УДК 517.988

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.09.2009 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве задача Коши для абстрактного нелинейного параболического уравнения с монотонными операторами в условиях существования слабого решения решается приближенно методом Галеркина. Получены энергетические оценки погрешностей приближенных решений, из которых для проекционных подпространств типа конечных элементов следует как сходимость приближенных решений к точному, так и скорость этой сходимости.
Ключевые слова: гильбертово пространство, метод Галеркина, нелинейное параболическое уравнение.

Abstract. In the Hilbert space in conditions of the existence of the weak solution the Cauchy problem for abstract nonlinear parabolic equation with monotone operators is resolved approximate by the Galerkin's method. Energy estimations of errors of the approximate solution, from which both convergence of the approximate solution to exact ones, and speed of this convergence for projective subspaces with type of final elements follow, are calculated.
Keywords: Hilbert space, Galerkin method, nonlinear parabolic equation.

ОПИСАНИЕ ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть дана тройка вещественных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Далее под выражение (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если при этом $z \in H$, то выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H [1].

Для почти всех $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, определены операторы $A(t): V \to V'$ такие, что на $u, v \in V$ выполняется:

$$(A(t)u - A(t)v, u - v) \geq m \|u - v\|_V^2 \quad (m > 0); \quad (1)$$

$$\|A(t)u - A(t)v\|_{V'} \leq M \|u - v\|_V. \quad (2)$$

Условие (1) означает, что операторы $A(t)$ сильно монотонные, а (2) — липшиц-непрерывные. Считаем также, что для функций $u(t) \in L_2(0,T;V)$ функция $A(t)u(t) \in L_2(0,T;V')$.

Получим оператор $A: X \to X'$, где пространства $X = L_2(0,T;V)$ и $X' = L_2(0,T;V')$, действующий по правилу $(Au)(t) = A(t)u(t)$, где $u \in L_2(0,T;V)$. Из определения оператора A и (1), (2) следует, что оператор $A: X \to X'$ сильно монотонный и липшиц-непрерывный.

Покажем, что оператор $A: X \to X'$ является коэрцитивным. Действительно, для $u \in X$

$$\|Au, u\| = \int_0^T (A(t)u(t), u(t))\, dt =$$
$$= \int_0^T (A(t)u(t) - A(t)\Theta, u(t))\, dt +$$
$$+ \int_0^T (A(t)\Theta, u(t))\, dt \geq m \int_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt -$$
$$- \left| \int_0^T (A(t)\Theta, u(t))\, dt \right| \geq$$
$$\geq m\|u\|_X^2 - \|A\Theta\|_{X'} \|u\|_X = \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X.$$

Здесь функция $\gamma(s) = ms - \|A\Theta\|_{X'}$ на $s \in [0, +\infty)$ такая, что $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$.

Рассмотрим задачу в X':

$$u' + Au = f, \ u(0) = u^0 \in H. \quad (3)$$

В (3) производная определяется в обобщенном смысле, функция $f \in X'$, а равенство (3) понимается в смысле пространства X', то есть для всех $v \in X$

$$\int_0^T (u'(t) + A(t)u(t), v(t))\, dt = \int_0^T (f(t), v(t))\, dt. \quad (4)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00131 и № 09-01-92429-КЭ.

Из (4) следует, что для решения $u(t)$ задачи (3) почти всюду на $[0,T]$ выполняется равенство в смысле пространства V':

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t). \qquad (5)$$

Обратим внимание, модельные нелинейные начально-краевые параболические задачи, сводящиеся к (3), приводятся, например, в [2].

Теорема 1. [2, с. 239] *В сделанных выше предположениях задача (3) имеет единственное решение $u(t)$ такое, что $u \in X$ и $u' \in X'$.*

Заметим [2], что из условия $u \in X$ и $u' \in X'$ для функции $u(t)$ следует $u \in C([0,T], H)$, так что начальное условие $u(0) = u^0 \in H$ в (3) имеет смысл, и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_H^2 \le K\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2)\, dt.$$

Лемма 1. *Для решения $u(t)$ задачи (3) при всех $t \in [0,T]$ выполняется оценка*

$$\begin{gathered}\|u(t)\|_H^2 + \int_0^t(\|u(s)\|_V^2 + \|u'(s)\|_{V'}^2)ds \le \\ \le C\{\|u^0\|_H^2 + \int_0^t \|A(s)\Theta\|_{V'}^2\, ds + \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds\}.\end{gathered} \qquad (6)$$

Доказательство. Из (5) для решения $u(t)$ получим

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2(A(t)u(t), u(t)) = 2(f(t), u(t)).$$

Последнее равенство оценим.

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2m\|u(t)\|_V^2 - 2\|A(s)\Theta\|_{V'}\|u(t)\|_V \le \\ \le 2\|f(t)\|_{V'}\|u(t)\|_V.\end{gathered}$$

Отсюда для всех $t \le T$ и произвольного $\varepsilon > 0$ следует

$$\begin{gathered}\|u(t)\|_H^2 + 2m\int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds \le \\ \le \|u^0\|_H^2 + 2\varepsilon\int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|A(s)\Theta\|_{V'}^2\, ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds.\end{gathered}$$

Полагая здесь $\varepsilon = m/2$, для любого $t \in [0,T]$ получим

$$\begin{gathered}\|u(t)\|_H^2 + m\int_0^t \|u(s)\|_V^2\, ds \le \\ \le \|u^0\|_H^2 + \frac{2}{m}\int_0^t(\|A(s)\Theta\|_{V'}^2 + \|f(s)\|_{V'}^2)ds.\end{gathered}$$

Установлена оценка первых двух слагаемых в левой части (6).

Из равенства (5) теперь получим

$$\begin{gathered}\int_0^t \|u'(s)\|_{V'}^2\, ds \le \\ \le 2\int_0^t \|A(s)u(s)\|_{V'}^2\, ds + 2\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds.\end{gathered} \qquad (7)$$

Из (2) следует оценка

$$\|A(s)u(s)\|_{V'} \le M\|u(s)\|_V^2 + \|A(s)\Theta\|_{V'}.$$

Из (7) и последней оценки оценка (6) следует окончательно. □

ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

Далее задача (3) решается приближенно методом Галеркина. Полученные ниже результаты дополняют соответствующие утверждения из [2], где отсутствуют как оценки погрешностей приближенных решений, так и скорость сходимости приближенных решений к точному.

Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \le \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [3] замечено , что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P_h} : V' \to V'_h$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P_h}u\|_{V'_h} \le \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \qquad (8)$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ важное соотношение

$$(\overline{P_h}u, v) = (u, P_h v), \qquad (9)$$

которое получается соответствующим предельным переходом [4].

Задаче (3) поставим в соответствие приближенную в V_h задачу на $[0,T]$.

$$u_h(t) + \overline{P_h}A(t)u_h(t) = \overline{P_h}f(t),\ u_h(0) = u_h^0, \qquad (10)$$

где элемент $u_h^0 \in V_h$ считаем заданным. Решение $u_h(t)$ задачи (10) называется функция со значениями в V_h такая, что равенство (10) выполняется в смысле пространства $X'_h = L_2(0,T;V'_h)$.

Заметим, что уравнение (10) может в силу (9) записано в вариационной форме: найти функцию $u_h(t)$ со значениями в V_h такую, что для любых $v_h \in V_h$ почти всюду на $[0,T]$ выполняется

$$(u_h(t), v_h) + (A(t)u_h(t), v_h) = (f(t), v_h). \qquad (11)$$

Таким образом, задача (10) сводится к задаче Коши для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существование решения следует теперь из известной теоремы Каратеодори [5].

Покажем как разрешимость задачи (10) на $[0,T]$ и соответствующая гладкость решения следуют из теоремы 1.

В (10) функция $f \in L_2(0,T;V')$, так что $\overline{P}_h f \in L_2(0,T;V'_h)$. Оператор $\overline{P}_h A(t): V_h \to V'_h$. Проверим для этого оператора условия аналогичные (1) и (2). Для $u_h, v_h \in V_h$, учитывая (9), получим аналог условия (1).

$$(\overline{P}_h A(t)u_h - \overline{P}_h A(t)v_h, u_h - v_h) =$$
$$= (A(t)u_h - A(t)v_h, u_h - v_h) \ge m\left\|u_h - v_h\right\|_V^2 .$$

Свойство (9) позволяет установить аналог условия (2).

$$\left\|\overline{P}_h A(t)u_h - \overline{P}_h A(t)v_h\right\|_{V'_h} \le$$
$$\le \left\|A(t)u_h - A(t)v_h\right\|_{V'} \le M\left\|u - v\right\|_V .$$

Таким образом, задача (10) в силу теоремы 1 имеет единственное решение $u_h(t)$ такое, что $u_h \in C([0,T],H_h) \cap L_2(0,T;V_h)$ и $u'_h \in L_2(0,T;V'_h)$. Здесь через H_h и V_h обозначены множества V_h с нормами пространств H и V соответственно. Учитывая, что линейное пространство V_h конечномерно и в нем любые нормы эквивалентны, можно считать, что решение $u_h \in C([0,T],V_h)$ и $u'_h \in L_2(0,T;V_h)$.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ И СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(t)$ — решение задачи (3), а $u_h(t)$ — решение задачи (10). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|P_h u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 +$$
$$+\int_0^T\left(\left\|u(t) - u_h(t)\right\|_V^2 + \left\|\overline{P}_h u'(t) - u'_h(t)\right\|_{V'_h}^2\right)dt \le \quad (12)$$
$$\le C\left(\left\|P_h u^0 - u_h^0\right\|_H^2 + \int_0^T\left\|(I - P_h)u(t)\right\|_V^2\,dt\right).$$

Доказательство. К равенству (5) применим оператор $\overline{P}_h$. Из полученного равенства вычтем (10). Проделав простые преобразования, придем к соотношению

$$\begin{aligned}&[P_h u(t) - u_h(t)]' + \overline{P}_h A(t)P_h u(t) - \\ &-\overline{P}_h A(t)u_h(t) = \overline{P}_h A(t)P_h u(t) - \overline{P}_h A(t)u(t).\end{aligned} \quad (13)$$

Умножим (13) на $2[P_h u(t) - u_h(t)]$ скалярно в H с учетом (9).

$$\frac{d}{dt}\left\|P_h u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 +$$
$$+2(A(t)P_h u(t) - A(t)u_h(t), P_h u(t) - u_h(t)) =$$
$$= 2(A(t)P_h u(t) - A(t)u(t), P_h u(t) - u_h(t)).$$

Воспользовавшись оценками (1), (2) и неравенством Юнга, получим из последнего соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\|P_h u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 + m\left\|P_h u(t) - u_h(t)\right\|_V^2 \le$$
$$\le \frac{M^2}{m}\left\|(I - P_h)u(t)\right\|_V^2 .$$

Последнее неравенство интегрируем от 0 до произвольного $t \le T$.

$$\left\|P_h u(t) - u_h(t)\right\|_H^2 + m\int_0^t\left\|P_h u(s) - u_h(s)\right\|_V^2 ds \le$$
$$\le \left\|P_h u^0 - u_h^0\right\|_H^2 + \frac{M^2}{m}\int_0^t\left\|(I - P_h)u(s)\right\|_V^2 ds.$$

Отсюда следует оценка (12) для первых двух слагаемых в левой части.

Для оценки третьего слагаемого в левой части (12) воспользуемся тождеством, следующим из (13).

$$\overline{P}_h u'(t) - u'_h(t) =$$
$$= \overline{P}_h[A(t)u_h(t) - A(t)u(t)].$$

Отсюда, а также из оценок (8) и (2) получим

$$\left\|\overline{P}_h u'(t) - u'_h(t)\right\|_{V'_h} \le M\left\|u_h(t) - u(t)\right\|_V .$$

Последняя оценка позволяет получить оценку (12) в полном объеме.

Приведем условия, позволяющие из оценки (12) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешности к нулю . Пусть задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\left\|(I - Q_h)v\right\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$, где Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим [6], что такая последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в пространстве H, и в пространстве V'.

Следствие. *Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств такая, что $\left\|P_h\right\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Пусть $\left\|P_h u^0 - u_h^0\right\|_H \to 0$ при $h \to 0$. Тогда при $h \to 0$*

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_H^2+\int_0^T\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2\,dt+ \\ +\int_0^T\left\|u'(t)-u'_h(t)\right\|_{V'}^2\,dt\to 0. \tag{14}$$

Доказательство. Для любого $v\in V$

$$\left\|(I-P_h)v\right\|_V\le\left\|(I-P_h)(v-Q_hv)\right\|_V\le \\ \le(1+\left\|P_h\right\|_{V\to V})\left\|(I-Q_h)v\right\|_V\to 0$$

при $h\to 0$. Отсюда и из (12) следует стремление к нулю первого и второго слагаемых в (14).

Далее для произвольного $v_h\in V_h$ получим оценку

$$\left\|u_h\right\|_{V'}=\sup|(u_h,v)|=\sup|(u_h,P_hv)|\le \\ \le\left\|u_h\right\|_{V'_h}\sup\left\|P_hv\right\|_V=\left\|u_h\right\|_{V'_h}\left\|P_h\right\|_{V\to V},$$

где все точные верхние границы берутся по $v\in V$ с $\left\|v\right\|_V=1$. Отсюда для любого $v\in V'$ следует, что

$$\left\|\overline{P_h}v\right\|_{V'}\le\left\|P_h\right\|_{V\to V}\left\|\overline{P_h}v\right\|_{V'_h}\le\left\|P_h\right\|_{V\to V}\left\|v\right\|_{V'},$$

то есть $\left\|\overline{P_h}\right\|_{V'\to V'}\le\left\|P_h\right\|_{V\to V}$. Поэтому для всех $v\in V'$ при $h\to 0$

$$\left\|(I-\overline{P_h})v\right\|_{V'}=\left\|(I-\overline{P_h})(v-S_hv)\right\|_{V'}\le \\ \le(1+\left\|P_h\right\|_{V\to V})\left\|(I-S_h)v\right\|_{V'}\to 0,$$

где S_h — ортопроектор в пространстве V' на V_h. Отсюда и (12) следует сходимость к нулю и третьего слагаемого в (14).

Укажем класс подпространств V_h, для которых $\left\|P_h\right\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Пусть:

$$\left\|(I-Q_h)v\right\|_H\le r_1h\left\|v\right\|_V\quad(v\in V), \tag{15}$$

$$\left\|v_h\right\|_V\le r_2h^{-1}\left\|v_h\right\|_H\quad(v_h\in V_h), \tag{16}$$

где r_1 и r_2 не зависят от v, v_h и h. Из (15) и (16) следует [7] оценка $\left\|P_h\right\|_{V\to V}\le r_1r_2+1$.

Далее нам понадобится также свойство

$$\left\|(I-P_h)u\right\|_{V'}\le r_1h\left\|(I-P_h)u\right\|_H, \tag{17}$$

которое следует [8] из (15).

Из оценки (12) можно получить и порядок скорости сходимости. Для этого предположим существование гильбертова пространства E такого, что $E\subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ (см. [11]). Например, если параболическое уравнение в области Ω определено дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то считаем $H=L_2(\Omega)$, $V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, и $E=W_2^2(\Omega)$.

Относительно подпространств V_h далее вместо (15) предположим, что

$$\left\|(I-Q_h)v\right\|_V\le r_3h\left\|v\right\|_E\quad(v\in E). \tag{18}$$

Из (18) для $v\in V$ получается [10] оценка (аналог леммы Обена—Нитше)

$$\left\|(I-Q_h)v\right\|_H\le rh\left\|(I-Q_h)v\right\|_V. \tag{19}$$

Очевидно, что из (19) следует (15).

Предположения (15), (16), (19) являются типичными для подпространств типа конечных элементов [11]. Например, для параболического уравнения второго порядка, одномерного по пространственным переменным, в качестве V_h можно взять подпространство кусочно-линейных функций. При этом (16) в приложениях в методе конечных элементов означает [12] равномерное разбиение области пространственных переменных.

Предположим теперь, что решение задачи (3) $u\in L_2(0,T;E)$. Тогда из (12), (18) и (16) получим

$$\left(\int_0^T\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_V^2\,dt\right)^{1/2}\le \\ \le C\left\{\left\|P_hu^0-u_h^0\right\|_H+h\left(\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2\,dt\right)^{1/2}\right\}.$$

Если же решение $u\in L_2(0,T;E)\cap C([0,T],V)$, то из (12), (18) и (16) следует

$$\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)-u_h(t)\right\|_H\le C\left\{\left\|P_hu^0-u_h^0\right\|_H+\right. \\ \left.+h\left[\max_{0\le t\le T}\left\|u(t)\right\|_V+\left(\int_0^T\left\|u(t)\right\|_E^2\,dt\right)^{1/2}\right]\right\}.$$

Наконец, если решение $u\in L_2(0,T;E)$ и $u'\in L_2(0,T;H)$, то из (12), (18), (16) и (17) следует оценка

$$\left(\int_0^T\left\|u'(t)-u'_h(t)\right\|_{V'}^2\,dt\right)^{1.2}\le C\left\{\left\|P_hu^0-u_h^0\right\|_H+\right. \\ \left.+h\int_0^T(\left\|u(t)\right\|_E^2+\left\|u'(t)\right\|_H^2)dt\right]^{1/2}\Bigg\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

2. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

3. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11. — №7. — С. 1269—1277.

4. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, — №3. — С. 143—160.

5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.

6. *Смагин В. В.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений / В. В.Смагин, Д. С. Сотников // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 193—198.

7. *Смагин В. В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 79—94.

8. *Смагин В. В.* Коэрцитивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 96—100.

9. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

10. *Смагин В. В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115—123.

11. *Марчук Г. И.* Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

12. *Оганесян Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. — Ереван. 1979. — 236 с.

Смагин Виктор Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета

Тел.: (4732) 208-771

E-mail: smagin@math.vsu.ru.

Smagin Victor Vasilievich — Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University

Tel.: (4732) 208-771

E-mail: smagin@math.vsu.ru.