УДК 517. 955. 8

АСИМПТОТИКА ПРИ $t \to \infty$ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 2.

Е. Н. Свиридова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.06.2009 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению ряда компонент решения системы уравнений, описывающей малые колебания экспоненциально стратифицированной и равномерно вращающейся жидкости в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), жестко связанной с вращающейся жидкостью. Жидкость стратифицирована вдоль оси Ox_3, совпадающей с осью вращения: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, где $\beta > 0$ – параметр стратификации. Построены асимптотики при $t \to +\infty$ компонент решения.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы, переменные коэффициенты, существование решения, асимптотическое поведение.

Abstract. This article is devoted to studying a number of components of solution of the system of partial differential equations. The system of equations describes the small fluctuations of the exponentially stratified and uniformly rotating fluid in the Cartesian system of coordinates (x_1, x_2, x_3) rigidly connected with the rotating fluid. The fluid is stratified along the axis Ox_3 coinciding with the axis of rotation: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, where $\beta > 0$ is a parameter of stratification. The asymptotics of the components of the solution are constructed.
Key words: differential equations, systems of differential equations, variable coefficients, existence of solution, asymptotic behavior.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе изучается двумерное движение стратифицированной жидкости, то есть такое, которое описывается функциями, не зависящими от одной из пространственных переменных, x_1 или x_2 (для определенности — от x_2). Рассмотрение двумерного движения мы проводим в рамках модели жидкости, принадлежащей А. Г. Свешникову, Ю. Д. Плетнер, Л. В. Перовой, приведенной в работе [1]. Авторами была доказана стабилизация решения. Нами, при несколько других требованиях на функцию из граничных условий, выписаны точные асимптотики компонент решения. Рассматриваемая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial x_1} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x_3} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 \in \mathbf{R}, x_3 > 0, t > 0; \alpha = (0, 0, \alpha)$ — вектор Кориолиса; ${\omega_0}^2 = 2\beta g$ — квадрат частоты Вейсяля-Брента, p — динамическое давление, $\rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в невозмущенном состоянии.

С помощью замены $\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1} p\, e^{2\beta x_3}$ приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0; \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta\sigma\right) = 0; \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем решать (2) со следующими начальными и граничными условиями:

$$V_k(x, 0) = 0,\ k = 1, 2, 3,\ \frac{\partial V_3}{\partial t}(x, 0) = 0,$$
$$\sigma(x, 0) = 0,\ \ V_3(x_1, x_3, t)\big|_{x_3=0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1, t). \tag{3}$$

Замечание. В силу условия соленоидальности задаваемого четвертым уравнением системы, с компонентами вектора скорости частиц $V=\{V_1,V_2,V_3\}$ можно связать функцию тока $\Psi=\Psi(x_1,x_3,t)$ следующим соотношением: $\{V_1,V_3\}=\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_3},-\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right\}$. Этим соотношением обусловлено граничное условие.

Предполагается, что функция $\psi(x_1,t)$ удовлетворяет следующим условиям

Условие 1. Функция $\psi(x_1,t)$ равномерно по $(x_1,t)\in\mathbf{R}_+^2$ ограничена: $|\psi(x_1,t)|\le c$.

Условие 2. В $L_1(\mathbf{R}\times(0;\infty))$ существуют следующие производные функции $\psi(x_1,t)$:

$$\chi_n(x_1,t)=\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^n\psi(x_1,t),\ n=2,3,4.$$

Условие 3. Имеет место оценка $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x_1|)|\psi(x_1,t)|\,dx_1<\infty$.

Условие 4. Функция $\psi(x_1,t)$ финитна: $\psi(x_1,t)=0$ при $t>N$.

Замечание. Из условий 1 и 4 следует, что существует $\delta>0$ такое, что справедлива оценка $|\psi(x_1,t)|\le c\exp(-\delta t)$, $(x_1,t)\in\mathbf{R}_+^2$

Введем нормы

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\rho=\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty(1+t^2)\left|F_{x_1\to s_1}[f(x_1,t)]\right|(1+s_1^{2\rho})\,ds_1dt\right\}^{1/2}$$

$$\left\|\left|g(x,t)\right|\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2\times(0;\infty))}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left|e^{-\beta x_3}g(x,t)\right|^2dxdt.\quad(4)$$

Через $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}^3)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}_+{}^2)}$, $\|\cdot\|_{L_2(W_2^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))}$ будем обозначать стандартные нормы в соответствующих пространствах $L_2(\mathbf{R}^3)$, $L_2(\mathbf{R}_+{}^2)$, $L_2(W_2^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))$, где $W_2^\rho(\mathbf{R})$ — пространство Соболева—Слободецкого с индексом ρ на $\mathbf{R}$.

В работе [2] доказано существование решения задачи (2), (3), получены оценки для норм компонент решения и их производных, входящих в систему, в пространствах $L_2(\mathbf{R}_+{}^2)$, $L_2(W_2^\rho(\mathbf{R})\times(0,\infty))$, выполнена проверка начальных и граничных условий. В частности, доказано, что компоненты $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$ решения имеют при $x_3>0$ представление

$$V_1(x_1,x_3,t)=\exp(\beta x_3)\left\{-i\beta F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\hat h(s_1,s_3,\gamma)}{s_1}\right]+\right.$$
$$\left.+F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{s_3\hat h(s_1,s_3,\gamma)}{s_1}\right]\right\},\quad(5)$$

$$V_2(x_1,x_3,t)=\exp(\beta x_3)\left\{i\alpha\beta F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\hat h(s_1,s_3,\gamma)}{\gamma s_1}\right]-\right.$$
$$\left.-\alpha F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{s_3\hat h(s_1,s_3,\gamma)}{\gamma s_1}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t)=\rho_0(x_3)\left(\alpha V_2(x,t)-\frac{\partial V_1}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t)=\rho_0(x_3)\exp(\beta x_3)\left\{-\omega_0^2F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\hat h(s_1,s_3,\gamma)}{\gamma}\right]-\right.$$
$$\left.-F^{-1}_{s\to x}L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\gamma\hat h(s_1,s_3,\gamma)\right]\right\},$$

где

$$\hat h(s_1,s_3,\gamma)=\frac{2s_1s_3\widehat\psi(s_1,\gamma)}{\left(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2\right)}+$$
$$+\frac{2s_1s_3\widehat\psi(s_1,\gamma)}{\left(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2\right)^2}\frac{\left(\alpha^2-\omega_0{}^2\right)s_1{}^2}{\gamma^2+\dfrac{\alpha^2s_3{}^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0{}^2s_1{}^2}{s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2}},$$

причем $\widehat\psi(s_1,\gamma)=L_{t\to\gamma}\left[F_{x_1\to s_1}[\psi(x_1,t)]\right]$, $L_{t\to\gamma}$ — преобразование Лапласа (с учётом начальных условий) и $F_{x_1\to s_1}$ — частичное преобразование Фурье. Доказано также выполнение следующих оценок

$$\left\|\left|V_1(x_1,x_3,t)\right|\right\|_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))}\le$$
$$\le c\left\{\left\|\psi(x_1,t)\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))}+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))}+\right.$$
$$\left.+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$\left\|\left|V_2(x_1,x_3,t)\right|\right\|_{L_2(\mathbf{R}_+^2\times(0;\infty))}\le$$
$$\le c\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,t)\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))}+\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbf{R}\times(0;\infty))}+\right.$$
$$\left.+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\};$$

аналогичным образом, с использованием свойств преобразования Фурье по переменной $x:\dfrac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}_{s\to x}\left[\tilde f(s_1,s_3)\right]=F^{-1}_{s\to x}\left[-is_k\tilde f(s_1,s_3)\right],k=\overline{1,3},$ и свертки по переменной t: $D^\kappa(f*g)=(D^\kappa f*g)=(f*D^\kappa g)$, и равенства Парсеваля, на основе утверждений из [4], получены оценки нормы (4) остальных компонент решения и их производных, входящих в систему.

В работе [3] исследовано асимптотическое поведение компоненты $V_3(x_1,x_3,t)$ решения при $t\to\infty$. Доказан следующий результат

Теорема 0. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компоненты $V_3(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$V_3(x,t) = kt^{-\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} (x_1 - y_1)\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 +$$

$$+(1+|x_1|)x_3^{-3}O(t^{-3})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$

$$k = \frac{3\beta^2 \exp(\beta x_3)\alpha^{1.5}\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\alpha\right)}{\sqrt{2}\pi^{1.5}x_3^2(\alpha^2-\omega_0^2)^{1.5}}\left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)} - \frac{\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{\lambda^2}\right)d\lambda,$$

коэффициент k равномерно по x_3: $0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$ ограничен.

В настоящей работе продолжено исследование асимптотического поведения при $t \to \infty$ компонент решения задачи (2), (3), начатое в [3]. Получены асимптотики компонент $V_1(x,t)$, $V_2(x,t)$, $\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t)$, $\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t)$. Доказаны следующие теоремы

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компоненты $V_1(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$V_1(x,t) = (a_1 + a_2)t^{-1.5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 +$$

$$+(1+|x_1|)(x_3^{-1}+x_3^{-2})O(t^{-2})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$

$$a_1 = -\frac{\alpha\beta\alpha^{0.5}\exp(\beta x_3)}{2^{0.5}\pi^{1.5}(\alpha^2-\omega_0^2)^{0.5}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$

$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\lambda^{-2}\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda,$$

$$a_2 = \frac{2^{0.5}\alpha^{0.5}\exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5}x_3(\alpha^2-\omega_0^2)^{0.5}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$

$$\times\left(3-\beta^2\lambda^{-2}-3\beta^4\lambda^{-4}\right)\frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}}d\lambda,$$

коэффициенты a_1 и a_2 равномерно по x_3: $0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$ ограничены.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компоненты $V_2(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$V_2(x,t) = \alpha\beta\exp(\beta x_3)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right] -$$

$$-\alpha\exp(\beta x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right]+$$

$$+(b_1+b_2)t^{-1.5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 +$$

$$+(1+|x_1|)(x_3^{-1}+x_3^{-2})O(t^{-2})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{\alpha}\beta^3\sqrt{2}\exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5}(\alpha^2-\omega_0^2)^{0.5}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\lambda^{-2}\times$$

$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda,$$

$$b_2 = -\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\pi^{-1.5}x_3^{-1}(\alpha^2-\omega_0^2)^{-0.5}\exp(\beta x_3)\sin(\pi/4-t\alpha)\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(3+3\alpha^2-(7+3\alpha^2)\beta^2\lambda^{-2}+\frac{3}{2}\beta^4\lambda^{-4}\right)\times$$

$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda$$

коэффициенты b_1 и b_2 равномерно по x_3: $0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$ ограничены.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компоненты $\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t) = \rho_0(x_3)(c_1+c_2)t^{-1.5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1 +$$

$$+(1+|x_1|)(x_3^{-1}+x_3^{-2})O(t^{-2})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$

$$c_1 = -\frac{\alpha^{1.5}\beta^3\exp(\beta x_3)}{2^{0.5}\pi^{1.5}(\alpha^2-\omega_0^2)^{0.5}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\lambda^{-2}\times$$

$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda,$$

$$c_2 = -2^{-0.5}\alpha^{1.5}\pi^{-1.5}x_3^{-1}(\alpha^2-\omega_0^2)^{-0.5}\times$$

$$\times\exp(\beta x_3)\sin(\pi/4-t\alpha)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$

$$\times\left(6+6\alpha^2-(13+6\alpha^2)\beta^2\lambda^{-2}\right)\times$$

$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda,$$

коэффициенты c_1 и c_2 равномерно по x_3 : $0<\varepsilon<x_3<N<\infty$ ограничены.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t\to+\infty$ для компоненты $\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t)$ решения задачи (2), (3) справедливо следующее асимптотическое представление

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t)=-\rho_0(x_3)\exp(\beta x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}\times$$
$$\times F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right]+$$
$$+(d_1+d_2)\rho_0(x_3)t^{-\frac{5}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(x_1-y_1)\psi(y_1,\tau)\,d\tau dy_1+$$
$$+(1+|x_1|)x_3^{-3}O(t^{-3})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|z|)\psi(z,\tau)\,dzd\tau\right),$$
$$d_1=-9\exp(\beta x_3)\alpha^{2.5}\beta^2 2^{-0.5}\pi^{-1.5}x_3^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-1.5}\times$$
$$\times\sin(\pi/4+t\alpha)\times\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\lambda^{-2}\times$$
$$\times\left(2\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}+\right.$$
$$\left.+3\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\right)d\lambda,$$
$$d_2=3\exp(\beta x_3)\alpha^{0.5}\omega_0^2\beta^2 2^{-0.5}\pi^{-1.5}x_3^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-1.5}\times$$
$$\times\sin(\pi/4+t\alpha)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\lambda^{-2}\times$$
$$\times\left(2\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}-\right.$$
$$\left.-3\cos\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\right)d\lambda,$$

коэффициенты d_1 и d_2 равномерно по x_3 : $0<\varepsilon<x_3<N<\infty$ ограничены.

2. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТЫ $\mathbf{V_1(x_1,x_3,t)}$ РЕШЕНИЯ ПРИ $t\to\infty$

Перепишем слагаемые в представлении (5) компоненты $V_1(x,t)$ решения задачи (2), (3) при $x_3>0$ в виде

$$L^{-1}_{\gamma\to t}\left[\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)s_1^{-1}\right]=$$
$$=2s_3\widehat{\psi}(s_1,t)\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{-1}+\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_{1,1}(s,t),\tag{6}$$
$$L^{-1}_{\gamma\to t}\left[s_1^{-1}s_3\hat{h}(s_1,s_3,\gamma)\right]=$$
$$=2s_3^2\widehat{\psi}(s_1,t)\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{-1}+\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_{1,2}(s,t),\tag{7}$$

где

$$\widehat{E}_{1,1}(s,t)=\frac{2s_3s_1^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^2}\cdot\frac{\sin[St]}{S},$$
$$\widehat{E}_{1,2}(s,t)=\frac{2s_3^2s_1^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^2}\cdot\frac{\sin[St]}{S},\tag{8}$$
$$S(s_1,s_3)=\sqrt{\frac{\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2}{s_1^2+s_3^2+\beta^2}}\tag{9}$$

В силу выполнения условия 2 справедливы представления

$$\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_{1,1}(s,t)=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^n}\widehat{E}_{1,1}(s,t)=$$
$$=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{C}_n(s,t),$$
$$\widehat{\psi}(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{E}_{1,2}(s,t)=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^n}\widehat{E}_{1,2}(s,t)=$$
$$=\widehat{\chi}_n(s_1,t)\underset{(t)}{*}\widehat{D}_n(s,t),$$

где

$$C_n(x,t)=(-i\beta)F^{-1}_{s\to x}\left[\widehat{C}_n(s,t)\right]=$$
$$=(-i\beta)\frac{2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{(2\pi)^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_3s_1^2\sin[St]\exp\left[-i(x,s)\right]}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^2S}ds_1ds_3,$$
$$D_n(x,t)=F^{-1}_{s\to x}\left[\widehat{D}_n(s,t)\right]=$$
$$=\frac{2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_3^2s_1^2\sin[St]\exp\left[-i(x,s)\right]}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^2S}ds_1ds_3.$$

С помощью замены $s_1=\lambda\cos\theta$, $\sqrt{s_3^2+\beta^2}=\lambda\sin\theta$ приходим к равенствам

$$C_n(x,t)=-i(2\pi)^{-2}\left(\omega_0^2-\alpha^2\right)\left(C_n^+(x,t)-C_n^-(x,t)\right),$$
$$D_n(x,t)=i(2\pi)^{-2}\left(\omega_0^2-\alpha^2\right)\left(D_n^+(x,t)-D_n^-(x,t)\right).$$
$$C_n^{\pm}(x,t)=\int_0^{0.5\pi}\cos^2\theta\sin\theta\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\times$$
$$\times\exp\left(\pm it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}\right)J_n(\theta)\,d\theta,\tag{10}$$
$$D_n^{\pm}(x,t)=\int_0^{0.5\pi}\cos^2\theta\sin\theta\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{-0.5}\times$$
$$\times\exp\left(\pm it\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}\right)K_n(\theta)\,d\theta,\tag{11}$$

$$J_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta \sin^{-1}\theta} + \int_{\beta \sin^{-1}\theta}^{+\infty} \right) e^{-ix_1 \lambda \cos\theta} \times$$
$$\times \left(e^{ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} + e^{-ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} \right) \left(1 + \lambda^2 \cos^2\theta\right)^{-n} d\lambda, \quad (12)$$
$$n = \overline{2,4},$$

$$K_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta \sin^{-1}\theta} + \int_{\beta \sin^{-1}\theta}^{+\infty} \right) \frac{\sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}}{\left(1 + \lambda^2 \cos^2\theta\right)^n} e^{-ix_1 \lambda \cos\theta} \times \quad (13)$$
$$\times \left(e^{ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} - e^{-ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} \right), \; n = 3, 4.$$

При выполнении условия 1 из представлений (6) и (7) следует, что для оценки поведения при $t \to +\infty$ функции $V_1(x,t)$ достаточно получить соответствующие оценки для интегралов (10) и (11).

Доказательство теоремы 1 основано на изучении асимптотического поведения при $t \to \infty$ интегралов (10) и (11), которое будет проведено ниже.

Фазовые функции $S(\theta) = \pm\sqrt{\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta}$ имеют на отрезке $[0; 0.5\pi]$ две критических точки: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.5\pi$. Устроим на $[0; 0.5\pi]$ разбиение единицы

$$\eta_1(\theta) + \eta_2(\theta) = 1, \;\; \eta_k(\theta) \in C^\infty\left([0; 0.5\pi]\right), \;\; k = 1,2,$$

$$\eta_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \le \pi/6 \\ 0, & \theta \ge \pi/3 \end{cases}; \;\; \eta_2(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta \ge \pi/3 \\ 0, & \theta \le \pi/6 \end{cases}.$$

Таким образом, требуется изучить асимптотики следующих интегралов

$$C_n^{\pm}(x,t,0) =$$
$$= \int_0^{\pi/3} \eta_1(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{-0.5} \times$$
$$\times \exp\left[\pm itS(\theta)\right] J_n(\theta)\, d\theta,$$

$$C_n^{\pm}(x,t,\pi/2) =$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \eta_2(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{-0.5} \times$$
$$\times \exp\left[\pm itS(\theta)\right] J_n(\theta)\, d\theta,$$

$$D_n^{\pm}(x,t,0) =$$
$$= \int_0^{\pi/3} \eta_1(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{-0.5} \times$$
$$\times \exp\left[\pm itS(\theta)\right] K_n(\theta)\, d\theta,$$

$$D_n^{\pm}(x,t,\pi/2) =$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \eta_2(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{-0.5} \times$$
$$\times \exp\left[\pm itS(\theta)\right] K_n(\theta)\, d\theta.$$

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ $C_n(x,t,0)$ И $D_n(x,t,0)$

Нами будет использоваться следующее утверждение (см. [5], стр.103)

Утверждение 1. Пусть $I = [x_0; x_0 + \delta]$ — конечный отрезок, $\delta > 0$, $f(x), S(x) \in C^\infty(I)$, $f^{(k)}(x_0 + \delta) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$. Пусть функция $S(x)$ имеет на I единственную стационарную точку x_0 и $S^{(k)}(x_0) = 0$, $1 \le k \le m-1$, $S^{(m)}(x_0) \ne 0$, $m \ge 2$. Тогда при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda, x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x) \exp\left(i\lambda S(x)\right) dx \sim$$
$$\sim \lambda^{-\frac{1}{m}} \exp\left(i\lambda S(x_0)\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k}{m}},$$

$$a_k = \Gamma\left((k+1)m^{-1}\right)(k!\,m)^{-1} \exp\left(i\pi(k+1)\delta(x_0)(2m)^{-1}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[f(x) \left(-\delta(x_0)\left(S(x) - S(x_0)\right)\right)^{-\frac{k+1}{m}} (x - x_0)^{k+1} \right]\Bigg|_{x=x_0},$$
$$\delta(x_0) = \operatorname{sgn} S^{(m)}(x_0).$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1, 2, 4. Тогда для интегралов $C_n(x,t,0)$ (при $n = 2,3,4$) и $D_n(x,t,0)$ (при $n = 3,4$) справедливо при $t \to +\infty$ следующее асимптотическое представление

$$C_n(x,t,0) = O\left(t^{-2}\right), \; D_n(x,t,0) = O\left(t^{-2}\right). \quad (14)$$

Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Справедливы равенства $J_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0$, $n = 2,3,4$; $K_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0$, $n = 3,4$.

Доказательство. Подынтегральные функции в представлениях (12) и (13) непрерывны, интегралы $J_n(\theta)$ и $K_n(\theta)$ абсолютно сходятся и являются непрерывными функциями (по теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега). При $\theta \to 0$ промежутки интегрирования в (12) и (13) стремятся к нулю. Следовательно, $J_n(0) = 0$, $K_n(0) = 0$.

Лемма 2. Справедливы равенства

$$\frac{d}{d\theta} J_n(\theta)\big|_{\theta=0} = \frac{d^2}{d\theta^2} J_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0, \quad n = 2,3,4,$$
$$\frac{d}{d\theta} K_n(\theta)\big|_{\theta=0} = \frac{d^2}{d\theta^2} K_n(\theta)\big|_{\theta=0} = 0, \quad n = 3,4.$$

Доказательство. С помощью замены $\xi = \lambda \sin\theta$ функции $J_2(\theta)$ и $K_3(\theta)$ можно записать в виде

$$J_2(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \frac{2\exp\left[-ix_1\xi\cos\theta\sin^{-1}\theta\right]\sin^{-1}\theta\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(1+\xi^2\cos^2\theta\sin^{-2}\theta\right)^2} d\xi,$$

$$K_3(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \frac{2i\exp\left[-ix_1\xi\cos\theta\sin^{-1}\theta\right]\sin^{-1}\theta\sin\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(1+\xi^2\cos^2\theta\sin^{-2}\theta\right)^3} \sqrt{\xi^2-\beta^2}\, d\xi.$$

В последних представлениях снова выполняем замену $\mu = \sin\theta$. Тогда

$$J_2(\mu) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \frac{2\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\,/\,\mu\right]\mu^3\cos\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^2} d\xi,$$

$$K_3(\mu) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \frac{2i\exp\left[-ix_1\xi\sqrt{1-\mu^2}\,/\,\mu\right]\mu^5\sin\left(x_3\sqrt{\xi^2-\beta^2}\right)}{\left(\mu^2\left(1-\xi^2\right)+\xi^2\right)^3} \sqrt{\xi^2-\beta^2}\, d\xi.$$

Вычисляя непосредственно первую и вторую производные по μ от выражений $J_2(\mu)$ и $K_3(\mu)$, получаем требуемое. Очевидно, для $J_3(\mu)$, $J_4(\mu)$, $K_4(\mu)$ утверждение леммы будет тем более справедливо в силу лучшей сходимости по ξ возникающих в процессе дифференцирования интегралов.

Доказательство теоремы 5. Применяя к интегралам $C_n^{\pm}(x,t,0)$ и $D_n^{\pm}(x,t,0)$ теорему 01 и учитывая результаты лемм 1, 2 будем иметь

$$C_n^{\pm}(x,t,0) = D_n^{\pm}(x,t,0) =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\pm i\omega_0 t\right]\left(0\cdot t^0 + 0\cdot t^{-\frac{1}{2}} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)\right) = O\left(t^{-2}\right),$$

$$t \to +\infty.$$

Откуда получаем, что $C_n(x,t,0) = D_n(x,t,0) = O\left(t^{-2}\right)$.

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА $C_n(x,t,\pi/2)$

Обозначим

$$C_n(x,t) = (-i\beta)2^{-1}\pi^{-2}\left(\alpha^2-\omega_0{}^2\right)\widetilde{C}_n(x,t), \quad (15)$$

$$\widetilde{C}_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+s_1^2\right)^n} \frac{s_3 s_1{}^2}{\left(s_1{}^2+s_3{}^2+\beta^2\right)^2} \times$$

$$\times \frac{\sin[St]}{S}\exp\left[-i(x,s)\right] ds_1 ds_3.$$

Для изучения асимптотики в точке $\theta = \pi/2$ проинтегрируем $\widetilde{C}_n(x,t)$ по частям по переменной s_3 один раз. В итоге получим, что вклад в асимптотику интеграла $C_n(x,t)$ от точки $\theta = 0.5\pi$ складывается из суммы вкладов в асимптотику следующих интегралов

$$C_n^1(x,t) = \frac{\alpha^2-\omega_0^2}{ix_3} t \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^4 s_3^2\cos[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^3\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)},$$

$$C_n^2(x,t) = -\frac{4}{ix_3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^2 s_3^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$C_n^3(x,t) = \frac{1}{ix_3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{1.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$C_n^4(x,t) = -\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{ix_3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^4 s_3^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1 ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2 s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2 s_1^2\right)^{1.5}}.$$

С помощью замены $s_1 = \lambda\cos\theta$, $\sqrt{s_3^2+\beta^2} = \lambda\sin\theta$ и определения вклада в асимптотику интеграла Фурье эти интегралы приводятся к виду (здесь мы учли введенное ранее разбиение единицы, поскольку вычисляем асимптотику интегралов в точке $\theta = 0.5\pi$)

$$\widetilde{C}_n^1 = -\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{2ix_3} t \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp\left[itS\right]+\exp\left[-itS\right]\right)}{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta} M_n(\theta)\, d\theta,$$

$$\widetilde{C}_n^2 = -\frac{2}{x_3} \times$$
$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\exp[itS] - \exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{0.5}} M_n(\theta)\, d\theta,$$
$$\widetilde{C}_n^3 = \frac{1}{2x_3} \times$$
$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta) \cos^2\theta \sin\theta \left(\exp[itS] - \exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{0.5}} N_n(\theta)\, d\theta,$$
$$\widetilde{C}_n^4 = -\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{2x_3} \times$$
$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta) \cos^4\theta \sin\theta \left(\exp[itS] - \exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2 \sin^2\theta + \omega_0^2 \cos^2\theta\right)^{1.5}} M_n(\theta)\, d\theta,$$
где
$$M_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta \sin^{-1}\theta} + \int_{\beta \sin^{-1}\theta}^{+\infty} \right) \frac{\sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}\, e^{-ix_1 \lambda \cos\theta}}{\lambda^2 \left(1 + \lambda^2 \cos^2\theta\right)^n} \times \quad (16)$$
$$\times \left(e^{ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} - e^{-ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} \right) d\lambda,$$
$$N_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta \sin^{-1}\theta} + \int_{\beta \sin^{-1}\theta}^{+\infty} \right) \times$$
$$\times \frac{e^{-ix_1 \lambda \cos\theta} \left(e^{ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} - e^{-ix_3 \sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2}} \right)}{\sqrt{\lambda^2 \sin^2\theta - \beta^2} \left(1 + \lambda^2 \cos^2\theta\right)^n} d\lambda. \quad (17)$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для интеграла $C_n(x, t, \pi/2)$ (при $n = 2, 3, 4$) справедливо при $t \to +\infty$ следующее асимптотическое представление
$$C_n(x, t, \pi/2) =$$
$$= -2^{-0.5} \beta \pi^{-1.5} \left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{-0.5} \sin(\pi/4 + t\alpha)\, t^{-1.5} \times$$
$$\times \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \right) \sin\left(x_3 \sqrt{\lambda^2 - \beta^2}\right) \left(x_3 \sqrt{\lambda^2 - \beta^2}\right)^{-1} \lambda^{-2} d\lambda +$$
$$+ c(x, t), \quad (18)$$
где $c(x,t) = \left|x_1 x_3^{-1}\right| O\left(t^{-2}\right)$, причем оценка $O\left(t^{-2}\right)$ равномерна по $x_3 :\ 0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$.

Доказательство:

С помощью утверждения 1 находим асимптотики интегралов $\widetilde{C}_n^j$, $j = \overline{1, 4}$
$$\widetilde{C}_n^1 = -3\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}\, 2^{-0.5} \left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{-1.5} \times$$
$$\times x_3^{-1} M_n(\pi/2) \sin(\pi/4 + t\alpha)\, t^{-1.5} + c_1(x, t),$$
$$\widetilde{C}_n^2 = \sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}\, 2^{1.5} \left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{-1.5} \times$$
$$\times x_3^{-1} M_n(\pi/2) \sin(\pi/4 + t\alpha)\, t^{-1.5} + c_2(x, t),$$
$$\widetilde{C}_n^3 = -\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}\, 2^{-0.5} \left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^{-1.5} \times$$
$$\times x_3^{-1} N_n(\pi/2) \sin(\pi/4 + t\alpha)\, t^{-1.5} + c_3(x, t),$$
$$\widetilde{C}_n^4 = c_4(x, t),$$
где $c_j(x,t) = \left|x_1 x_3^{-1}\right| O(t^{-2})$, $j = 1, 2, 3$, $c_4(x,t) = x_3^{-1} O(t^{-2.5})$, причем оценки равномерны по $x_3 :\ 0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$.

Суммируя полученные результаты и учитывая представление (15), получаем (18).

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА $D_n(x, t, \pi/2)$

Обозначим
$$D_n(x, t) = 2^{-1} \pi^{-2} \left(\alpha^2 - \omega_0{}^2\right) \widetilde{D}_n(x, t), \quad (19)$$
$$\widetilde{D}_n(x, t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + s_1^2\right)^n} \frac{s_3^2 s_1{}^2}{\left(s_1{}^2 + s_3{}^2 + \beta^2\right)^2} \frac{\sin[St]}{S} e^{-i(x,s)} ds_1 ds_3.$$

Для изучения асимптотики в точке $\theta = \pi/2$ проинтегрируем $\widetilde{D}_n(x, t)$ по частям по переменной s_3 два раза. В итоге получим, что вклад в асимптотику интеграла $D_n(x, t)$ от точки $\theta = 0.5\pi$ складывается из суммы вкладов в асимптотику следующих интегралов
$$D_n^1(x, t) = 2\alpha^2 \frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{x_3^2} t \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^4 s_3^4 \cos[St] \times \exp[-i(x, s)]\, ds_1 ds_3}{\left(1 + s_1^2\right)^n \left(s_1^2 + s_3^2 + \beta^2\right)^3 \left(\alpha^2 s_3^2 + \alpha^2 \beta^2 + \omega_0^2 s_1^2\right)^2},$$
$$D_n^2(x, t) = 6 \frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{x_3^2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^4 s_3^4 \cos[St] \times \exp[-i(x, s)]\, ds_1 ds_3}{\left(1 + s_1^2\right)^n \left(s_1^2 + s_3^2 + \beta^2\right)^4 \left(\alpha^2 s_3^2 + \alpha^2 \beta^2 + \omega_0^2 s_1^2\right)},$$
$$D_n^3(x, t) = -3 \frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{x_3^2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^4 s_3^2 \cos[St] \times \exp[-i(x, s)]\, ds_1 ds_3}{\left(1 + s_1^2\right)^n \left(s_1^2 + s_3^2 + \beta^2\right)^3 \left(\alpha^2 s_3^2 + \alpha^2 \beta^2 + \omega_0^2 s_1^2\right)},$$
$$D_n^4(x, t) = \frac{\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)^2}{x_3^2} t \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s_1^6 s_3^4 \sin[St] \times \exp[-i(x, s)]\, ds_1 ds_3}{\left(1 + s_1^2\right)^n \left(s_1^2 + s_3^2 + \beta^2\right)^{4.5} \left(\alpha^2 s_3^2 + \alpha^2 \beta^2 + \omega_0^2 s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$D_n^5(x,t) = 4\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}t\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^4s_3^4\cos[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^4\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)},$$

$$D_n^6(x,t) = -\frac{4\alpha^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^2s_3^4\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$D_n^7(x,t) = -\frac{20}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^2s_3^4\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$D_n^8(x,t) = \frac{18}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^2s_3^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$D_n^9(x,t) = -2\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}t\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^4s_3^2\cos[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^3\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)},$$

$$D_n^{10}(x,t) = -\frac{2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{1.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{0.5}},$$

$$D_n^{11}(x,t) = \frac{2\alpha^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^2s_3^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{1.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$D_n^{12}(x,t) = \frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{x_3^2}t\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^6s_3^4\cos[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^4\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^2},$$

$$D_n^{13}(x,t) = -3\alpha^2\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^4s_3^4\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{2.5}},$$

$$D_n^{14}(x,t) = -5\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^4s_3^4\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{3.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{1.5}},$$

$$D_n^{15}(x,t) = 3\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_1^4s_3^2\sin[St]\times\exp\left[-i(x,s)\right]ds_1ds_3}{\left(1+s_1^2\right)^n\left(s_1^2+s_3^2+\beta^2\right)^{2.5}\left(\alpha^2s_3^2+\alpha^2\beta^2+\omega_0^2s_1^2\right)^{1.5}}.$$

Учтем введенное ранее разбиение единицы. Поскольку мы вычисляем асимптотику интегралов в точке $\theta = 0.5\pi$, с помощью замены $s_1 = \lambda\cos\theta$, $\sqrt{s_3^2+\beta^2} = \lambda\sin\theta$ и определения вклада в асимптотику интеграла Фурье эти интегралы приводятся к виду

$$\widetilde{D}_n^1 = -\alpha^2\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}t\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^2}P_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^2 = -3\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}P_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^3 = \frac{3}{2}\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}M_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^4 = -\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{2ix_3^2}t\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^6\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}}P_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^5 = -2\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2}t\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta}P_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^6 = \frac{2\alpha^2}{ix_3^2}t\times$$

$$\times\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\eta_2(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}}P_n(\theta)d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^7 = \frac{10}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{0.5}} P_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^8 = -\frac{9}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{0.5}} M_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^9 = \frac{\alpha^2-\omega_0^2}{x_3^2} t \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta} M_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{10} = \frac{1}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{0.5}} N_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{11} = -\frac{\alpha^2}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^2\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}} M_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{12} = -\frac{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^2}{2x_3^2} \times$$

$$\times t \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^6\theta\sin\theta\left(\exp[itS]+\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{2}} P_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{13} = \frac{3\alpha^2}{2}\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{2.5}} P_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{14} = \frac{5}{2}\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}} P_n(\theta)\,d\theta,$$

$$\widetilde{D}_n^{15} = -\frac{3}{2}\frac{\alpha^2-\omega_0^2}{ix_3^2} \times$$

$$\times \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\eta_2(\theta)\cos^4\theta\sin\theta\left(\exp[itS]-\exp[-itS]\right)}{\left(\alpha^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos^2\theta\right)^{1.5}} M_n(\theta)\,d\theta,$$

где

$$P_n(\theta) = \left(\int_{-\infty}^{-\beta\sin^{-1}\theta} + \int_{\beta\sin^{-1}\theta}^{+\infty}\right) \frac{\left(\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2\right)^{1.5}}{\lambda^4\left(1+\lambda^2\cos^2\theta\right)^n} \times$$
$$\times e^{-ix_1\lambda\cos\theta}\left(e^{ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}} - e^{-ix_3\sqrt{\lambda^2\sin^2\theta-\beta^2}}\right)d\lambda, \quad (20)$$

функции $M_n(\theta)$, $N_n(\theta)$ определены в (16), (17).

Теорема 7. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для интеграла $D_n\left(x,t,\frac{\pi}{2}\right)$ (при $n=3,4$) справедливо при $t\to+\infty$ следующее асимптотическое представление

$$D_n\left(x,t,\frac{\pi}{2}\right) = 2^{0.5}\pi^{-1.5}x_3^{-1}\alpha^{0.5}\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{-0.5} \times$$
$$\times\sin\left(\pi/4+t\alpha\right)t^{-1.5} \times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\left(3-\beta^2\lambda^{-2}-3\beta^4\lambda^{-4}\right)\times \quad (21)$$
$$\times\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda + d(x,t),$$

где $d(x,t) = \left|x_1x_3^{-2}\right|O\left(t^{-2}\right)$, причем оценка $O\left(t^{-2}\right)$ равномерна по $x_3:\ 0<\varepsilon<x_3<N<\infty$.

Доказательство:

С помощью утверждения 1 находим асимптотики интегралов $\widetilde{D}_n^j$, $j=\overline{1,15}$

$$\widetilde{D}_n^1 = -i\frac{3\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$
$$\times P_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5} + d_1(x,t),$$

$$\widetilde{D}_n^5 = -i\frac{6\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$
$$\times P_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5} + d_5(x,t),$$

$$\widetilde{D}_n^6 = i\frac{2\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$
$$\times P_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5} + d_6(x,t),$$

$$\widetilde{D}_n^7 = i\frac{10\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$
$$\times P_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5} + d_7(x,t),$$

$$\widetilde{D}_n^8 = -i\frac{9\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}} \times$$
$$\times M_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5} + d_8(x,t),$$

$$\widetilde{D}_n^9 = i\frac{3\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}}\times$$
$$\times M_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5}+d_9(x,t),$$
$$\widetilde{D}_n^{10} = i\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}}\times$$
$$\times N_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5}+d_{10}(x,t),$$
$$\widetilde{D}_n^{11} = -i\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{\alpha}}{x_3^2\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{1.5}}\times$$
$$\times M_n(\pi/2)\sin(\pi/4+t\alpha)t^{-1.5}+d_{11}(x,t),$$
$$\widetilde{D}_n^2=\widetilde{D}_n^3=\widetilde{D}_n^4=\widetilde{D}_n^{12}=\widetilde{D}_n^{13}=\widetilde{D}_n^{14}=\widetilde{D}_n^{15}=O\left(t^{-2.5}\right)$$

где $d_j(x,t)=\left|x_1x_3^{-2}\right|O\left(t^{-2}\right)$, $j=1,\overline{5,11}$, причем оценка $O\left(t^{-2}\right)$ равномерна по x_3: $0<\varepsilon<$ $<x_3<N<\infty$.

Суммируя полученные результаты и учитывая представление (19), получаем (21).

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся результатами, доказанными в [6], стр. 58 и перенесем результаты (18) и (21) на свертки $\psi(x_1,t)\underset{(x_1,t)}{*}C_n(x,t)$ и $\psi(x_1,t)\underset{(x_1,t)}{*}D_n(x,t)$.

При $n=3,4$ для $C_n(x,t)$ имеем $C_n(x,t)=$ $=\tilde{c}t^{-1.5}+\left|x_1x_3^{-1}\right|O\left(t^{-2}\right)$,

$$\tilde{c}=-\frac{2^{-0.5}\alpha\beta\pi^{-1.5}\alpha^{0.5}}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{0.5}}\sin(\pi/4+t\alpha)\times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)\lambda^{-2}\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)^{-1}d\lambda. \tag{21}$$

Рассмотрим свертку

$$C_n(x_1,x_3,t)\underset{(x_1,t)}{*}\psi(x_1,t)=$$
$$=\tilde{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1+$$
$$+x_3^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t|x_1-y_1|O(t-\tau)^{-2}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1.$$

Проведем оценки получившихся интегралов, учитывая условия 3 и 4.

$$G_1=\tilde{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1=$$
$$=\tilde{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^N t^{-\frac{3}{2}}\left(1+O(\tau/t)\right)\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1;$$
$$G_{1,1}=\tilde{c}t^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1,$$

$$\left|G_{1,2}\right|\le\tilde{c}t^{-\frac{5}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^N\left|\psi(y_1,\tau)\right|\left|c_1\tau\right|d\tau dy_1\le$$
$$\le\tilde{c}t^{-\frac{5}{2}}c_1N\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\psi(y_1,\tau)\right|d\tau dy_1<\infty,$$

(интегралы сходятся в силу условия 3).

$$G_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t|x_1-y_1|O(t-\tau)^{-2}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1=$$
$$=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|x_1-y_1|O(t-\tau)^{-2}\psi(y_1,\tau)dy_1d\tau.$$

Оценим внутренний интеграл с помощью неравенства Питре (см. [7], с.31).

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x_1-y_1|\psi(y_1,\tau)dy_1=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|y_1|\psi(x_1-y_1,\tau)dy_1\le\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|y_1|\right)\psi(x_1-y_1,\tau)dy_1\le$$
$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x_1|\right)\left(1+|x_1-y_1|\right)\psi(x_1-y_1,\tau)dy_1\le$$
$$\le\left(1+|x_1|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\psi(z,\tau)dz<\infty$$

Тогда

$$\left|G_2\right|\le c_2\int_0^N|t-\tau|^{-2}\left\{\left(1+|x_1|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\psi(z,\tau)dz\right\}d\tau\le$$
$$\le c_2t^{-2}\int_0^N\left|1-\frac{\tau}{t}\right|^{-2}\left\{\left(1+|x_1|\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\psi(z,\tau)dz\right\}d\tau\le$$
$$\le 4c_2\left(1+|x_1|\right)t^{-2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\psi(z,\tau)dzd\tau.$$

Складывая оценки для интегралов G_1 и G_2, получаем

$$C_n(x_1,x_3,t)\underset{(x_1,t)}{*}\psi(x_1,t)=\tilde{c}t^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(y_1,\tau)d\tau dy_1+$$
$$+\left(1+|x_1|\right)x_3^{-1}O(t^{-2})\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\psi(z,\tau)dzd\tau\right),$$

где коэффициент $\tilde{c}$, определенный в (21), равномерно по x_3: $0<\varepsilon<x_3<N<\infty$ ограничен.

При $n=3,4$ для $D_n(x,t)$ имеем $D_n(x,t)=$ $=\tilde{d}t^{-1.5}+\left|x_1x_3^{-2}\right|O\left(t^{-2}\right)$,

$$\tilde{d}=\frac{\pi^{-1.5}x_3^{-1}2^{0.5}\alpha^{0.5}}{\left(\alpha^2-\omega_0^2\right)^{0.5}}\sin(\pi/4+t\alpha)\left(\int_{-\infty}^{-\beta}+\int_{\beta}^{+\infty}\right)\times$$
$$\times\left(3-\beta^2\lambda^{-2}-3\beta^4\lambda^{-4}\right)\frac{\sin\left(x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}\right)}{x_3\sqrt{\lambda^2-\beta^2}}d\lambda.$$

Повторяя предшествующие выкладки, находим

$$D_n\left(x_1, x_3, t\right) \underset{(x_1,t)}{*} \psi\left(x_1, t\right) = \tilde{d}t^{-1.5} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \psi\left(y_1, \tau\right) d\tau dy_1 +$$

$$+\left(1+\left|x_1\right|\right) x_3^{-2} O(t^{-2}) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1+|z|\right) \psi\left(z, \tau\right) dz d\tau\right),$$

где коэффициент $\tilde{d}$ равномерно по x_3 : $0 < \varepsilon < < x_3 < N < \infty$ ограничен.

Отсюда, с учетом (5), (6) и (7), получаем утверждение теоремы 1.

Аналогично теореме 1 доказываются теоремы 2,3,4 и строятся асимптотики остальных компонент решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перова Л. В., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской, бегущей по дну волной // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, — № 1. — С. 136—143.

2. *Глушко А. В., Свиридова Е. Н.* Оценка поведения при $t \to \infty$ решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве // Труды математического факультета, 2007, — № 11. — С. 35—48.

3. *Свиридова Е. Н.* Асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 1 // Вест. ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2009. — № 1. — С. 150—158.

4. *Глушко А. В.* Асимптотические методы в задачах гидродинамики. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003. — 300 с.

5. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

6. *Глушко А. В., Щербатых В. Е.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи типа Неймана для системы уравнений движения вращающейся жидкости. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 1984. — 60 с.

7. *Глушко А. В., Карев А. Н.* О существовании, единственности и асимптотике по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 1984. — 60 с.

8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — Изд. 4-е. — 512 с.

Свиридова Елена Николаевна — аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета ВГУ

Тел.: (4732) 460-001, 8-952-554-17-51

E-mail: slena13@mail.ru

Sviridova Elena N. — Voronezh State University, Department of Mathematics, Chair of Partial Differential Equations and Probability Theory, Post-graduate student

Tel.: (4732) 460-001, 8-952-554-17-51

E-mail: slena13@mail.ru