УДК 517.9

ГЛАДКИЕ МОДЕЛИ УПОРА И ЛЮФТА

Нгуен Тхи Хиен

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.09.2009 г.

Аннотация. Для гистерезисных преобразователей упора и люфта предложены гладкие модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром. Получены оценки близости выходных функций для гладких и классических дискретных моделей через модуль непрерывности непрерывной входной функции.
Ключевые слова: упор, люфт, модуль непрерывности, гладкая модель.

Abstract. For hysteresis converters of a support and gap smooth models in the form of the ordinary differential equations with the great parameter are offered. Estimations of closeness of output functions for smooth and classical discrete models through the continuity module of continuous entrance function are received.
Key words: support, gap, continuity module, smooth model.

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии М. А. Красносельского и А. В. Покровского [1] дано следующее описание упора и люфта. Кусочно-гладкая *входная функция* $x(t)$ $(t \geq t_0)$ преобразуется в *выходные упора функцию* $\varphi(t)$ *и люфта функцию* $\psi(t)$, определяемые соотношениями: *

$$\dot{\varphi} = \tau_\varphi \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}, & \text{если } \varphi \in (0,1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 0; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi \in (x, x+1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x+1. \end{cases} \tag{2}$$

В [1] (с. 111) доказано, что при заданном начальном условии решения дифференциального уравнения (1) и (2) существуют и единственны. Под решением любого из этих уравнений понимается локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая ему почти всюду. Из доказанных в [1] свойств люфта и упора (лемма 2.2 на с. 16, формула (16.25) на с. 111) вытекает, что соответствия $x \mapsto \psi$ и $x \mapsto \varphi$ при фиксированных начальных значениях выходов удовлетворяют в норме пространства C условию Липшица с константами, соответственно, 1 и 2. Поэтому определения этих операторов распространяются по непрерывности на любые непрерывные входы.

2. ГЛАДКИЕ МОДЕЛИ

Для непрерывной на $[t_0, t_0 + T]$ функции $x(t)$ определим «сглаженную» входную функцию $\xi(t)$ соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = K\left[x(t) - x(t - \frac{1}{K})\right], \\ \xi(t_0) = x(t_0) =: x_0 \end{cases} \tag{3}$$

(при $t < t_0$ полагаем $x(t) = x(t_0)$).

Мы дадим новые определения упора и люфта, которые будем называть *гладкими* — в отличие от приведенных выше *классических* определений из [1]. Именно, гладкие выходные функции упора $u(t)$ и люфта $v(t)$, соответствующие непрерывному входу $x(t)$ и (большому) параметру K, зададим уравнениями:

$$\dot{u} = \dot{\xi} + K\left[(-u(t))_+ - (u(t) - 1)_+\right], \tag{4}$$

$$\dot{v} = K\left[(\xi(t) - v(t))_+ - (v(t) - 1 - \xi(t))_+\right]. \tag{5}$$

Здесь $\xi = \xi(t)$ — определенная выше «сглаженная» входная функция; x_+ — положительная часть числа x, т.е. $\max\{0, x\}$.

Цель данной работы — найти оценки разностей между выходами гладких и классических моделей, и, тем самым, оценить скорость сходимости гладких выходов к классическим при $K \to +\infty$.

3. ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ВЫХОДОВ УПОРА С ГЛАДКИМ ВХОДОМ

Пусть $y(t)$ есть гладкая (точнее, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая) на $\left[t_0, t_0 + T\right]$ функция. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot{\bar{u}} = \dot{y} + K\left[\left(-\bar{u}(t)\right)_+ - \left(\bar{u}(t) - 1\right)_+\right]. \qquad (6)$$

Оно определяет *гладкий* выход упора при гладком входе. Докажем следующее утверждение. Пусть $\bar{\varphi}(t)$ — классический выход упора, отвечающий входу $y(t)$ и начальному условию $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{u}(t_0) =: u_0$.

Лемма. *Для каждого* $K > 0$ *на* $\left[t_0, t_0 + T\right]$ *выполнено неравенство*

$$\left|\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)\right| \le \frac{C}{K}, \qquad (7)$$

где $C = \sup\limits_{[t_0, t_0+T]} \left|\dot{y}(t)\right|$.

Доказательство. При $C = 0$ соотношение (7) выполнено, так как выходные функции тождественно совпадают с их начальными значениями. Поэтому будем впредь считать, что $C > 0$. Предположим, что (7) выполнено не для всех $\left[t_0, t_0 + T\right]$. Тогда существуют такие $t_1 \in \left[t_0, t_0 + T\right]$ и $\delta > 0$, что

$$\left|\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1)\right| = C / K, \qquad (8)$$

$$\left|\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)\right| > C / K \ \text{ при } \ t \in \left(t_1, t_1 + \delta\right). \qquad (9)$$

Если $\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = C / K$, то в силу непрерывности функций $\bar{u}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ на $\left[t_0, t_0 + T\right]$ и положительности C неравенство (9) записывается в следующем виде

$$\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t) > C / K \ \text{ при } \ t \in \left(t_1, t_1 + \delta\right). \qquad (10)$$

Будем доказывать, что в тех точках $t \in \left(t_1, t_1 + \delta\right)$, в которых $\bar{\varphi}(t)$ удовлетворяет (1), верно неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)\right) \le 0. \qquad (11)$$

Из (10) непосредственно следует, что $\bar{u}(t) > 0$ на $\left(t_1, t_1 + \delta\right)$. Если $\bar{u}(t) \in \left(0, 1\right]$, то из (10) вытекает, что в данной точке $\bar{\varphi}(t) \in \left[0, 1\right)$. Тогда из (1) и (6) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\varphi} \in (0,1); \\ \dot{y} - \max\left\{0, \dot{y}\right\}, & \text{если } \bar{\varphi} = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

(здесь и в дальнейшем для краткости иногда вместо $\bar{\varphi}(t)$ пишем $\bar{\varphi}$). Отсюда непосредственно получается неравенство (11). Если $\bar{u}(t) > 1$, то из (1) и (16) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t)\right) = \begin{cases} -K\left(\bar{u}(t) - 1\right), & \text{если } \bar{\varphi} \in (0,1); \\ \dot{y} - K\left(\bar{u}(t) - 1\right) - \max\left(0, \dot{y}\right), & \text{если } \bar{\varphi} = 0; \\ \dot{y} - K\left(\bar{u}(t) - 1\right) - \min\left(0, \dot{y}\right), & \text{если } \bar{\varphi} = 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Поэтому нетрудно видеть, что неравенство (11) верно в случае, когда $\bar{\varphi} \in \left[0, 1\right)$. Если $\bar{\varphi} = 1$, то из (10) следует, что $\bar{u}(t) - 1 > C / K$. Тогда

$$\dot{y} - K\left(\bar{u}(t) - 1\right) - \min\left(0, \dot{y}\right) < \\ < \dot{y} - C - \min\left(0, \dot{y}\right) \le 0,$$

т.е. (11) верно и в случае, когда $\bar{\varphi} = 1$.

Из справедливости (11) и (8) непосредственно следует, что на $\left(t_1, t_1 + \delta\right)$

$$\bar{u}(t) - \bar{\varphi}(t) \le \bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = C / K,$$

тем самым получено противоречие с (9).

Если $\bar{u}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1) = -C / K$, то неравенство (9) записывается в следующем виде:

$$\bar{\varphi}(t) - \bar{u}(t) > C / K \ \text{ при } \ t \in \left(t_1, t_1 + \delta\right).$$

Дальше, аналогично, можно доказать, что при $t \in \left(t_1, t_1 + \delta\right)$ будет верно неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\varphi}(t) - \bar{u}(t)\right) \le 0$$

(если в точке t $\bar{\varphi}$ удовлетворяет (1)). Отсюда следует противоречие с (9).

Лемма доказана.

4. ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ВЫХОДОВ УПОРА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВХОДОМ

Обозначим через $\xi_i(t)$ $\left(i = 1,\ 2\right)$ сглаженные входные функции (3), соответствующие параметрам K_1 и K_2; $\varphi_i(t)$ — решения уравнения (1), в котором $\dot{x}$ заменено на $\dot{\xi}_i$, с начальным условием $\varphi_i(t_0) = u_0$. В силу леммы нетрудно видеть, что с начальным условием $u_i(t_0) = u_0$ для решения $u_i(t)$ $\left(i = 1,\ 2\right)$ уравнения (4), в котором параметр K принимает значение K_i, верно следующее неравенство:

$$\left|u_i(t) - \varphi_i(t)\right| \le \frac{\sup\left\{\left|\dot{\xi}_i(t)\right| : t \in \left[t_0, t_0 + T\right]\right\}}{K_i}. \qquad (14)$$

Если *модуль непрерывности* $\omega(x, \delta)$ определяется равенством

$$\omega(x, \delta) = \sup\left\{\left|x(t') - x(t'')\right| : \left|t' - t''\right| \le \delta\right\}, \qquad (15)$$

то из (14) следует, что

$$\left|u_i(t)-\varphi_i(t)\right| \le \omega\left(x, \frac{1}{K_i}\right). \qquad (16)$$

Воспользуемся упоминавшимся выше известным фактом, что оператор упора (1) удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 2, т.е. при $t \in \left[t_0, t_0+T\right]$

$$\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right| \le 2\left\|\xi_1-\xi_2\right\|. \qquad (17)$$

Далее, оценим близость $\xi_i(t)$ к $x(t)$ с помощью модуля непрерывности: из определения функции $\xi_i(t)$ как решения задачи (3) следует, что при $t \in \left[t_0, t_0+T\right]$

$$\xi_i(t) = x(t_0) + K_i\int_{t_0}^{t} x(s)ds - K_i\int_{t_0-1/K_i}^{t-1/K_i} x(s)ds =$$

$$= K_i\int_{t-1/K_i}^{t} x(s)ds$$

и, следовательно,

$$\xi_i(t)-x(t) = K_i\int_{t-1/K_i}^{t}\left[x(s)-x(t)\right]ds.$$

Отсюда непосредственно следует, что при $t \in \left[t_0, t_0+T\right]$

$$\left|\xi_i(t)-x(t)\right| \le \omega\left(x, \frac{1}{K_i}\right). \qquad (18)$$

В силу (18) неравенство (17) записывается в следующем виде:

$$\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right| \le 2\omega(x, \frac{1}{K_1}) + 2\omega(x, \frac{1}{K_2}) \ . \qquad (19)$$

Из (16) и (19) следует, что

$$\left|u_1(t)-\varphi_2(t)\right| \le \left|u_1(t)-\varphi_1(t)\right| + \left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right| \le$$
$$\le 3\omega(x, \frac{1}{K_1}) + 2\omega(x, \frac{1}{K_2}). \qquad (20)$$

Если теперь значение $K_1 = K$ фиксировано и $K_2 \to +\infty$, то $\xi_2(t)$ равномерно на $\left[t_0, t_0+T\right]$ сходится к $x(t)$, а $\varphi_2(t)$ — к классическому выходу $\varphi(t)$ упора, соответствующему непрерывному входу $x(t)$. Отсюда и из (20) следует, что

$$\left|u(t)-\varphi(t)\right| \le 3\omega\left(x, \frac{1}{K}\right), \qquad (21)$$

где $u(t)$ есть решение уравнения (4), соответствующее параметру K и удовлетворяющее начальному условию $u(t_0) = u_0$.

5. ОЦЕНКА БЛИЗОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛЮФТА

Пусть $v_i(t)$ $(i = 1,\, 2)$ есть решение уравнения (5), в котором параметр принимает значение K_i, причем $v_i(t_0) = v_0$. Для каждого i положим $z_i(t) = v_i(t) - \xi_i(t)$, тогда

$$\dot z_i = -\dot\xi_i + K_i\left[\left(-z_i(t)\right)_+ - \left(z_i(t)-1\right)_+\right]. \qquad (22)$$

Это означает, что $z_i(t)$ есть гладкий выход упора, соответствующий гладкому входу $-\xi_i$, параметру K_i и начальному условию $z_i(t_0) = v_0 - x_0$. Если обозначим через $\bar\varphi_i(t)$ решение уравнения (1), в котором $\dot x$ заменено на $-\dot\xi_i$, с начальным условием $\bar\varphi_i(t_0) = v_0 - x_0$, то в силу леммы и (15) получим, что

$$\left|z_i(t)-\bar\varphi_i(t)\right| \le \frac{\sup\left\{\left|-\dot\xi_i(t)\right| : t \in \left[t_0, t_0+T\right]\right\}}{K_i} \le$$
$$\le \omega\left(x, \frac{1}{K_i}\right). \qquad (23)$$

Если $\psi_i(t) = \bar\varphi_i(t) + \xi_i(t)$, то $\psi_i(t)$ есть решение уравнения (2), в котором x заменено на ξ_i, с начальным условием $\psi_i(t_0) = v_0$. Это означает, что $\psi_i(t)$ является выходом люфта, отвечающим входу $\xi_i(t)$. Отсюда и из (23) следует, что

$$\left|v_i(t)-\psi_i(t)\right| = \left|z_i(t)-\bar\varphi_i(t)\right| \le \omega\left(x, \frac{1}{K_i}\right). \qquad (24)$$

Далее, в силу леммы 2.2 (см. [1] с.16 – 17) получим, что оператор люфта (2) удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 1. Отсюда и из неравенств (24), (18) следует, что при $t \in \left[t_0, t_0+T\right]$ будет верно

$$\left|v_1(t)-\psi_2(t)\right| \le \left|v_1(t)-\psi_1(t)\right| + \left|\psi_1(t)-\psi_2(t)\right| \le$$
$$\le 2\omega(x, \frac{1}{K_1}) + \omega(x, \frac{1}{K_2}). \qquad (25)$$

Если значение K_1 фиксировано и $K_2 \to +\infty$, то в пределе получается оценка

$$\left|v(t)-\psi(t)\right| \le 2\omega\left(x, \frac{1}{K}\right), \qquad (26)$$

где $v(t)$ есть гладкий выход люфта с параметром K и начальным значением v_0, а $\psi(t)$ — классический выход люфта с таким же начальным значением; в обоих случаях входом является непрерывная функция $x(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом, М., 1983.

2. *Прядко И. Н., Садовский Б.Н.* О локально явных моделях некоторых негладких систем, Автом. и телемех., 2004, № 10, С. 40—50.

Нгуен Тхи Хиен — аспирантка кафедры функционального анализа и операторных уравнений ВГУ
Тел.: (4732) 208-771
E-mail: kfa@math.vsu.ru

Nguyen Thi Hien — post-graduate student, chair of functional analysis and operator equations, Voronezh State University
Tel. (4732) 208-771
E-mail: kfa@math.vsu.ru