УДК 517.5

О МУЛЬТИВСПЛЕСКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

И. Я. Новиков, П. Г. Северов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2009 г.

Аннотация. В статье вводятся непрерывное и двоичное мультивсплесковые преобразования. Рассматривается условие допустимости. Доказана теорема о восстановлении сигнала по его разложению по мултивсплескам, а также аналоги ряда других теорем теории всплесков.
Ключевые слова: мультивсплеск, мультимасштабирующая функция, кратномасшабный анализ размерности r, непрерывное мультивсплесковое преобразование, двоичное мультивсплесковое преобразование.

Abstract. In the paper continuous and dyadic multiwavelet transforms are defined. The authors consider admissibility condition. The theorem about signal reconstruction from its multiwavelet decomposition and analogs of other theorems from theory of wavelets are proved.
Key words: multiwavelet, multiscaling function, multiresolution analysis of multiplicity r, continuous multiwavelet transform, dyadic multiwavelet transform.

ВВЕДЕНИЕ

Наряду, с уже ставшей классической, теорией всплесков (скалярный случай), развивается теория мультивсплесков, в которой вместо одной функции — всплеска, рассматривается вектор-функция — мультивсплеск. В рамках этой теории, для мультивсплесков можно получить ряд желаемых свойств, таких, как симметрия, гладкость, заключение носителя в интервал малой длины, что для скалярного случая сделать сложнее. Основные достижения в этой области представлены в книге [1]. Авторами не было обнаружено для теории мультивсплесков непрерывного и двоичного преобразований. Нет сомнения в том, что это важные моменты в развивающейся теории. В данной работе рассматриваются эти преобразования и доказываются аналоги важных теорем скалярного случая [2] на случай мультивсплесков.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Теория мультивсплесков связана с действительными вектор-значными функциями. В дальнейшем вектора будем обозначать жирным шрифтом.

Рассмотрим следующие пространства [3]:

$$L^2(\mathbb{R})^r = \{\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{r-1})^T : f_i \in L^2(\mathbb{R}), i = 0, \dots, r-1\};$$

$$l^2(\mathbb{Z})^r = \{\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_k\}_{k \in Z} = (c_0, c_1, \dots, c_{r-1})^T : c_i = \{c_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}), i = 0, \dots, r-1\}.$$

Нормы этих пространств определяются следующим образом:

$$\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})^r} = \sum_{i=0}^{r-1} \|f_i\|^2_{L^2(R)} = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{\mathbb{R}} |f_i(x)|^2 \, dx,$$

$$\|\mathbf{c}\|^2_{l^2(\mathbb{Z})^r} = \sum_{i=0}^{r-1} \|c_i\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_i^k|^2.$$

Пусть H — квадратная комплексно-значная матрица, тогда обозначим $|H|^2 = HH^*$, где $*$ обозначает транспонирование матрицы и взятие комплексного сопряжение каждого ее элемента.

Преобразование Фурье функции $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R})^r$ — вектор преобразования Фурье каждого компонента:

$$\hat{\mathbf{f}}(\omega) = (\hat{f}_0(\omega), \dots, \hat{f}_{r-1}(\omega))^T = \left(\int_{\mathbb{R}} f_0(t) e^{-i\omega t} dt, \dots, \int_{\mathbb{R}} f_{r-1}(t) e^{-i\omega t} dt \right)^T.$$

Носитель функции g определяется как замыкание множества

$$\{x : g(x) \neq 0\}.$$

Носитель вектор-функции $\mathbf{f}$ определяется как

$$\operatorname{supp} \mathbf{f} = \bigcup_k \operatorname{supp} f_k.$$

МУЛЬТИМАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

Определение 1. *Вектор-функция*

$$\phi = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{r-1})^T, \tag{1}$$

где

$$\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{r-1} \in L_1 \cap L_2$$

называется мультимасштабирующей, если она удовлетворяет мультимасштабирующему уравнению

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_k H_k \phi(2t-k),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где

$$H_k = \begin{pmatrix} h_{00}^{(k)} & h_{01}^{(k)} & \cdots & h_{0(r-1)}^{(k)} \\ h_{10}^{(k)} & h_{11}^{(k)} & \cdots & h_{1(r-1)}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{(r-1)0}^{(k)} & h_{(r-1)1}^{(k)} & \cdots & h_{(r-1)(r-1)}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

коэффициенты мультимасштабирующего уравнения.

Определение 2. *Количество компонент в мультимасштабирующей вектор-функции будем называть размерностью соответствующей вектор-функции и обозначать*

$$r = \dim(\phi).$$

Мультимасштабирующая вектор-функция ϕ называется ортогональной если

$$\int \phi(x)\phi(x-k)^* dx = \delta_{0k} I,$$

где результат интегрирования есть матрица размера $r \times r$.

В формуле (2) мы имеем счетное число коэффициентов. Будем предполагать в дальнейшем, что ϕ_i имеет компактный носитель для всех $i = 0,\dots,r-1$. В этом случае число ненулевых коэффициентов будет финитным.

Определение 3. *Маской мультимасштабирующего уравнения назовем матрицу состоящую из тригонометрических полиномов*

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=k_0}^{k_1} H_k e^{-\mathbb{I}k\xi}. \tag{4}$$

Преобразование Фурье мультимасштабирующего уравнения можно записать в следующем виде

$$\hat{\phi}(\xi) = H(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2), \tag{5}$$

Теорема 1. *Необходимым условием ортогональности является равенство*

$$\sum_k H_k H_{k-2l}^* = \delta_{0l} I \tag{6}$$

или что эквивалентно

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\pi)|^2 = I. \tag{7}$$

КМА И МУЛЬТИВСПЛЕСКИ

Определение 4. *Кратномасштабным анализом размерности r называется последовательность вложенных замкнутых подпространств $L^2(\mathbb{R})$*

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots,$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(R)$;

2. $\bigcap_j V_j = \{0\}$;

3. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$;

4. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - \frac{k}{2^j}) \in V_j$ *для всех* $j,k \in \mathbb{Z}$;

5. Существует вектор функция $\phi = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{r-1})^T$ *такая, что*

$$\{\phi_l(\cdot - k) : l = 0,\dots,r-1,\ k \in \mathbb{Z}\} \tag{8}$$

образуют базис Рисса в пространстве V_0, т.е. существуют две константы A и B, где $0 < A \le B < \infty$, такие, что

$$A\|\mathbf{c}\|_{l^2(\mathbb{Z})^r}^2 \le \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=0}^{r-1} c_i^k \phi_i(\cdot - k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le B\|\mathbf{c}\|_{l^2(\mathbb{Z})^r}^2$$

для любой последовательности $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \in l^2(\mathbb{Z})^r$.

Вектор-функция ϕ называется мультимасштабирующей. Если (8) образует ортогональный базис, КМА называется ортогональным.

Из свойств определения (4) следует, что пространство V_j имеет вид:

$$V_j = \overline{\operatorname{span}\{2^{j/2}\phi_i(2^j \cdot - k) : 0 \le i \le r-1, k, j \in \mathbb{Z}\}}.$$

Ортогональный проектор произвольной функции $f \in L^2$ на V_n определяется формулой в векторном виде

$$P_n f(x) = \sum_k \langle f, \phi_{nk}\rangle \phi_{nk}(x),$$

где $\phi_{nk}(x) = (2^{n/2}\phi_0(2^n x - k), 2^{n/2}\phi_1(2^n x - k), \cdots, 2^{n/2}\phi_{r-1}(2^n x - k))^T$, либо, если записать поэлементно

$$P_n f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{r-1} \alpha_{j,n,k}\phi_{j,n,k}(x),$$

где

$$\alpha_{j,n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,n,k}(x) f(x) dx,$$

$$\phi_{j,n,k}(x) = 2^{n/2}\phi_j(2^n x - k).$$

$P_n f$ называется приближением f в масштабе 2^{-n}.

Лемма 1. *Для любой $f \in L^2, P_n f \to f$ в L^2 при $n \to \infty$*

Доказательство этой леммы аналогично скалярному случаю.

Пусть

$$Q_n f(x) = P_{n+1} f(x) - P_n f(x)$$

Q_n — ортогональный проектор на замкнутое подпространство, которое мы обозначим W_n. Пространство W_n — ортогональное дополнение V_n до V_{n+1}, а V_{n+1} — прямая сумма V_n и W_n

$$V_{n+1} = V_n \oplus W_n.$$

Также как и в скалярном случае можно записать

$$V_n = \bigoplus_{k=-\infty}^{n-1} W_k.$$

Последовательность пространств W_n удовлетворяет условиям подобным условиям из определения (4).

Теорема 2. *Для ортогонального КМА размерности r с мультимасштабирующей функцией $\phi = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{r-1})^T$ имеют место следующие свойства:*

1. $\overline{\oplus W_j} = L^2(\mathbb{R})$;

2. $W_k \perp W_j$ если $k \neq n$;

3. $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

4. $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x - \frac{k}{2^j}) \in W_j$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}$;

5. Существует вектор функция $\psi = (\psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_{r-1})^T \in L^2(\mathbb{R})^r$ ортогональная ϕ такая, что

$$\{\psi_l(\cdot - k) : l = 0, \ldots, r-1, k \in \mathbb{Z}\} \qquad (9)$$

образуют базис Рисса в пространстве W_0.

Теорема (2) доказана в [1].

Так как $\psi_i \in V_1$ для всех $i = 0, \ldots, r-1$ можно записать

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k G_k \phi(2x - k), \qquad (10)$$

где G_k матричные коэффициенты

$$G_k = \begin{pmatrix} g_{00}^{(k)} & g_{01}^{(k)} & \cdots & g_{0(r-1)}^{(k)} \\ g_{10}^{(k)} & g_{11}^{(k)} & \cdots & g_{1(r-1)}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{(r-1)0}^{(k)} & g_{(r-1)1}^{(k)} & \cdots & g_{(r-1)(r-1)}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Либо поэлементно для каждого $l = 0, \ldots, r-1$

$$\psi_l(t) = \sqrt{2} \sum_k g_{l0}^{(k)} \phi_0(2t - k) +$$
$$+ g_{l1}^{(k)} \phi_1(2t - k) + \cdots + g_{l(r-1)}^{(k)} \phi_{(r-1)}(2t - k).$$

Определение 5. *Вектор функция ψ из теоремы (2) называется мультивсплеском размерности r.*

Построение мультивсплеска, в отличии от скалярного случая, несколько сложнее. Более того, для одной мультимасштабирующей функции можно получить несколько мультивсплесков, т.е. построение мультивсплеска неоднозначно.

Для мультивсплеска ψ запишем

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=k_0}^{k_1} G_k e^{-\mathbb{I} k \xi}. \qquad (11)$$

Взяв преобразование Фурье от обоих частей уравнения (10) получим

$$\hat{\psi}(\xi) = G(\xi / 2) \hat{\phi}(\xi / 2) \qquad (12)$$

Теорема 3. *Ортогональность ϕ и ψ означает*

$$\sum_k H_k H_{k-2l}^* = \delta_{0l} I, \qquad (13a)$$

$$\sum_k G_k G_{k-2l}^* = \delta_{0l} I, \qquad (13b)$$

$$\sum_k H_k G_{k-2l}^* = \sum_k G_k H_{k-2l}^* = 0, \qquad (13c)$$

что эквивалентно

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = I, \qquad (14a)$$

$$|G(\xi)|^2 + |G(\xi + \pi)|^2 = I, \qquad (14b)$$

$$H(\xi) G(\xi)^* + H(\xi + \pi) G(\xi + \pi)^* = 0, \qquad (14c)$$

$$G(\xi) H(\xi)^* + G(\xi + \pi) H(\xi + \pi)^* = 0. \qquad (14d)$$

Относительно мультивсплесковой функции проектор Q_n можно записать

$$Q_n f(x) = \sum_k \langle f, \psi_{nk} \rangle \psi_{nk}(x),$$

где

$$\psi_{nk}(x) = (2^{n/2} \psi_0(2^n x - k), 2^{n/2} \psi_1(2^n x - k), \cdots,$$
$$2^{n/2} \psi_{r-1}(2^n x - k))^T$$

либо, если записать поэлементно

$$Q_n f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j,n,k} \psi_{j,n,k}(x),$$

где

$$\beta_{j,n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,n,k}(x) f(x) dx,$$

$$\psi_{j,n,k}(x) = 2^{n/2} \psi_j(2^n x - k).$$

НЕПРЕРЫВНОЕ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Определение 6. *Непрерывным мультивсплесковым преобразованием назовем совокупность сверток*

$$\{(f * \overline{\psi}_0^s)(\xi), (f * \overline{\psi}_1^s)(\xi), \cdots, (f * \overline{\psi}_{r-1}^s)(\xi)\}, \qquad (15)$$

где $f \in L_2$ и $\overline{\psi}_i^s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_i^*(\frac{-t}{s})$.

Для сверток имеем

$$W_i f(\xi, s) = (f * \overline{\psi}_i^s)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_R f(t) \psi_i^* \left(\frac{t - \xi}{s} \right) dt, \qquad (16)$$

где $s \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R})^r$ вещественная вектор-функция, такая что*

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\left|\widehat{\psi_i}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega < \infty, \qquad (17)$$

Тогда любая $f \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет равенствам

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} W_i f(\xi, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_i\left(\frac{t-\xi}{s}\right) d\xi \frac{ds}{s^2}, \qquad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |W_i f(\xi, s)|^2\, d\xi \frac{ds}{s^2}. \qquad (19)$$

Доказательство. Докажем сначала (18). Обозначим правую часть за $b(t)$. Заменим подынтегральное выражение на свертку

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} W_i f(\cdot, s) * \psi_i^s(t) \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} f * \bar{\psi}_i^s * \psi_i^s(t) \frac{ds}{s^2}, \end{aligned} \qquad (20)$$

где $\psi_i^s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_i(\frac{t}{s})$.

Для доказательства (18) покажем равенство преобразований Фурье $\hat{b} = \hat{f}$.

$$\begin{aligned} \hat{b}(\omega) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \hat{f}(\omega) \sqrt{s} \hat{\psi}_i^*(s\omega) \sqrt{s} \hat{\psi}_i(s\omega) \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{\hat{f}(\omega)}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |\hat{\psi}_i(s\omega)|^2 \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

Замена переменных $\xi = s\omega$ приводит к равенству

$$\hat{b}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{|\breve{\psi}_i(\xi)|^2}{\xi} d\xi = \hat{f}(\omega).$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\left|\hat{\psi}_i(\omega)\right|^2 = \left|\hat{\psi}_i(-\omega)\right|^2$, в силу того, что ψ_i — вещественные функции. Теперь покажем истинность (19). Применяем равенство Планшереля

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} |W_i f(\xi, s)|^2\, d\xi \frac{ds}{s^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \left|\hat{f}(\omega) \sqrt{s} \hat{\psi}_i^*(s\omega)\right|^2 d\omega \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

Меняем порядок интегрирования, делаем замену переменных во внутреннем интеграле, как при доказательстве предыдущей формулы и еще раз, применив формулу Планшереля, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\left|\hat{\psi}_i(\xi)\right|^2}{\xi} d\xi d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Неравенство

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\left|\hat{\psi}_i(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

называется условием допустимости. Для того, чтобы этот интеграл был конечным, мы должны обеспечить равенство $\hat{\psi}_i(0) = 0$.

Заметим также, что

$$\int_{-\infty}^{0} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\left|\hat{\psi}_i(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\left|\hat{\psi}_i(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega.$$

ДВОИЧНОЕ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Определим двоичное непрерывное мультивсплесковое преобразование, пологая масштабный параметр s равным двоичной последовательности $\{2^j\}_{j \in Z}$. В результате получим для для каждого $i = 0, \ldots, r-1$ последовательность функций

$$\begin{aligned} W_i f(\xi, 2^j) &= (f * \bar{\psi}_i^{2^j})(\xi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_R f(t) \psi_i^*\left(\frac{t-\xi}{2^j}\right) dt. \end{aligned} \qquad (21)$$

Теорема 5. Если существуют две константы A и B, такие, что, для всех $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \left|\hat{\psi}_i(2^j \omega)\right|^2 \le B, \qquad (22)$$

тогда

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} 2^j \left\|W_i f(\xi, 2^j)\right\|^2 \le B\|f\|^2. \qquad (23)$$

Доказательство. Обозначим

$$f_i^j(\xi) = W_i f(\xi, 2^j).$$

Из преобразования Фурье (21) относительно ξ следует

$$\hat{f}_i^j(\omega) = \sqrt{2^j}\, \hat{\psi}_i^{\,*}(2^j \omega) \hat{f}(\omega). \qquad (24)$$

Умножим (22) на $\left|\hat{f}(\omega)\right|^2$

$$A\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \left|\hat{\psi}_i(2^j \omega)\right|^2 \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \le B\left|\hat{f}(\omega)\right|^2.$$

Применяем (24)

$$A\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\sqrt{2^j}\left|\hat{f}_i^j(\omega)\right|^2 \le B\left|\hat{f}(\omega)\right|^2.$$

Интегрируем по ω

$$\int A\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \le$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\int\sqrt{2^j}\left|\hat{f}_i^j(\omega)\right|^2 d\omega \le \int B\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

И наконец применив равенство Парсеваля, получим

$$2\pi A\int\left|f(\xi)\right|^2 d\xi \le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{2\pi}{\sqrt{2^j}}\int\left|f_i^j(\xi)\right|^2 d\xi \le$$

$$\le 2\pi B\int\left|f(\xi)\right|^2 d\xi;$$

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{r-1}2^j\left\|W_i f(\xi,2^j)\right\|^2 \le B\|f\|^2.$$

Теорема (5) доказывает, что если частотная ось полностью покрывается растянутыми двоичными преобразованиями Фурье мультивсплесков, то это обеспечивает полное и устойчивое представление.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keinert Fritz* Wavelet and Multiwavelet, Chapman & Hall/CRC, 2004.

2. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005. — 671 с.

3. *Cotronei M., Montefusco L. B., Puccio L.* Multiwavelet Analysis and Signal Processing, IEEE Trans. on Circuits and Systems II, Mol. 45, P. 970—987.

Новиков Игорь Яковлевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета

Тел.: (4732) 208-771

E-mail: igor.nvkv@gmail.com

Северов Павел Григорьевич — преподаватель кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета

Тел.: (4732) 208-771

E-mail: severovpg@gmail.com

Novikov Igor Yakovlevich — doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University.

Phone: (4732) 208-771

E-mail: igor.nvkv@gmail.com

Severov Pavel Grigorievich — teacher of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University

Phone: (4732) 208-771

E-mail: severovpg@gmail.com