УДК 517.937: 517.983

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ РАЗРЕШИМОСТИ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Н. Синтяев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.09.2009 г.

Аннотация. Получены условия разрешимости слабо нелинейных параболических уравнений в пространстве ограниченных функций.
Ключевые слова: условия разрешимости, нелинейное уравнение, ограниченные функции, параболическое уравнение.

Abstract. The solvability condition weak nonlinear parabolic equation in space of bounded functions are obtained.
Key words: the solvability condition, nonlinear equation, bounded functions, parabolic equation.

В работе [1] получены условия существования, устойчивости, а также оценки ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве. В данной статье получены соответствующие результаты для слабо нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с неограниченными операторными коэффициентами.

Пусть X — комплексное гильбертово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Рассмотрим сильно непрерывное семейство эволюционных операторов $U : \Delta \to \operatorname{End} X$, где $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq s\}$, т.е. выполнены условия:

1) $\mathcal{U}(t,t) = I$ - тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$, $\tau \leq s \leq t$; $s,t,\tau \in \mathbb{R}$;

3) отображение $(t,s) \mapsto \mathcal{U}(t,s)x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

4) конечна величина
$$K = \sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t,s)\| \geq 1. \tag{1}$$

Эволюционные семейства операторов естественным образом появляются в связи с представлением решений при $t \geq s$ абстрактной задачи Коши $x(s) = x_0 \in D(A(s))$ для дифференциального уравнения
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \; t \in \mathbb{R}, \; t \geq s, \tag{2}$$
где $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в X. Символом $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty]$ обозначим банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty]$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на множестве вещественных чисел R со значениями в пространстве X и с нормой $\|x\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p \, dt)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$, $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$. Через $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X. Таким образом, $C_b \subset L_\infty$. Пусть A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t); t \geq 0\}$. Тогда семейство эволюционных операторов имеет вид $\mathcal{U}(t,s) = T(t-s)$, $s \leq t$, $s,t \in \mathbb{R}$. Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ используется для обозначения одного из введенных в рассмотрение пространств.

Рассмотрим дифференциальное уравнение
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t,x), \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$
где $f : \mathbb{R} \times X \to X$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица по второй переменной, то есть выполнено $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq l\|x - y\|$, $l > 0$, $x \in F(\mathbb{R}, X)$

Построим линейный оператор $\mathcal{L}_0 : D(\mathcal{L}_0) \subset \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, который определяется на любом рассматриваемом пространстве $\mathcal{F}$ следующим образом. Функция $x \in \mathcal{F}$ относится к области определения $D(\mathcal{L}_0)$ оператора $\mathcal{L}_0$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для почти всех $s \le t$ из $\mathbb{R}$ верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t,s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \ \ s \le t, \ \ t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Следует отметить, что эти равенства следует понимать на представителях класса, если $\mathcal{F} = L_p$. Из (4) следует, что функция x почти всюду совпадает с непрерывной функцией и функция f единственна. Далее полагается $\mathcal{L}_0 x = f$. При этом функцию x будем считать непрерывной. Отметим, что оператор $\mathcal{L}_0$ замкнут.

Пусть выполнены условия

$$\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \varnothing, \ \ M_0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\mathbb{R}(i\lambda, A)\| < \infty. \quad (5)$$

Назовем x_0 — обобщенным решением уравнения (3), если

$$\mathcal{L}_0 x_0 = g, \quad (6)$$

где $g(t) = f(t, x_0(t))$, $t \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{L}_0 = \frac{d}{dt} - A$ — дифференциальный оператор, действующий из $D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$,

$$(\mathcal{L}_0^{-1} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)ds, \, t \in \mathbb{R}, \, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X), \quad (7)$$

где $G(u)$ — фунция Грина.

Уравнение (6) разрешимо в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, X)$ если выполнены условия (5) (см [2]).

Лемма. *Любое обобщенное решение нелинейного уравнения в пространстве $\mathcal{F}$ представимо в виде*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s, x(s))ds. \quad (8)$$

Доказательство следует из результатов статьи [2].

Обозначим через $\mathcal{J}$ нелинейный интегральный оператор, определенный правой частью формулы (8). Очевидно, что $\mathcal{J}$ является суперпозицией операторов

$$\mathcal{J} = \mathcal{L}_0^{-1} F,$$

где F — нелинейный оператор, определенный формулой $Fx(t) = f(t, x(t))$, действующий из X в X.

В этом случае имеет место неравенство

$$\|\mathcal{J}x - \mathcal{J}y\|_\infty \le l æ(\mathcal{L}_0)\|x - y\|_\infty,$$

где $æ(\mathcal{L}_0) = (K + K^2(1 + 8(1 + \sqrt{2}(K + K^2 M_0))))$, а l — константа из условия Липшица. Значит при выполнении условия $l æ(\mathcal{L}_0) < 1$ оператор $\mathcal{J}$ является сжатием, что и обеспечивает существование и единственность решения уравнения $x = \mathcal{J}x$, а значит существование и единственность решения уравнения (3), при предположении, что функция f равномерно непрерывна по первому аргументу (см. [3]).

При этом имеет место оценка

$$\|x\|_\infty = \|\mathcal{L}_0^{-1} Fx\|_\infty \le \|\mathcal{L}_0^{-1}\| \|Fx\|_\infty \le æ(\mathcal{L}_0)\|f\|_\infty.$$

Итак доказана

Теорема. *Пусть оператор A таков, что выполнены условия (5), функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной и равномерно непрерывна по первой переменной. Пусть также выполнено условие $l æ(\mathcal{L}_0) < 1$. Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (3) имеет единственное решение в пространстве $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, X)$ или $C_b(\mathbb{R}, X)$, которое допускает оценку $\|x\|_\infty \le æ(\mathcal{L}_0)\|f\|_\infty$.*

Приведем пример использования доказанной теоремы.

Пусть $\mathbf{\Omega}$ — есть некоторая область из $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ множество бесконечно дифференцируемых функций, действующих из $\mathbf{\Omega}$ в C и обращающихся в нуль на границе $\partial(\mathbf{\Omega})$. Рассмотрим линейный оператор $\Delta_0 : \mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{\Omega}) \to \mathcal{D}^\infty(\mathbf{\Omega})$, определённый формулой

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где $\mathcal{D}^\infty = \mathcal{D}^\infty(\mathbf{\Omega})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, действующих из из $\mathbf{\Omega}$ в C.

Графиком этого оператора является множество

$$\mathbf{\Gamma} = \{(u,v) \in \mathcal{D}_0^\infty \times D^\infty : \Delta_0 u = v\}.$$

Рассмотрим замыкание $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ по норме пространства $L_2(\overline{\mathbf{\Omega}}) \times L_2(\overline{\mathbf{\Omega}})$. Подпространство $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ является графиком оператора, который мы обозначим Δ. Область определения Δ обозначим $D(\Delta)$. Теперь на подпространстве $D(\Delta)$ рассмотрим оператор, определенный формулой $A = i\Delta + q$, где $q \in C_b(\overline{\Gamma})$ функция, определенная формулой $(qy)(u) = q(u)y(u)$, $u \in \overline{\mathbf{\Omega}}$, $y \in L_2(\overline{\mathbf{\Omega}})$, такая что $Re(q) \le \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} < 0$. Оператор $Bu = \frac{(q+\overline{q})}{2} u$, $u \in L_2(\mathbf{\Omega})$ будет расширением оператора $\frac{A+A^*}{2}$, что следует из равенств:

$$\frac{A + A^*}{2} u = \frac{(q + \overline{q})}{2} u.$$

Значит, $\mathrm{Re}(Au, u) = \frac{(Au,u)+(u,Au)}{2} = (\frac{A+A^*}{2} u, u) = = (\frac{q+\overline{q}}{2})(u,u) \le \boldsymbol{\omega}(u,u)$, $u \in D(\Delta) = D(A)$. Отсюда следует, что числовая область оператора A лежит в полуплоскости $C_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le \omega\}$.

Аналогично $\operatorname{Re}(A^* u, u) \le \omega(u, u)$. Значит область значений оператора A совпадает со всем пространством $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Воспользовавшись теоремой 3.2 из [4], получаем, что дополнение к множеству C_ω содержится в $\rho(A)$ — резольвентном множестве оператора A. К тому же имеет место оценка $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\omega}$. Значит, определена сильно непрерывная сжимающая полугруппа операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} L_2(\bar{\Omega})$. Поскольку оператор A от t не зависит, то соответствующее эволюционное семейство операторов имеет вид:

$$\mathcal{U}(t, s) = T(t - s).$$

Таким образом,

$$K = \sup_{0\le t-s\le 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| \le e^\omega.$$

Значит, выбрав в качестве функции f функцию, удовлетворяющую условиям теоремы, можно исследовать дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} - Au(t) - q(x)u(t, x) = f(t, u(t, x)), \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in D(A). \tag{9}$$

Уравнение (9) разрешимо в пространстве L_∞ и имеют место оценки

$$\|x\|_\infty \le e^\omega + e^{2\omega}\left(1 + 8(1 + \sqrt{2})\left(e^\omega + e^{2\omega}\frac{1}{\omega}\right)\right)\|f\|_\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перов А. И.* Частотные признаки существования ограниченных решений. / А. И. Перов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 896—904.

2. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30. № 3. — С. 1—11.

3. *Синтяев Ю. Н.* Об условиях обратимости возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами / Ю. Н. Синтяев // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. — 2008. — № 2. — С. 83—87.

4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972.— 740 с.

Синтяев Юрий Николаевич — аспирант факультета ПММ, Воронежский государственный университет
Тел.: 8 910 242 53 24
E-mail: sintjuri@yandex.ru

Sintyaev Yury — Voronezh State University, postgraduate student
Tel.: 8 910 242 53 24
E-mail: sintjuri@yandex.ru