Пусть* u_k^h *— решение задачи (16). Тогда справедлива следующая оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$
$$\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_V^2\le$$
$$\le C\left\{\|Q_hu^0-u_0^h\|_V^2+\int_0^T\|[I-Q_h(t)]u'(t)\|_H^2dt+\right.$$
$$+\max_{0\le t\le T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2+\tau\left[\int_0^T\|u(t)\|_V^2dt+\right.$$
$$\left.\left.+\int_0^T\|u'(t)\|_V^2dt+\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H dt\right)^2\right]\right\}. \quad (17)$$

Доказательство. Определим функцию $w_h(t)=Q_h(t)u(t)$, где $u(t)$ — обобщенное решение задачи (4). Обозначим $z_k^h=w_h(t)-u_k^h\in V_h$. Возьмём задачу (4) в точке $t=t_k$, применим $\overline{P_h}$ и вычтем (16), используя (1)

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P}_hA(t_k)z_k^h=\frac{1}{\tau}[Q_h(t_k)u(t_k)-$$
$$-u_k^h-Q_h(t_{k-1})u(t_{k-1})+u_{k-1}^h]=$$
$$\frac{P_h[w_h(t_k)-w_h(t_{k-1})]}{\tau}-P_hu'(t_k)+$$
$$+P_h[f(t_k,u_{k-1}^h)-f(t_k,u(t_k))]. \quad (18)$$

Умножим (18) скалярно в H на $(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}$:

$$\left(\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau},\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)+\left(\overline{P}_hA(t_k)z_k^h,\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)=$$
$$\left(\frac{P_h[w_h(t_k)-w_h(t_{k-1})]}{\tau}-P_hu'(t_k),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)+$$
$$\left(P_h[f(t_k,u_{k-1}^h)-f(t_k,u(t_k))],\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right).$$

Учитывая дифференцируемость $Q_h(t)$, преобразуем выражение

$$\left(\frac{P_h[w_h(t_k)-w_h(t_{k-1})]}{\tau}-P_hu'(t_k),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)=$$
$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(w'_h(t)-u'(t),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt.$$

В результате получим

$$\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2+a\left(t_k,z_k^h,\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)=$$
$$=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt+$$
$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(w'_h(t)-u'(t),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt+$$
$$+\left(P_h[f(t_k,u_{k-1}^h)-f(t_k,u(t_k))],\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right). \quad (19)$$

Возьмём удвоенную вещественную часть от (19). Заметим, что

$$2\operatorname{Re} a\left(t_k, z_k^h, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right) =$$

$$\frac{1}{\tau}[a(t_k, z_k^h, z_k^h) - a(t_k, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) +$$

$$+a(t_k, z_k^h - z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h)].$$

Таким образом придем к следующему равенству

$$2\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 + \frac{a(t_k, z_k^h, z_k^h)}{\tau} -$$

$$-\frac{a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)}{\tau} +$$

$$+\frac{a(t_k, z_k^h - z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h)}{\tau} =$$

$$= \frac{a(t_k, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) - a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)}{\tau} + \tag{20}$$

$$+\frac{2\operatorname{Re}}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t) - u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt +$$

$$+\frac{2\operatorname{Re}}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(w'_h(t) - u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt +$$

$$+2\operatorname{Re}\left(P_h[f(t_k, u_{k-1}^h) - f(t_k, u(t_k))], \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right).$$

Оценим слагаемые правой части (20). Из (2) получим

$$I_1 \le M_2 \left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2.$$

Оценим второе и третье слагаемые:

$$I_2 \le 2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\, ds \left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H \le$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\, ds\right)^2 + \varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2,$$

$$I_3 \le \frac{1}{\tau\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|w'_h(t) - u'(t)\|_H^2\, dt +$$

$$+\varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

Для четвертого слагаемого используем неравенство (3).

$$I_4 \le \frac{1}{\varepsilon_3}\left\|f(t_k, u_{k-1}^h) - f(t_k, u(t_k))\right\|_H^2 +$$

$$+\varepsilon_3\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \le \frac{M_3^2}{\varepsilon_3}\left\|u_{k-1}^h - u(t_k)\right\|_V^2 +$$

$$+\varepsilon_3\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

Рассмотрим

$$\left\|u_{k-1}^h - u(t_k)\right\|_V^2 =$$

$$= 3\left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2 + 3\left\|w_h(t_{k-1}) - u(t_{k-1})\right\|_V^2 +$$

$$+3\left\|u(t_k) - u(t_{k-1})\right\|_V^2.$$

Тогда I_4 окончательно оценивается

$$I_4 \le \frac{3M_3^2}{\varepsilon_3}\left\|w_h(t_{k-1}) - u(t_{k-1})\right\|_V^2 +$$

$$+\frac{3M_3^2}{\varepsilon_3}\left\|u(t_k) - u(t_{k-1})\right\|_V^2 +$$

$$+\frac{3M_3^2}{\varepsilon_3}\left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2 + \varepsilon_3\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

В левой части (20) оценим снизу

$$\frac{a(t_k, z_k^h - z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h)}{\tau} \ge \frac{\delta}{\tau}\left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_V^2.$$

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1/3$, получим из (20)

$$\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 + \frac{\left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_V^2}{\tau} + \frac{a(t_k, z_k^h, z_k^h)}{\tau} -$$

$$-\frac{a(t_{k-1}, z_{k-1}^h, z_{k-1}^h)}{\tau} \le C_1\left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2 +$$

$$+C_2\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H\, dt\right)^2 + \tag{21}$$

$$+\frac{C_3}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|w'_h(t) - u'(t)\|_H^2\, dt +$$

$$+C_4\left\|w_h(t_{k-1}) - u(t_{k-1})\right\|_V^2 +$$

$$+C_5\left\|u(t_k) - u(t_{k-1})\right\|_V^2.$$

Умножим (21) на τ и просуммируем по k от 1 до $m \le N$.

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau + \left\|z_k^h - z_{k-1}^h\right\|_V^2\right) +$$

$$+a(t_m, z_m^h, z_m^h) \le a(0, z_0^h, z_0^h) +$$

$$+C_1\sum_{k=1}^{m}\left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2\tau + C_2\tau\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H\, dt\right)^2 +$$

$$+C_3\int_0^T\|w'_h(t) - u'(t)\|_H^2 + \tag{22}$$

$$+C_4\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|w_h(t_{k-1}) - u(t_{k-1})\right\|_V^2 +$$

$$+C_5\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|u(t_k) - u(t_{k-1})\right\|_V^2.$$

Отметим, что в силу (1)

$$a(t_m, z_m^h, z_m^h) \ge \delta\left\|z_m^h\right\|_V^2,\ a(0, z_0^h, z_0^h) \le M_1\left\|z_0^h\right\|_V^2.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{m}\left\|z_{k-1}^h\right\|_V^2\tau\le T\left\|z_0^h\right\|_V^2+\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|z_k^h\right\|_V^2.$$

В результате неравенство (22) преобразуем к виду

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\left\|z_k^h-z_{k-1}^h\right\|_V^2\right)+$$
$$+\left\|z_m^h\right\|_V^2\le C\left\{\left\|z_0^h\right\|_V^2+\tau\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H dt\right)^2+\right.$$
$$+\int_0^T\left\|w'_h(t)-u'(t)\right\|_H^2+\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|w_h(t_{k-1})-u(t_{k-1})\right\|_V^2+\qquad(23)$$
$$\left.+\tau^2\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right\}+C_1\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|z_k^h\right\|_V^2.$$

Выделим в (23) суммарное неравенство для $\left\|z_m^h\right\|_V^2$, которое приведет к оценке для $\max\limits_{0\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_V^2$.

Эту оценку подставим в правую часть (23) и получим оценку

$$\max_{0\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_V^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\right.$$
$$\left.+\left\|z_k^h-z_{k-1}^h\right\|_V^2\right)\le C\left\{\left\|z_0^h\right\|_V^2+\right.\qquad(24)$$
$$+\tau\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H dt\right)^2+\int_0^T\left\|w_h'(t)-u'(t)\right\|_H^2dt+$$
$$\left.+\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|w_h(t_{k-1})-u(t_{k-1})\right\|_V^2+\tau^2\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right\}.$$

Вспомним теперь, что $w'_h(t)=Q_h(t)u'(t)+$ $+Q'_h(t)u(t)$, и, учитывая непрерывное вложение $V\subset H$ и неравенство (15), имеем

$$\int_0^T\left\|w'_h(t)-u'(t)\right\|_H^2dt\le 2\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u'(t)\right\|_H^2dt+\qquad(25)$$
$$+C\max_{0\le t\le T}\left\|(I-Q_h)u(t)\right\|_V^2.$$

Используя (13), оценим

$$\tau\sum_{k=1}^{m}\left\|w_h(t_{k-1})-u(t_{k-1})\right\|_V^2\le T\max_{0\le t\le T}\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_V^2\le$$
$$\le TM_1\delta^{-1}\max_{0\le t\le T}\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_V^2.$$

Таким образом оценка (24) имеет вид

$$\max_{0\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_V^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\left\|z_k^h-z_{k-1}^h\right\|_V^2\right)\le$$
$$C\left\{\left\|z_0^h\right\|_V^2+\tau\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H dt\right)^2+\tau^2\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt+\right.\qquad(26)$$
$$\left.+\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u'(t)\right\|_H^2dt+\max_{0\le t\le T}\left\|(I-Q_h)u(t)\right\|_V^2\right\}.$$

В свою очередь, (26) преобразуем к виду, который позволил бы оценить погрешность

$$z_k=u(t_k)-u_k^h=[u(t_k)-w_h(t_k)]+z_k^h.$$

Теперь, используя (13), получим

$$\max_{1\le k\le N}\left\|z_k\right\|_V^2\le 2\max_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_V^2+$$
$$+2\max_{0\le t\le T}\left\|w_h(t)-u(t)\right\|_V^2\le\qquad(27)$$
$$\le 2\max_{1\le k\le N}\left\|z_k^h\right\|_V^2+2M_1\delta^{-1}\max_{0\le t\le T}\left\|(I-Q_h)u(t)\right\|_V^2.$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$z_k-z_{k-1}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u'(t)-w'(t)]dt+(z_k^h-z_{k-1}^h),$$

из которого следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau}\right\|_H^2\tau+\left\|z_k-z_{k-1}\right\|_V^2\right)\le$$
$$\le 2\int_0^T\left\|u'(t)-w'_h(t)\right\|_H^2dt+$$
$$+2\tau\int_0^T\left\|u'(t)-w'_h(t)\right\|_V^2dt+\qquad(28)$$
$$+2\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\left\|z_k^h-z_{k-1}^h\right\|_V^2\right).$$

В (25) уже получена оценка первого слагаемого правой части (28). Рассмотрим второе слагаемое правой части (25), используя (13) и (15).

$$\int_0^T\left\|u'(t)-w'_h(t)\right\|_V^2dt\le$$
$$\le c_1\int_0^T\left\|(I-Q_h)u(t)\right\|_V^2dt+$$
$$+c_2\int_0^T\left\|(I-Q_h)u'(t)\right\|_V^2dt\le\qquad(29)$$
$$\le M\left(\int_0^T\left\|u(t)\right\|_V^2dt+\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt\right).$$

Заметим, наконец, что

$$\sum_{k=1}^{N}(\left\|z_k-z_{k-1}\right\|_H^2\tau+\left\|z_k-z_{k-1}\right\|_V^2)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\qquad(30)$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_V^2.$$

Оценка (17) следует теперь из (26), (27), (28), (29) и (30).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1,* $u(t)$ *— обобщенное решение задачи (4) такое, что* $u'\in L_2(0,T;V)$ *и* $u''\in L_p(0,T;H)$ *для* $1\le p\le 2$. u_k^h *— решение задачи (16). Тогда справедлива следующая оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le \qquad (31)$$
$$\le C\left\{\left\|Q_hu^0-u_0^h\right\|_V^2+\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u'(t)\right\|_H^2dt+\right.$$
$$+\max_{0\le t\le T}\left\|(I-Q_h)u(t)\right\|_V^2+\tau^{3-2/p}\left[\int_0^T\left\|u'(t)\right\|_V^2dt+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}\right]\right\}.$$

Доказательство. В отличие от теоремы 1, необходимо иначе оценить слагаемое I_2 в (20).

$$I_2\le\frac{2}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u''(s)\right\|_H ds\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H\le$$
$$\le\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u''(s)\right\|_H ds\right)^2+\varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\le$$
$$\le\frac{\tau^{2-2/p}}{\varepsilon_1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u''(s)\right\|_H^p ds\right)^{2/p}+\varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

Затем, как в теореме 1, получим оценку, подобную (23), только вместо слагаемого $\tau\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H dt\right)^2$ будет $\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u''(t)\right\|_H^p dt\right)^{2/p}$.

Обратим внимание также на то, что вместо оценки (28) возникает более простая оценка

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau}\right\|_H^2\tau\le$$
$$\le 2\int_0^T\left\|u'(t)-w'_h(t)\right\|_H^2dt+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau,$$

так как сумма $\sum_{k=1}^N\left\|z_k-z_{k-1}\right\|_V^2$ в этом следствии не появляется.

Все это, как не трудно видеть, позволяет оценить первые два слагаемых в левой части (31).

Кроме того в левой части (31) остается рассмотреть слагаемое

$$\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le$$
$$\le\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt\right\|_H^2\tau+ \qquad (32)$$
$$+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau=I_1+I_2.$$

Оценка слагаемого I_2 в (32) уже установлена в (31). Рассмотрим слагаемое

$$I_1=2\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u'(t_k)-u'(t)]dt\right\|_H^2\le$$
$$\le 2\tau\sum_{k=1}^N\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u''(s)\right\|_H ds\right)^2\le \qquad (33)$$
$$\le 2\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\left\|u''(s)\right\|_H^p ds\right)^{2/p}.$$

Из (32) и (33) оценка (30) следует в полном объёме.

Сходимость и скорость сходимости. Из (17) и (31) естественным образом получается сходимость погрешности к нулю. Для этого достаточно предположить, что задана предельно плотная в V при $h\to 0$ последовательность подпространств V_h. Пусть при $h\to 0$ также $\left\|Q_hu^0-u_0^h\right\|_V\to 0$. Тогда при $\tau\to 0$ и $h\to 0$, например, из (17) следует

$$\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_V^2\to 0.$$

Можно также получать порядок скорости сходимости по пространственным переменным.

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D[A(t)]\subset E\subset V$ и $V=[E,H]_{1/2}$ [12]. Например, если оператор $A(t)$ порожден в области $\Omega\subset R^n$ с гладкой границей равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем $H=L_2(\Omega)$, $V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V'=W_2^{-1}(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области задано условие Неймана, то полагаем $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$.

Для получения скорости сходимости по пространству предполагается, что для подпространств V_h справедлива оценка

$$\left\|(I-Q_h)u\right\|_V\le r_1h\left\|u\right\|_E,\ u\in E, \qquad (34)$$

где константа $r_1>0$ не зависит от u и h.

Потребуем от оператора $A(t)$ выполнения следующей оценки. Пусть для $\alpha>0$ и для $t\in[0,T]$

$$\left\|u\right\|_E\le\alpha\left\|A(t)u\right\|_H\ \ (u\in D[A(t)]). \qquad (35)$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, подпространства V_h обладают свойством (34), а также выполнено условие (35). Пусть $u(t)$ — обобщенное решение задачи (4) такое, что $u' \in L_2(0,T;V)$, $u'' \in L_1(0,T;H)$ и $A(t)u(t) \in C([0,T];H)$, а u_k^h — решение задачи (16). Тогда справедлива следующая оценка*

$$\begin{gathered}\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2+\\ +\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\\ +\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt\right\|_V^2\le\\ \le C\left\{\left\|Q_hu^0-u_0^h\right\|_V^2+\tau\left[\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt+\right.\right.\\ \left.+\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H\,dt\right)^2\right]+\\ \left.+h^2\left(\max_{0\le t\le T}\|A(t)u(t)\|_H^2+\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\right)\right\}.\end{gathered}\tag{36}$$

Если же $u'' \in L_p(0,T;H)$ для $1 \le p \le 2$, то оценка погрешности следующая

$$\begin{gathered}\max_{1\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_V^2+\\ +\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\\ +\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le\\ +C\left\{\left\|Q_hu^0-u_0^h\right\|_V^2+\tau^{3-2/p}\left[\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\right.\right.\\ \left.+\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\right]+\\ \left.+h^2\left(\max_{0\le t\le T}\|A(t)u(t)\|_H^2+\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\right)\right\}.\end{gathered}\tag{37}$$

Доказательство. Прежде всего из оценок (34) и (35) имеем:

$$\max_{0\le t\le T}\left\|[I-Q_h]u(t)\right\|_V^2\le ch^2\max_{0\le t\le T}\|A(t)u(t)\|_H^2,\tag{38}$$

$$\left\|(I-Q_h)A^{-1}(t)\right\|_{H\to V}\le r_1\alpha h.\tag{39}$$

Из (39) и (14) получим

$$\left\|[I-Q_h(t)]u(t)\right\|_H\le M_1r_1\alpha h\|u(t)\|_V.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\int_0^T\left\|[I-Q_h(t)]u'(t)\right\|_H^2dt\le\\ \le M_1^2r_1^2\alpha^2h^2\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt.\end{gathered}\tag{40}$$

Теперь, учитывая (38) и (40), оценки (36) и (37) следуют из (17) и (31) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. / Ж.-П. Обэн — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. / Ю. М. Березанский // Наукова думка. Киев — 1965. — 800 с.

3. *Смагин. В. В.* О разрешимости абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени / В. В. Смагин // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т.32, №5 — С. 711—712.

4. *Соболевский П. Е.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве. / П. Е. Соболевский // ДАН СССР. — 1958. — Т.122, №6. — С. 994—996.

5. *Соболевский П. Е.* О дифференциальных уравнениях первого порядка в гильбертовом пространстве с переменным положительно определенным самосопряженным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения. / П. Е. Соболевский // ДАН СССР. — 1958. — Т. 123, № 6. — С. 984—987.

6. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений. / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. ур-ния. — 1975. — Т. 11, № 7.— С. 1269—1277.

7. *Смагин В.В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами. / В. В. Смагин // Труды математ. ф-та (новая серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63—67.

8. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений. / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т.188, №3.— С. 143—160.

9. *Смагин В.В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана. / В. В. Смагин // Изв. вузов. Матем. — 1996. — № 3. — С. 50—57.

10. *Смагин В. В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактого параболического уравнения. / В. В. Смагин // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, в.6. — С. 898—909.

11. *Сотников Д. С.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболи-

ческих задач в условиях обобщенной разрешимости. / Д. С. Сотников // Вестник ВГУ. — 2009. — № 1. С. 170—176.

12. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес // — М.: Мир, 1971. — 372 с.

Сотников Денис Сергеевич — аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета

Тел.: 8-908-132-94-19

E-mail: dsotnikov@voronezh.gkm.ru

Sotnikov Denis S. — post graduate student, department of functional analysis and operator equations, mathematical faculty, Voronezh State University

Tel.: 8-908-132-94-19

E-mail: dsotnikov@voronezh.gkm.ru