УДК 517.9

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

К. А. Синтяева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.09.2009 г.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы спектрального анализа почти периодических векторов из банахова пространства, являющимся пространством представления изометрической группы операторов. В частности, получены критерии сходимости рядов Фурье почти периодических векторов и приложения к почти периодическим функциям Степанова.
Ключевые слова: почти периодические векторы, ряды Фурье.

Abstract. Questions of spectral analysis of almost periodic vectors from banach space, which is space of representation of isometric group of linear operators, are examined. Particularly, convergence criterions of Fourier series of almost periodic vectors and applications for almost periodic function of Stepanov are obtained.
Keywords: almost periodic vectors, Fourier series.

Рассматривается $L_1(\mathbb{R})$-модуль (X,T), где $T:\mathbb{R}\to \operatorname{End} X$ — ограниченное представление. Без ограничения общности можно считать, что T — изометрическое представление, т.е. $\|T(s)\|=1\ \forall s\in\mathbb{R}$. В противном случае следует ввести новую эквивалентную норму по формуле $\|x\|_1=\sup\limits_{s\in\mathbb{R}}|T(s)x|$. Отметим, что $\|x\|\le\|x\|_1\le M\|x\|$.

Предположение 1. Для банахова $L_1(\mathbb{R})$-модуля выполнены следующие свойства:

1. из равенства $fx=0,\ f\in L_1(\mathbb{R}),$ следует, что вектор $x\in X$ нулевой (свойство невырожденности модуля X);

2. для всех $f\in L_1(\mathbb{R}),\ x\in X$ и $t\in\mathbb{R}$ имеют место равенства
$$T(t)(fx)=(S(t)f)x=f(T(t)x),$$
где $S(t)$ — оператор сдвига на $t\in\mathbb{R}$ в $L_1(\mathbb{R})$, т.е. $S(t)f(s)=f(s+t),\ s,t\in\mathbb{R},\ f\in L_1(\mathbb{R})$ (свойство ассоциированности модульной структуры на X с представлением T);

3. $\|fx\|\le\|f\|_1\|x\|,\ f\in L_1(\mathbb{R}),\ x\in X$, где $\|f\|_1$ — норма функции f в $L_1(\mathbb{R})$.

Определение 1. *Вектор x из банахова $L_1(\mathbb{R})$ — модуля (X,T) назовем T-непрерывным, если функция*
$$\varphi_x:\mathbb{R}\to X,\varphi_x(t)=T(t)x,\ t\in\mathbb{R},$$
непрерывна в 0 из $\mathbb{R}$ (и, значит, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$).

Множество T-непрерывных векторов из X обозначим X_c. Таким образом, $X_c=\{x\in X:$ функция $g\mapsto T(t)x:\mathbb{R}\to X$ непрерывна$\}$. Оно образует замкнутый подмодуль из X, т.е. X_c — замкнутое линейное пространство из X, инвариантное относительно всех операторов $T(f),\ T(t),\ f\in L_1(\mathbb{R}),\ t\in\mathbb{R}$ [1].

Лемма 1. *X_c — замкнутое линейное пространство из X.*

Определение 2. *Число τ называется ε-почти-периодом вектора $x_0\in X$, если выполняется неравенство*
$$\|T(\tau)x_0-x_0\|\le\varepsilon.$$

Определение 3. *Множество $E\subset\mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует такое число $l>0$, что в каждом интервале $(\alpha,\alpha+l)\subset\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R},$ длины l содержится хотя бы одно число множества E* [2].

Определение 4 (по Бору). *Вектор $x_0\in X$ называется почти периодическим вектором по Бору, если для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество $\Omega(\varepsilon)\subset\mathbb{R}$ ε-периодов вектора x_0.*

Определение 5 (по Бохнеру). *Вектор $x_0\in X$ называется почти периодическим вектором по Бохнеру, если его орбита $\{T(t)x_0,\ t\in R\}$ предкомпактна в X* [3].

Теорема 1. *Вектор $x_0\in X_c$ является почти периодичным по Бору тогда и только тогда, когда он является почти периодичным по Бохнеру.*

Через APX обозначим подмодуль почти периодических векторов по Бохнеру из $L_1(\mathbb{R})$-модуля X_c.

Лемма 2. APX *— замкнутый подмодуль в* X_c.

Среди линейных операторов, действующих в подмодуле $APX \subset X_c$ существует и единственен оператор $J : APX \to APX$, значение которого на каждом векторе $x \in APX$ называется средним значением вектора x. Этот оператор обладает следующими свойствами:

1. $J \in End X$, $J -$ проектор и $\|J\| \le 1$;

2. оператор J перестановочен с операторами $T(t),\ t \in \mathbb{R}$, $J(T(t)x) = T(t)Jx$ для любого $t \in \mathbb{R},\ x \in APX$;

3. Jx лежит в замыкании выпуклой оболочки орбиты вектора $x \in APX$, и имеют место равенства:

$$Jx = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} T(t)x dt = \\ = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha+u}^{\alpha+u} T(t)xdt, t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

причем предел существует равномерно по u.

Наличие оператора J с такими свойствами позволяет ввести в рассмотрение семейство операторов $J_\lambda \in End(APX),\ \lambda \in \mathbb{R}$, определенных равенствами:

$$J_\lambda x = J(T(t)e^{-i\lambda t}x),$$

$$J_\lambda x = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} T(t)xe^{-i\lambda t}dt.$$

Лемма 3. $J_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *— семейство проекторов и* $\|J_\lambda\| \le 1\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 6. *Семейство операторов* $J_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *позволяет отнести каждому почти периодическому вектору* x *формальный ряд:*

$$x \sim \sum \hat{x}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

который называется рядом Фурье вектора x. *Функция* $\hat{x} : \mathbb{R} \to APX$ *опердeляется по формуле:*

$$\hat{x}(\lambda) = J_\lambda x.$$

Отметим, в (2) совокупность векторов $\hat{x}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, отличных от нулевого не более чем счетно [3, стр. 64] (пусть это будет последовательность $x_n = \hat{x}(\lambda_n),\ n \ge 1$), и поэтому ряд Фурье вектора x будем записывать в виде

$$x \sim \sum_{n\ge1} x_n, \tag{3}$$

где каждый x_n считается ненулевым вектором.

Теорема 2 (теорема единственности рядов Фурье почти периодических векторов). *Если* $J_\lambda x = 0\ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $x \in APX$, *то* $x = 0$.

Лемма 4. *Рассмотрим ряд Фурье (3) почти периодического вектора* x. *Тогда* $T(t)x$ *— почти периодический вектор, и этот вектор имеет ряд Фурье вида*

$$T(t)x \sim \sum_{n\ge1} e^{i\lambda_n t}x_n,$$

причем $T(t)x_n = e^{i\lambda_n t}x_n,\ \ n \ge 1,\ \ t \in \mathbb{R},\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$

Поскольку $APX \subset X_c$, то корректно определен вектор

$$f * x = \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)xds,$$

для любого $x \in APX$.

Лемма 5. *Пусть* $x \in APX,\ \ f \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $x \sim \sum x_n$ *— ряд Фурье вектора* x. *Тогда* $f * x \in APX$ *и*

$$f * x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\lambda_n)x_n.$$

В качестве примера рассмотрим однородное пространство функций $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, в котором действует группа изометрий $S : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{F}(\mathbb{R})$.

Определение 7. *Функция* $x_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ *называется с-непрерывной(*S *-непрерывной), если* $x_0 \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})_c$, *т.е. функция*

$$t \mapsto S(t)x_0 : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}(\mathbb{R})$$

непрерывна.

Подпространство с-непрерывных функций обозначено через $\mathfrak{F}(\mathbb{R})_c$. Как доказано в лемме 1, это подпространство замкнуто в $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$.

Отметим, что если $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{R})$, то подпространство с-непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R})$ совпадает с подпространством $C_{b,u}(\mathbb{R})$, равномерно непрерывных функций.

Если $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$, то $\mathfrak{F}(\mathbb{R})_c = L_p(\mathbb{R})$, так как в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ операция сдвига непрерывна (см. [4]).

Если $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = S_p(\mathbb{R})$, то подпространство $\mathfrak{F}(\mathbb{R})_c$ совпадает с подпространством функций, введенном в книге [5; см. § 5.2].

Через $AP\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство почти периодических функций из $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ (почти-периодических по определению 5, где $T = S$).

Таким образом, APC_b в точности совпадает с подпространством непрерывных почти периодических функций Бора. Если $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$, то $AP\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Для $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = S_p(\mathbb{R})$ получаем, что $AP\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = APS_p(\mathbb{R})$ — пространство Степанова почти периодических функций [6, 2].

Если $x \in AP\mathfrak{F}(\mathbb{R})$, то согласно определению ей можно сопоставить ряд Фурье вида

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

где $S(t)x_n = e^{\lambda_n t}x_n,\ \ \lambda_n \in \mathbb{R},\ \ n \ge 1$. Из этих равенств следует, что почти всюду имеют место соотношения

$$x_n(s+t) = e^{i\lambda_n t}x_n(s),\ \ s,t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для функции $y_n(s) = e^{-i\lambda_n s}x_n(s),\ \ s \in \mathbb{R}$, будут почти всюду (по $s \in \mathbb{R}$) выполнятся равенства (выбирается представитель класса)

$$y_n(s+t) = y_n(s),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $y_n(s) = \alpha_n \in \mathbb{C},\ \ n \ge 1$, для почти всех $s \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$x_n(s) = \alpha_n e^{i\lambda_n s},\ \ s \in \mathbb{R},\ \ n \ge 1.$$

В итоге, ряд Фурье любой почти периодической функции $x \in AP\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ пердставим в виде

$$x(t) \sim \sum_{n\ge 1}\alpha_n e^{i\lambda_n t},\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Определение 8. *Множество* $\sigma(x) = \sigma(x,T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \hat{x}(\lambda) \ne 0\}$ *назовем спектром Бора вектора* x *.*

Лемма 6. *Пусть* $x \in APX$ *, тогда* $\Lambda(x) = \overline{\sigma(x)}$.

Рассматривается двусторонняя последовательность вещественных чисел $(\lambda_k),\ \ k \in \mathbb{Z}$ со свойствами

1. $\lambda_k = -\lambda_{-k},\ \ k \ge 1,\ \ \lambda_0 = 0;$
2. $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = \infty.$

Пусть $L = \{\lambda_k\},\ \ k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$N_L(\lambda) = \sum_{\lambda_k \le \lambda} 1.$$

Рассмотрим подпространство почти периодических векторов из X — APX , которое дальше будем обозначать X_{AP}. Ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ имеет вид

$$x \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k, \tag{4}$$

где $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через a и b $(a < b)$ произвольные положительные числа. Рассмотрим функцию

$$\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}(b-|t|), a < |t| < b \\ 0, |t| \ge b. \end{cases}$$

преобразование Фурье которой имеет вид

$$\widehat{\varphi_{a,b}(u)} = \psi_{a,b}(u) = \frac{2\sin\frac{b-a}{2}u\sin\frac{b+a}{2}u}{\pi(b-a)u^2}. \tag{5}$$

Лемма 7. [6]

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\psi_{a,b}(u)\right|du \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}.$$

Рассмотрим почти периодический вектор

$$\psi_{a,b} * x = \int_{\mathbb{R}}\psi_{a,b}(t)T(-t)xdt. \tag{6}$$

По лемме 5 его ряд Фурье имеет вид

$$\psi_{a,b} * x \sim \sum_{n\ge 1}\varphi_{a,b}(\lambda_n)x_n.$$

Теорема 3. *Пусть* $b \to \infty$ *,* a *остается меньше* b *, причем так, что отношение* $\frac{a}{b}$ *остается меньше фиксированного числа* $\theta < 1$ *. Тогда для каждого* $x \in X_c$

$$\lim_{b\to\infty \frac{a}{b}<\theta<1}\psi_{a,b} * x = x.$$

Доказательство. В силу формулы обращения Фурье

$$\varphi_{a,b}(t) = \int_{\mathbb{R}}\psi_{a,b}(u)e^{itu}du.$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$ и замечая, что $\varphi_{a,b}(0) = 1$, мы получим

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{a,b}(u)du = 1. \tag{7}$$

Из (7) для любого вектора $x \in X_c$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}}\psi_{a,b}(u)xdu = x. \tag{8}$$

Вычитая равенство (8) из равенства (6), приходим к равенству

$$\psi_{a,b} * x - x = \int_{\mathbb{R}}(T(-u)x - x)\psi_{a,b}(u)du.$$

Из формулы (5) следует представление:

$$\psi_{a,b} * x - x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}(T(-u)x - x)\frac{2\sin\frac{b-a}{2}u\sin\frac{b+a}{2}u}{(b-a)u^2}du.$$

Сделаем замену переменных $v = \frac{b-a}{2}u$

$$\psi_{a,b} * x - x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}(T(-\frac{2v}{b-a})x - x)\frac{\sin v\sin\frac{b+a}{b-a}v}{v^2}dv. \tag{9}$$

Обозначим через N произвольное положительное число. Тогда

$$\left\|\psi_{a,b} * x - x\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left\|T(-\frac{2v}{b-a})x - x\right\| \times$$
$$\times \left| \frac{\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v}{v^2} \right| dv =$$
$$= \frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{-N} + \int_{-N}^{N} + \int_{N}^{\infty}] = \frac{1}{\pi}[I_1 + I_2 + I_3].$$

Обозначим через $\varepsilon > 0$ произвольное число. Из оценок

$$I_1 \le \frac{4}{\pi}\|x\|\int_{-\infty}^{-N}\frac{dv}{v^2} = \frac{4\|x\|}{\pi N},\ I_3 \le \frac{4\|x\|}{\pi N}$$

следует, что при произвольных a и b и достаточно большом N

$$I_1 + I_3 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим I_2. Так как по условию $\frac{a}{b} < \theta < 1$, то $a < \theta b$, $b - a > b - \theta b = b(1-\theta) \to \infty$ при $b \to \infty$.

Пусть $\eta > 0$ — произвольное число. Из условия $x \in X_c$ следует, что при фиксированном N можно выбрать $b - a$ столь большое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|T(-\frac{2v}{b-a}x - x)\right\| \le \eta,\ \ -N \le \eta \le N.$$

Поэтому, используя лемму 7, получаем

$$I_2 \le \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\left\|T(-\frac{2v}{b-a})x - x\right\| \times$$
$$\times \left| \frac{\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v}{v^2} \right| dv \le$$
$$\le \frac{\eta}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin v \sin \frac{b+a}{b-a} v}{v^2} \,|\, dv \le \eta(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}).$$

Так как $\frac{a}{b} < \theta < 1$, то

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}} < \frac{2}{1-\theta} < \infty.$$

Следовательно, $\ln\frac{b+a}{b-a}$ — величина ограниченная и, значит, $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно малом η. Итак,

$$\left\|\psi_{a,b} * x - x\right\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Для исследования сходимости ряда Фурье вектора x введем в рассмотрение следующие числовые характеристики. Первой характеристикой является

$$\omega(\delta, x) = \sup_{|t|\le\delta}\left\|T(t)x - x\right\|,$$

которая называется модулем непрерывности вектора x.

Отметим, что если $X = C_b(\mathbb{R})$ и $T = S$, то $\omega(\delta, x)$ обычный модуль непрерывности функции $x \in C_b(\mathbb{R})$. Если $X = S_p(\mathbb{R})$, то модуль непрерывности имеет вид

$$\omega(\delta, x) = \sup_{|t|\le\delta}\left\|S(t)x - x\right\|.$$

Второй характеристикой является наилучшее приближение

$$E(\lambda, x) = \inf_{y\in X([-\lambda,\lambda])}\left\|x - y\right\|.$$

Будем говорить, что вектор $x \in X_c$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha < 1$ (Гёлдера), если для него верно неравенство

$$\left\|T(h)x - x\right\| \le C\,|\,h\,|^{\alpha},\ \ h \in \mathbb{R},$$

где C от h не зависит.

Определение 9. *Пусть $x \in X_{AP}$ и его ряд Фурье имеет вид*

$$x \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k,$$

где $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ряд Фурье вектора x называется лакунарным рядом Фурье, если существует не зависящее от числа n число $\theta < 1$ такое, что

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} < \theta,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Далее обозначим функцию $\psi_{\lambda_n,\lambda_{n+1}} = \psi_n$. Рассмотрим оператор $P_n : X_{AP} \to X_{AP}$

$$P_n x = \psi_n * x,$$

где $x \in X_{AP}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 8. *Пусть $\Lambda(X) = \sigma \bigcup \Delta$, где σ — компактное множество, Δ — замкнутое и $\sigma \bigcap \Delta = \varnothing$. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ такова, что $\hat{f} = 1$ в окрестности σ и $\hat{f} = 0$ в окрестности Δ. Тогда формула*

$$P_\sigma x = f * x \qquad (10)$$

определяет проектор $P_\sigma \in End X$, который разлагает пространство X в прямую сумму

$$X = X(\sigma) \oplus X(\Delta),$$

где $X(\sigma) = \{x \in X : \Lambda(x) \subset \sigma\}$, $X(\Delta) = \{x \in X : \Lambda(x) \subset \Delta\}$ — спектральные подмодули.

Лемма 9. *Если $\sigma = [a, b]$ и $\Delta \bigcap [a, b] = \varnothing$, $\Lambda(X) = \sigma \bigcup \Delta$, то проектор P_σ определяется формулой*

$$P_\sigma x = \psi_{a,b} * x,\ \ x \in X.$$

Лемма 10. *Пусть $y \in X_{AP}$. Тогда*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} T(-t) y e^{-i\lambda t} dt = 0,$$

где $\Lambda(y) \subset [-\lambda_0, \lambda_0]$ и $|\lambda| > \lambda_0$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \lambda < \mu$. *Тогда для любого* $x \in X_{AP}$, *выполняется неравенство.*

$$\left\| x - \sum_{|\lambda_k| < \lambda} x_k \right\| \le E(\lambda, x)\{1 + \frac{4}{\pi} +$$

$$+2[N_l(\mu) - N_l(\lambda)] + \frac{2}{\pi} ln \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}\}.$$

Доказательство. Пусть $a = \hat{\lambda} = \frac{\mu(2\lambda+\varepsilon)}{2\mu+\varepsilon}$, $b = \mu$. Тогда из леммы 7 следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(u)|\, du \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} ln \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Используя представление ряда Фурье вектора $\psi_{a,b} * x$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(-u) x \psi_{a,b}(u) du = \tag{11}$$

$$= \sum_{|\lambda_k| < \lambda} x_k + \sum_{\lambda \le |\lambda_k| \le \hat{\lambda}} x_k + \sum_{\hat{\lambda} \le |\lambda_k| \le \mu} \varphi_{a,b}(\lambda_k) x_k.$$

По определению наилучшего приближения, для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $\breve{y}$ такой, что

$$\|x - \hat{y}\| \le E(\lambda, x) + \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда имеют место оценки

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} T(-u) x \psi_{\hat{\lambda},\mu}(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} T(-u) \hat{y} \psi_{\hat{\lambda},\mu}(u) du \right\| \le$$

$$\le (\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} ln \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda})(E(\lambda, x) + \varepsilon).$$

По лемме 9

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} T(-u) x \psi_{\hat{\lambda},\mu}(u) du - \hat{y} \right\| \le \tag{13}$$

$$\le (\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} ln \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda})(E(\lambda, x) + \varepsilon).$$

Из равенства (11) получаем

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} T(-u) x \psi_{\hat{\lambda},\mu}(u) du - \sum_{|\lambda_k| < \lambda} x_k \right\| \le \sum_{\lambda \le |\lambda_k| \le \mu} \|x_k\|.$$

По лемме 10

$$x_k = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} T(-t)(x - y) e^{-i\lambda_k t} dt.$$

Если $|\lambda_k| < \lambda$, учитывая равенство (12), получим

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} T(-u) x \psi_{\hat{\lambda},\mu}(u) du - \sum_{|\lambda_k| < \lambda} x_k \right\| \le$$

$$\le (\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}) E(\lambda, x).$$

Теорема доказана.

Лемма 11. *Пусть* $x \in X_{AP}$. *Тогда верно равенство*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda, x) = 0. \tag{14}$$

Теорема 5. *Ряд Фурье вектора* $x \in X_{AP}$ *сходится, если существует числовая последовательность* $\{\mu_n\}$, $n \ge 1$, *удовлетворяющая условиям:*

$$\mu_n > \lambda_n, n > n_0; \tag{15}$$

$$\lim_{n \to \infty} E(\lambda_n, x)[N_L(\mu_n) - N_L(\lambda_n)] = 0; \tag{16}$$

$$\lim_{n \to \infty} E(\lambda_n, x) ln \frac{\mu_n + \lambda_n}{\mu_n - \lambda_n} = 0. \tag{17}$$

Доказательство. По лемме 11 верно равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda, x) = 0,$$

следовательно, в силу условий (16) и (17), имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{|\lambda_k| < \lambda_n} x_k \right\| = 0$, следовательно, ряд Фурье вектора $x \in X_{AP}$ сходится. Теорема доказана.

Теорема 6. *Ряд Фурье вектора* $x \in X_{AP}$ *сходится, если*

$$\lim_{n \to \infty} E(\lambda_n, x) ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $\mu_n = \lambda_{n+1}$, тогда в силу (14) и (18), выполняются условия предыдущей теоремы, значит ряд Фурье сходится. Теорема доказана.

Следствие 1. *Ряд Фурье вектора* $x \in X_{AP}$ *сходится, если*

$$\lim_{n \to \infty} \omega(\frac{1}{\lambda_n}, x) ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Из (19) следует (18), так как $E(\lambda_n, x) \le 2\pi\omega(\frac{1}{\lambda_n}, x)$.

Следствие 2. *Ряд Фурье вектора* $x \in X_{AP}$ *сходится, если* x *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha \le 1$, *и если*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{-\alpha} ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Если x удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha \le 1$, то $\omega(\frac{1}{\lambda_n}, x) \le C_1 \lambda_n^{-\alpha}$, и из (20) следует (19).

Следствие 3. *Если* $x \in C_b(\mathbb{R})_{AP}$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha < 1$ *и если*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n^{-\alpha} ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

то

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{i\lambda_n t}.$$

Следствие 4. *Если* $x \in S_p(\mathbb{R})_{AP}$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* $\alpha < 1$ *и если*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-\alpha} ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

то

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{i\lambda_n t}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3—54.

2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков // Из-во МГУ, 1978. — 205 с.

3. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004.— № 4. — Т. 9.— С. 3—151.

4. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Наука, 1968. — 543 с.

5. *Костин А. В.* К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин // Воронеж, 2007. — 259 с.

6. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции / Б. М. Левитан // Изд-во ГИТТЛ, 1953. — 396 с.

Синтяева Ксения Андреевна — аспирант Воронежского государственного университета

Тел. 8-910-242-74-94

E-mail: ZenzinaKs@yandex.ru,

Sintyaeva Ksenia Andreevna — post-graduate student, Voronezh State University

Tel.: 8-910-242-74-94

E-mail: ZenzinaKs@yandex.ru