УДК 514; 517.5

АФФИННО-ОДНОРОДНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ 3-МЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТРАНСТВА*

А. В. Лобода

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
Воронежский государственный университет

Поступило в редакцию 15.09.2009 г.

Аннотация. В обзоре обсуждается задача полного описания класса однородных многообразий, обозначенного в заглавии. Излагается суть основного подхода, связанного с использованием канонических уравнений изучаемых многообразий. Описываются вспомогательные идеи и конструкции, позволяющие (в обозримой перспективе) получить полное решение изучаемой задачи. Приведено большое количество результатов, полученных в последние 10 лет и составляющих ядро ожидаемого решения.
Ключевые слова: комплексное пространство, аффинное преобразование, однородное подмногообразие, векторное поле, алгебра Ли, каноническое уравнение.

Abstract. The problem of complete description for the class of homogeneous manifolds signed in the title is considered in the survey. The essence of the main approach is stated that is connected with the using of the canonical equations of the manifolds under study. Auxiliary ideas and constructions are described that allow (in visible perspective) to get the full solution of the problem under investigation. The lot of results are cited that were obtained in the last 10 years and will constitute the core of the expected solution.
Keywords: complex space, affine transformation, homogeneous submanifold, vector field, Lie algebra, canonical equation.

ВВЕДЕНИЕ

В статье обсуждается задача описания одного класса однородных многообразий.

Отметим, что сходные по сути задачи ставились и решались математиками уже в конце XIX — начале XX веков. Например, описание аффинно-однородных кривых на плоскости было получено школой Бляшке [1]. Однородные относительно различных подгрупп аффинной группы поверхности 3-мерного вещественного пространства были описаны в середине 20-го века, и тогда же эти описания были включены в учебники по дифференциальной геометрии. Например, в книге [2] приведен «полный» список эквиаффинно однородных поверхностей пространства $\mathbb{R}^3$.

Задачи, связанные с однородностью, изучались также в развивающемся параллельно с геометрией многомерном комплексном анализе. Так, в 1932 г. Э. Картан построил в [3] полный список вещественных гиперповерхностей 2-мерных комплексных пространств, однородных относительно голоморфных преобразований. Отметим, что в голоморфной геометрии в отличие от аффинного случая понятие однородности оказывается существенно более локализованым и связанным не с группой глобально определенных преобразований, а лишь с псевдогруппой [4] локально определенных голоморфных отображений. Впрочем, сужение задачи за счет требования компактности изучаемых многообразий и соответствующих групп голоморфных преобразований позволяет и здесь получать глобально-классификационные результаты (см., например [5]).

Близость задач об аффинной и голоморфной однородности связана с тем, что в рамках боле сложной, голоморфной, задачи естественно выделяется класс аффинно-однородных многообразий, которые, разумеется, являются однородными и в голоморфном смысле. Однако возобновление исследований этого класса поверхностей по существу было начато лишь недавно, в связи с возрождением в конце XX века интереса к тематике однородности вложенных подмногообразий.

* Работа поддержана грантами НШ-3877.2008.1 и РФФИ-08-01-00743-а

В первую очередь этот интерес проявился в публикации большого числа работ по дифференциальной геометрии, посвященных однородности в «простейших» ее проявлениях и связанному с ней изучению различных инвариантных структур на вложенных многообразиях.

В этой связи можно назвать в первую очередь статьи об аффинной однородности и (несколько шире) книги по аффинной дифференциальной геометрии таких известных геометров, как А. П. Широков и П. А. Широков [6], Номидзу и Сасаки [7], [8], Б. Опозда [9], У. Саймон [10], представителей бельгийской дифференциально-геометрической школы [11], [12].

С появлением этих работ выяснилось, что «простые» задачи и их «известные» решения нуждаются в переосмыслении и проверке. Так, приведенный в [2] список поверхностей вещественного пространства $\mathbb{R}^3$, однородных относительно эквиаффинных преобразований, оказался [7] неполным. Однако поток публикаций этого времени, связанный прямо или косвенно с задачей построения полных списков аффинно однородных поверхностей 3-мерного вещественного пространства и написанных с позиций дифференциальной геометрии, эту задачу так и не решил.

Наряду с развитием аффинного направления в однородной тематике тогда же, в конце XX века, появлялись работы иного звучания. Так, алгебраическими (а не геометрическими!) средствами в работе [13] было получено полное описание аффинно однородных поверхностей 3-мерного вещественного пространства. Базируется решение этой задачи на описании всех матричных алгебр Ли, состоящих из вещественных квадратных матриц 3-го порядка. Опубликованы работы [14], [15] о проективной однородности вложенных подмногообразий. В интересной статье топологов Щепина, Скопенкова и Реповша [16] установлена гладкость подмногообразий $\mathbb{R}^n$, обладающих изначально лишь «слабой» формой однородности.

Тогда же автором настоящего обзора был предложен общий аналитический подход к изучению однородности гладких вложенных подмногообразий. Этот подход связан с каноническими (относительно заданного класса преобразований) уравнениями изучаемых объектов. Как показывают результаты, обсуждаемые ниже, он оказывается достаточно эффективным при изучении по общей схеме как аффинной, так и голоморфной однородности. Особенностью его применения в различных ситуациях является необходимость весьма кропотливой подготовительной проработки деталей. Однако, в целом этот подход оказывается полезным при изучении однородности относительно других классов преобразований и в других размерностях.

Настоящий обзор посвящен обсуждению результатов, полученных прежде всего этим методом в задаче, вынесенной в заголовок статьи. Подчеркивая главную роль подхода, связанного с использованием канонических уравнений, мы начинаем статью с введения канонических уравнений для вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. Далее обсуждается понятие аффинной однородности применительно к вещественным и комплексным пространствам и следует собственно описание результатов.

Заметим, что это описание тесно связано с обсуждением свойств алгебр Ли, соответствующих однородным поверхностям. Естественность использования техники алгебр Ли в задачах об однородности в настоящее время не вызывает никаких сомнений. Однако понятно, что с ростом размерности n изучение вещественных матричных подалгебр Ли алгебр $M(n,\mathbb{R})$ и $M(n,\mathbb{C})$ сильно усложняется. Поэтому нужны дополнительные идеи для решения поставленной задачи, например, в духе работы [13].

В настоящее время одним из самых эффективных инструментов в обсуждаемом круге вопросов является именно техника канонических уравнений (нормальных форм) изучаемых поверхностей. Приложение этой техники к описанию алгебр Ли (не всех вообще, а удовлетворяющих необходимым условиям изучаемой задачи) позволяет существенно продвинуться в построении классификации однородных многообразий.

В то же время отметим, что обсуждаемый случай 5-мерных вещественных гиперповерхностей, является, по-видимому, «граничным» между задачами об однородности, имеющими просто устроенные полные множества решений и аналогичными по формулировкам задачами, множества решений для которых практически необозримы. Такое положение изучаемой задачи не позволило пока получить ее полного решения. Однако, по мнению автора, в обзоре представлено достаточно полное описание всех возможных ситуаций с однородностью в рассматриваемом случае и методы получения окончательных решений в этих ситуациях.

Например, везде ниже обсуждаются только 5-мерные группы Ли (и алгебры Ли), связанные с изучаемыми однородными гиперповерхностями. Такая размерность не является единственно возможной в обсуждаемой задаче, как это следует, например, из работы [17]. В то же время увеличение размерности группы связано с нарушением так называемой общности положения поверхности. Один из случаев такого нарушения достаточно подробно описан в той же работе [17], а в обзоре акцент сделан на изучении других, более обширных случаев однородности, связанных в первую очередь с поверхностями общего положения.

Помимо обсуждения основной задачи в настоящей работе рассмотрены некоторые более простые модели, имеющие естественные связи с главной темой обзора, а также фрагмент задачи о голоморфной однородности для случая вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств.

§ 1. АФФИННЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ задана вещественно-аналитическая гиперповерхность M и выделена некоторая неособая точка на ней. За счет сдвига можно считать эту точку совпадающей с началом координат пространства $\mathbb{C}^3$. Уравнение M можно разрешить в этой точке относительно одной из вещественных переменных и записать его с использованием степенных рядов в форме

$$v = F(z,\bar{z},u) = \sum_{k,l,m\ge 0} F_{klm}(z,\bar{z})u^m. \qquad (1.1)$$

Здесь $z=(z_1,z_2), w$ — координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$, $u=\operatorname{Re} w$, $v=\operatorname{Im} w$, F_{klm} — однородный многочлен суммарной степени k по z и l по $\bar{z}$.

Отметим, что степенные ряды в традиционном «равновесном» виде для дальнейшего изложения менее удобны и естественны, чем предложенные в [18] весовые разложения аналитических функций. Будем считать, что переменные $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ имеют вес 1, а переменной u припишем вес 2. Веса отдельных мономов, построенных из переменных $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, u$, будем определять по естественному принципу сложения весов. Например, вес монома $z_1 u$ равен 3.

Выделяя в степенном разложении функции $F(z,\bar{z},u)$ однородные весовые компоненты, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$v = F(z,\bar{z},u) = F_0 + F_1(z,\bar{z},u) + F_2(z,\bar{z},u)... \quad (1.2)$$

Напомним, впрочем, что сдвигом осей координат мы уже добились равенства $F_0 \equiv 0$, а поворотом осей в уравнении (1.2) уничтожаются весовая компонента $F_1(z,\bar{z},u)$ и линейное по переменной u слагаемое из F_2.

Следовательно, уравнение поверхности M можно привести аффинным преобразованием к виду

$$v = H(z,\bar{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)} + \sum_{k\ge 3} F_k(z,\bar{z},u), \quad (1.3)$$

где $H(z,\bar{z})$ — эрмитова, $Q(z)$ — квадратичная формы, $F_k(z,\bar{z},u)$ — компонента однородности веса k.

Отметим, что простейшие преобразования уравнений, подобные описанным выше, часто используются в математике. Например, для вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{R}^3$ аналогичные приведения к «предварительному каноническому виду» описаны в [6].

Наша ближайшая задача — провести дальнейшие упрощения уравнения (1.3) за счет аффинных преобразований. Здесь, однако, общие обсуждения разделяются на случаи, связанные со свойствами эрмитовой формы $H(z,\bar{z})$ из (1.3).

Естественно выделить здесь 3 случая:

а) H положительно (или отрицательно) определена,

б) H — знаконеопределенная невырожденная форма,

в) H — вырожденная эрмитова форма.

Первый из этих случаев в многомерном комплексном анализе соответствует так называемым строго псевдо-выпуклым (СПВ) вещественным гиперповерхностям; в последнем случае изучаемую гиперповерхность называют вырожденной в смысле Леви; гиперповерхности, у которых форма H является знаконеопределенной (п.б), будем называть в дальнейшем *индефинитными* поверхностями.

Напомним, что условия а) — в) инвариантны относительно голоморфных (и, в частности, аффинных) преобразований.

Свойство однородности в голоморфном смысле для вырожденных вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств полностью изучено в недавней большой работе [19]. В частности, все такие поверхности оказываются сводимыми голоморфными преобразованиями либо к произведениям картановых однородных 3-мерных гиперповерхностей [3] на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, либо к аффинно-однородным (вырожденным) гиперповерхностям пространства $\mathbb{C}^3$.

Тем самым, в части вырожденных поверхностей обсуждаемая нами задача классификации не представляет интереса, и случай в) мы в дальнейшем обсуждать не будем.

В случае а) имеет место следующее утверждение [17].

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение вещественно-аналитической гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^3$, строго псевдо-выпуклой в некоторой своей точке, можно привести аффинными преобразованиями к виду*

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + (\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2) + \overline{(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)} + \sum_{k\geq 3} F_k(z,\overline{z},u). \tag{1.4}$$

При этом пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ вещественных неотрицательных чисел является аффинным инвариантом поверхности M.

Приведение к каноническому виду отдельной эрмитовой (положительно определенной) формы, присутствующее в теореме 1, представляет собой несложное упражнение из курса линейной алгебры. Основу приведенной теоремы составляет *одновременное* приведение к (какому-либо) каноническому виду пары форм, одна из которых является эрмитовой, а другая — квадратичной формой от двух комплексных переменных.

Задача о таком приведении изучалась в работе [20]. Однако, в ней приоритетной являлась квадратичная форма, тогда как с точки зрения комплексной многомерной геометрии более важной естественно считать именно эрмитову форму.

Случай б) индефинитных вещественных гиперповерхностей оказывается более интересным. Здесь справедлива полученная недавно в [21] теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть M — вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, заданная уравнением*

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (Q(z) + \overline{Q(z)}) + \sum_{k\geq 3} F_k(z,\overline{z},u). \tag{1.5}$$

Аффинным преобразованием пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющим начало координат и вид уравнения (1.5), форму $Q(z)$ можно привести к одному и только одному из следующих видов:

$$Q(z) \equiv 0; \tag{1.6}$$

$$Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2,\ \ \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0,\ \ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0; \tag{1.7}$$

$$Q(z) = \varepsilon z_1(z_1 + z_2),\ \ \varepsilon > 0 \ \text{ или } \ Q(z) = (z_1 + z_2)^2; \tag{1.8}$$

$$Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2,\ \ \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 > 0. \tag{1.9}$$

Опишем вкратце отдельные этапы доказательства более сложной теоремы 2 (теорема 1 доказывается аналогичным образом).

Во-первых, здесь мы уже считаем пару форм (H,Q) из уравнения (1.5) приведенной к состоянию, в котором знаконеопределенная форма $H = H(z,\overline{z})$ имеет вид

$$|z_1|^2 - |z_2|^2. \tag{1.10}$$

Далее, сохраняя полученный вид эрмитовой формы $H = H(z,\overline{z})$, можно преобразованием из группы $SU(1,1)$ довести коэффициенты квадратичной формы $Q(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ из пары (H,Q) до вещественного состояния. Возможность такой трансформации коэффициентов можно проверить непосредственно, но выкладки при этом оказываются достаточно тяжеловесными.

Отметим, что авторская идея М. С. Данилова использует вспомогательный переход от эрмитовой формы (1.10) к эквивалентной ей форме

$$H_1(z,\overline{z}) = i(z_1\overline{z}_2 - z_1z_2). \tag{1.11}$$

Такой переход выгоден превращением псевдо-унитарной группы $SU(1,1)$ в «более простую» группу $SL(2,R)$ вещественных матриц с единичным определителем, сохраняющих форму (1.11). Изящными рассуждениями в духе книги [22], заменяющими действия линейных преобразований на многочлены действиями соответствующих дробно-линейных преобразований на корни этих многочленов, несложно привести форму $Q(z)$ к требуемому положению корней.

Следующий этап доказательства теоремы 2 сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть дана пара форм (H,Q_R), где $H = H(z,\overline{z}) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ — эрмитова знаконеопределенная форма, $Q_R(z) = Az_1^2 + Bz_1z_2 + Cz_2^2$ — ненулевая квадратичная форма с вещественными коэффициентами A, B, C. С помощью* *линейного преобразования, сохраняющего* H, *форма* Q_R *приводится к одному из видов:*

1) при $|A+C| > |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2, \varepsilon_1 \ge 0, \varepsilon_2 \ge 0, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ne 0; \quad (1.12)$$

2) при $|A+C| = |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2), \quad (1.13)$$

где пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *удовлетворяет одному из 4-х условий:*

$$a)\ \varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0, \quad b)\varepsilon_2 > \varepsilon_1 = 0,$$
$$c)\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \ne 0, d)\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1;$$

3) при $|A+C| < |B|$

$$Q_{\mathbb{R}}(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2, \varepsilon_1 \ge 0, \varepsilon_2 > 0. \quad (1.14)$$

Эта лемма доказывается за счет применения к ненулевой форме $Q_{\mathbb{R}}(z)$ гиперболического поворота

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix},$$

сохраняющего эрмитову форму H при произвольных $\varphi \in \mathbb{R}$. В каждом из трех обсуждаемых случаев несложно подобрать подходящее значение аргумента φ, приводящее форму $Q_{\mathbb{R}}(z)$ к требуемому виду.

Завершающим моментом в доказательстве теоремы 2 являются незначительные уточнения, связанные, например, с возможностью изменить знак у формы $Q_R(z)$ за счет линейного преобразования $z_1 \to z_2, z_2 \to z_1, z_3 \to -z_3$ трехмерного комплексного пространства.

Определение 1. Уравнения (1.4) с произвольными неотрицательными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и (1.5) с формой $Q(z)$ одного из типов (1.6)—(1.9) будем называть *аффинными каноническими* уравнениями строго псевдо-выпуклой или, соответственно, индефинитной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$.

Замечание. Ненулевые квадратичные формы, сводимые линейными преобразованиями к типам (1.7)—(1.9) теоремы 2, в связи с леммой 1 и введенными в ней типами (1.12)—(1.14) естественно называть *эллиптическими*, *параболическими*, и *гиперболическими* соответственно.

§2. АФФИННАЯ ОДНОРОДНОСТЬ

Опираясь на введенные понятия аффинных канонических уравнений нам будет проще обсудить с разных точек зрения задачу описания однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, возможные подходы к ней и некоторые классы частных решений.

Напомним прежде всего некоторые определения.

2.1. ОДНОРОДНОСТЬ ВЛОЖЕННЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Определение 2. Многообразие M называется *однородным относительно некоторой группы* (преобразований) G, если эта группа транзитивно действует на M, то есть любую точку из M можно перевести в любую другую точку обсуждаемого многообразия подходящим преобразованием из группы G.

Отметим, что в литературе встречаются различные модификации приведенного определения. Например, удобным с технической точки зрения уточнением является требование, чтобы группа G изначально была группой Ли [23]. Другая крайность состоит в том, чтобы, наоборот, не требовать столь жесткой структуры, допуская в качестве G какое-либо семейство (псевдогруппу) преобразований. Обсуждению различий в таких определениях (а точнее, совпадению определений) для случая вещественных подмногообразий комплексных пространств повящена интересная работа [24].

Ниже мы также внесем некоторые уточнения в начальное определение 2.

В зависимости от ситуации интерес могут представлять:

а) различные многообразия, однородные относительно фиксированной группы,

б) различные группы, относительно которых является однородным фиксированное многообразие.

Пример 1. В качестве одного из простейших примеров однородных многообразий можно упомянуть единичную окружность S^1 в комплексной плоскости C с действующей на ней транзитивно группой поворотов.

Заметим, что в этом примере многообразие S^1 *вложено* в объемлющее пространство, а именно в $\mathbb{C}$; при этом поворот на произвольный угол φ как элемент группы преобразований определен не только на окружности, но и для всех точек плоскости.

Определение 3. Под однородностью вложенного многообразия понимается однородность относительно (заданной) группы преобразований объемлющего пространства.

Повороты являются аффинными преобразованиями плоскости. По этой причине окружность S^1 из расмотренного примера естественно назвать *аффинно-однородной кривой в плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Можно также называть S^1 многообразием, однородным относительно линейных (в вещественном или комплексном смысле) или ортогональных преобразований плоскости.

Поскольку элементы из фиксированной группы G преобразований пространства X, обладающие свойством сохранения какой-либо дополнительной структуры (например, подмногообразия M, вложенного в X), образуют подгруппу в G, естественно конкретизировать введенные определения следующим образом.

Определение 4. Пусть X — некоторое пространство с действующей на нем группой преобразований G, M — вложенное в X многообразие. M называется однородным относительно G, если в этой группе имеется подгруппа $H \subset G$, действующая транзитивно на M.

В наших дальнейших обсуждениях в качестве объемлющих пространств основными являются (аффинные) пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ с действующими на них аффинными группами преобразований $Aff(n,\mathbb{R})$ и $Aff(n,\mathbb{C})$ соответственно. Основной интересующий нас вопрос — описание всех аффинно-однородных (в смысле определений 2—4) вещественных гиперповерхностей этих пространств.

Отметим, что до сих пор обсуждаемые однородные многообразия без уточнений понимались как *глобальные* объекты. Ниже мы локализуем наш подход и будем изучать подмногообразия пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, *локально-однородные* относительно групп $Aff(n,\mathbb{R})$ и $Aff(n,\mathbb{C})$ соответственно.

Определение 5. Многообразие M, вложенное в $\mathbb{R}^n$ (соответственно, в $\mathbb{C}^n$), будем называть *локально-однородным* (относительно $Aff(n,\mathbb{R})$ или $Aff(n,\mathbb{C})$ соответственно) в некоторой своей точке p, если существует некоторая подгруппа Ли в $Aff(n,\mathbb{R})$ (соответственно в $Aff(n,\mathbb{C})$), действующая на M транзитивно *вблизи* точки p.

Такая локализация понятия однородности позволяет легко перейти от групп Ли к локальным группам Ли и, тем самым, к алгебрам Ли, связанным с соответствующими группами.

Ясно, что единственный рассмотренный пример (как и всякое «глобально» однородное многообразие) является локально однородным в каждой своей точке.

Достаточно легко построить полный (с точностью до аффинной эквивалентности) список всех плоских кривых, аффинно-однородных в локальном смысле определения 5. Например, известно такое утверждение (см. [6], а также [25]).

Предложение 1. *Любая плоская аффинно-однородная кривая аффинно эквивалентна вблизи произвольной своей точки какой-либо одной из следующего списка аффинно-различных кривых:*

$$1)\ y = x^s (-1 \le s < 1), \tag{2.1}$$

$2)\ y = \ln x,$

$3)\ y = x \ln x,$

$4)\ r = e^{a\varphi}$ (r — полярный радиус, φ — полярный угол, $a \ge 0$).

Можно привести много других форм этого утверждения и способов получения подобных результатов. Например, в [6] задача описания аффинно-однородных кривых на плоскости сводится к описанию решений (изучаемых в классических университетских курсах) автономных линейных систем ОДУ вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

(с не изменяющимися во времени матрицами A).

В зависимости от жордановой нормальной формы матрицы A любая интегральная кривая системы (2.2) (локально) аффинно-эквивалентна одной из кривых списка (2.1).

С точки зрения канонических уравнений ответ в этой же задаче об аффинно-однородных кривых в $\mathbb{R}^2$ выглядит (см., например, [26], [25]) не менее изящно. Все (односторонне выпуклые) аналитические кривые допускают локальные аффинные уравнения вида

$$y = x^2 \pm x^4 + bx^5 + ... (b \ge 0). \tag{2.3}$$

При этом любая аффинно-однородная кривая однозначно определяется знаком при x^4 и значением параметра b из уравнения (2.3). В целом множество всех однородных поверхностей «выстраивается» в виде двух лучей, соответствующих изменению b от нуля до бесконечности.

На одном луче при $0 \le b < 8/5$ располагаются логарифмические спирали, а степенными кривыми $y = x^s (1/2 < s < 1)$ накрыт интервал

$(8/5, \infty)$. Разделяет два этих множества кривая $y = x \ln x$.

На втором луче (отвечающем знаку «минус» при x^4 в уравнении (2.3)) располагаются оставшиеся степенные кривые, между которыми при $b = 2\sqrt{2}/5$ вклинивается кривая $y = e^x$ (или $y = \ln x$).

Ясно, однако, что с ростом размерности описание однородных многообразий сталкивается с гораздо большими трудностями. Наряду с упомянутыми геометрическими и аналитическими методами здесь на первый план выходит техника, связанная с алгебрами Ли.

2.2. АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Линейные векторные поля в пространстве $\mathbb{C}^3$, касательные к аффинно-однородной вещественной гиперповерхности M, образуют алгебру Ли. Эту алгебру можно рассматривать как совокупность инфинитезимальных преобразований, соответствующих транзитивному действию группы Ли G на обсуждаемом однородном многообразии.

Каждое линейное векторное поле в $\mathbb{C}^3$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + p)\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ +(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3 + s)\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ +(c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + q)\frac{\partial}{\partial z_3}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Факт касания таким полем обсуждаемой однородной поверхности M записывается в виде основного соотношения

$$\mathrm{Re}\{Z(\Phi)\}_{|M} = 0, \quad (2.5)$$

где $\Phi = \Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$ — вещественно-значная определяющая функция обсуждаемой поверхности.

Алгебру таких линейных полей удобно представлять в матричной форме, сопоставляя векторному полю (2.4) матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

При этом, как известно, скобке векторных полей соответствует скобка (коммутатор) матриц

$$[Z_1, Z_2] = Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1,$$

а размерность алгебры сохраняется.

Основой для получения значительной части излагаемых в этой статье результатов, послужило изучение алгебр Ли, состоящих из матриц вида (2.6) и удовлетворяющих основному соотношению (2.5). При этом использование именно канонических уравнений, введенных в §1, позволяет получать конструктивные выводы как об изучаемых алгебрах, так и о соответствующих этим алгебрам однородных поверхностях.

Пусть, например, однородная поверхность M задана каноническим уравнением (1.4) или (1.5)

$$v = F_2(z, \bar{z}) + \sum_{k \ge 3} F_k(z, \bar{z}, u),$$

где $F_2(z, \bar{z}) = H(z, \bar{z}) + Q(z) + \overline{Q(z)}$.

Отделяя в тождестве (2.5) компоненты младших весов, получим:

$$\text{Вес 0: } \mathrm{Re}\left(\frac{i}{2} q\right) = 0; \quad (2.7)$$

$$\text{Вес 1: } \mathrm{Re}\left(p \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + s \frac{\partial F_2}{\partial z_2} + \frac{i}{2}(a_{31}z_1 + a_{32}z_2)\right) = 0. \quad (2.8)$$

Первое из этих ограничений, т.е (2.7), означает, что коэфициент q из представления (2.4) или (2.6) произвольного векторного поля на M является вещественным числом.

Ясно, что вид соотношения (2.8) зависит от свойств невырожденной эрмитовой формы H, а в случае ее знаконеопределенности от типа квадратичной формы $Q(z)$ из канонического уравнения обсуждаемой поверхности. Более детально мы обсудим это соотношение в § 3.

Более громоздкие компоненты старших весов тождества (2.5) мы здесь не выписываем, но из них также можно получать конкретную информацию о свойстве однородности.

2.3. ТРУБКИ НАД АФФИННО-ОДНОРОДНЫМИ ОСНОВАНИЯМИ.

Большой класс аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ произвольной размерности n составляют так называемые трубчатые гиперповерхности (трубки) вида

$$M = \Gamma + i\mathbb{R}^n,$$

с однородными относительно вещественных аффинных преобразований основаниями $\Gamma \in \mathbb{R}^n$.

При этом, как отмечалось выше, список всех аффинно-однородных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ построен в работе [13]. Тем самым, имеется большое семейство многообразий, заданных достаточно простым явным образом и являющихся решениями обсуждаемой нами задачи. Отметим, однако, один важный момент, снижающий ценность семейства трубок в наших рассмотрениях.

Как известно (см., например, [27], [25]), трубки над двумя различными аффинно-однородными плоскими кривыми $y = e^x$ и $y = x^2$ локально голоморфно эквивалентны трехмерной сфере $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, и следовательно, друг другу. Аналогичные эфекты имеются и для трубок в трехмерном комплексном пространстве. Возможность или отсутствие (комплексной) аффинной эквивалентности трубок над аффинно-различными вещественными поверхностями никем пока не проверялись.

Это означает, что описание семейства аффинно-однородных подмногообразий 3-мерного комплексного пространства необходимо вести в терминах именно комплексной геометрии пространства $\mathbb{C}^3$. Средств более бедной вещественной геометрии пространства $\mathbb{R}^3$ для построения такого описания, вообще говоря, недостаточно.

Подходящим средством для решения обсуждаемой в обзоре задачи является именно техника канонических уравнений. Например, можно показать (по аналогии со случаем голоморфно-однородных поверхностей из [28]), что всякая аффинно-однородная гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$ однозначно определяется некоторым конечным («опорным») набором коэффициентов своего канонического уравнения. При этом для трубки над произвольной строго выпуклой поверхностью из пространства $\mathbb{R}^3$ оба параметра $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ из аффинного канонического уравнения (1.4) такой поверхности равны $1/2$. Это означает, что поверхность с парой инвариантов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, отличной от $(1/2, 1/2)$, заведомо отличается (в смысле аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$) от любой трубчатой гиперповерхности.

Тем самым, не отменяя необходимости изучения возможных случаев аффинной эквивалентности трубок над поверхностями из списка [13], понятие канонического уравнения позволяет отделять от них (и друг от друга) другие примеры (однородных) гиперповерхностей. Для этого достаточно зафиксировать различие в парах $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для двух изучаемых СПВ-гиперповерхностей. Аналогично обстоит дело и для индефинитных поверхостей.

Отметим, впрочем, что двух параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ для построения полной классификации аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ заведомо недостаточно. Это следует, например, из результатов §4 настоящей статьи, связанных с еще одним большим классом подмногообразий пространства $\mathbb{C}^3$, а именно, с *жесткими* гиперповерхностями.

2.4. ЖЕСТКОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Напомним, что гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^3$ называется жесткой, если она является цилиндрической в направлении одной из вещественных переменных объемлющего пространства. В уравнении такой поверхности отсутствует соответствующая переменная. На жесткой гиперповерхности M, заданной уравнением $v = F(z, \bar{z})$, имеется касательное к M векторное поле

$$Z = \frac{\partial}{\partial w}. \tag{2.9}$$

Сведение каким-либо преобразованием некоторой гиперповерхности M к жесткому виду означает, что одно из полей, касательных к M, «выпрямляется» и превращается в (2.6). При этом любое ненулевое голоморфное векторное поле

$$f_1(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ + f_2(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_2} + g(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial w}$$

в $\mathbb{C}^3$ можно (локально) выпрямить подходящим голоморфным преобразованием в силу несложно проверяемой разрешимости соответствующего уравнения в частных производных. Для гиперповерхности, к которой поле (2.7) было касательным, это означает приведение ее уравнения к жесткому виду.

Одно из отличий между аффинной и голоморфной геометриями в комплексных пространствах $\mathbb{C}^n$ заключается в том, что не любое линейное поле выпрямляется линейным преобразованием. Более того, имеются аффинно-однородные гиперповерхности, на которых ни одно касательное (линейное) поле не выпрямляется аффинными преобразованиями.

Пример 2. К таким поверхностям относится сфера

$$S^5 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^3, \quad (2.10)$$

для которой справедлив следующий легко проверяемый факт.

Предложение 2. *Уравнение (2.10) невозможно привести аффинными преобразованиями к жесткому виду.*

К настоящему времени в ходе исследований однородности сформировалась гипотеза о том, что предложение 2 относится к немногочисленным исключениям. Доказательство этой гипотезы пока не получено, но значительная часть аффинно-однородных гиперповерхностей пространств $\mathbb{C}^n$ действительно допускает сведение к жесткому виду. В качестве подтверждения можно сослаться на трубки над аффинно-однородными основаниями.

Везде далее мы будем обсуждать только жесткие аффинно-однородные гиперповерхности. Их изучение в следующих параграфах и построение в пространстве $\mathbb{C}^3$ гораздо более обширных по сравнению с трубками семейств однородных поверхностей показывает целесообразность именно такого акцента в задаче об однородности.

Отметим, впрочем, что ожидаемое вскоре завершение исследования не сводимых к жесткому случаю однородных поверхностей предполагается осуществить на той же самой основе коэффициентного подхода, общего для всей статьи.

Одной из продуктивных технических идей, разработанных в рамках этого подхода является конструкция, описываемая в следующем параграфе.

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Как отмечалось выше, элементы матриц (2.6) удовлетворяют большому количеству ограничений, вытекающих из условия (2.5). В частности из соотношения (2.8)вытекают следующие два утверждения.

Предложение 3. *Для СПВ-гиперповерхности M, заданной каноническим уравнением (1.4), коэффициенты линейных векторных полей на M подчиняются ограничениям:*

$$\begin{cases} a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p\right) \\ b = 2i\left(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

Предложение 4. *Пусть вещественно-аналитическая индефинитная гиперповерхность M задана каноническим уравнением (1.5) и $Q(z) \neq 0$. В зависимости от типа $Q(z)$ коэффициенты линейных векторных полей вида (2.4) на M подчиняются ограничениям:*

эллиптический тип

$$Q(z) = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2, \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p\right) \\ b = 2i\left(-\bar{s} + 2\varepsilon_2 s\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

параболический тип

$$Q(z) = (\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2)(z_1 + z_2),$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = 0 \ \text{или} \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)s\right) \\ b = 2i\left(-\bar{s} + 2\varepsilon_2 s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p\right) \end{cases} \quad (3.3)$$

гиперболический тип

$$Q(z) = \varepsilon_1(z_1^2 - z_2^2) + \varepsilon_2 z_1 z_2, \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 > 0:$$

$$\begin{cases} a = 2i\left(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 s\right) \\ b = 2i\left(-\bar{s} + 2\varepsilon_1 s + \varepsilon_2 p\right) \end{cases} \quad (3.4)$$

Условия (3.1)—(3.4) играют в наших обсуждениях очень важную роль. Будем обозначать их общим образом

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

и называть L-связками, имея в виду, что векторы $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ связаны здесь линейным (в вещественном смысле) соотношением.

Рассматривая далее только жесткие однородные поверхности и матрицы (2.6), удовлетворяющие условиям $a_{13} = a_{23} = 0$, естественно считать, что каждая из рассматриваемых алгебр содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

соответствующую векторному полю (2.9), т.е. $\partial / \partial w$.

Геометрически это требование означает в точности *жесткость* изучаемых поверхностей. Уравнение вида (1.3) жесткой поверхности не зависит от переменной $u = \operatorname{Re} w$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть для 5-мерной матричной алгебры h вида*

$$h=\left\{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad (3.7)$$

выполняются следующие условия:

1) h содержит матрицу (3.6);

2) вещественная линейная оболочка четвертых столбцов матриц h заметает 5-мерное вещественное подпространство в $\mathbb{C}^3$;

3) выполнено одно из условий (3.1)—(3.4) с нетривиальной парой $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, одной и той же для всех матриц из h.

Тогда существует единственная невырожденная в смысле Леви аффинно-однородная вещественная гиперповерхность канонического вида $M \in \mathbb{C}^3$, для которой алгебра h является матричной реализацией алгебры линейных векторных полей на M. При этом коэффициенты канонической квадратичной формы $Q(z)$ и (в случае индефинитной поверхности) тип этой формы определяются по алгебре в соответствии с правилами (3.1)—(3.4).

Для доказательства теоремы 3 заметим, что из замкнутости относительно скобки рассматриваемой алгебры линейных векторных полей в силу классической теоремы Фробениуса (см.[29]) следует интегрируемость этой алгебры.

В силу условия 2) соответствующее этой алгебре интегральное (однородное) многообразие, содержащее начало координат, имеет в этой точке (и, следовательно, вблизи нее) 5-мерное касательное пространство, т.е. является вещественной гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^3$. Аналитичность этой поверхности является следствием аналитичности решения системы линейных уравнений в частных производных с линейными коэффициентами.

Из условия 1) вытекает разрешимость определяющей функции этой поверхности относительно переменной $v=\operatorname{Im} z_3$.

Канонический вид соответствующего уравнения поверхности гарантируется видом (3.7) обсуждаемой алгебры. Каждое из условий (3.1)—(3.4) (с конкретными значениями $\varepsilon_1,\varepsilon_2$) обеспечивает требуемую индивидуальную структуру слагаемых 2-го веса в этом уравнении, причем с заданными параметрами $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. По младшим слагаемым уравнения (1.3) из системы весовых составляющих соотношения (2.5) поочередно можно однозначно определить все остальные компоненты однородности этого уравнения по схеме, описанной в [26].

Тем самым, алгебра (3.7) однозначно определяет некоторую аффинно-однородную поверхность канонического вида.

Отметим, что построение алгебр, удовлетворяющих условиям теоремы 3, является весьма трудоемкой задачей. В работах [30], [31] разработан алгоритм решения такой задачи для случая СПВ-гиперповерхностей за счет продолжения матричных алгебр. Техника названных работ оказывается применимой и для построения индефинитных однородных поверхностей. В основе алгоритма лежит следующий простой факт.

Предложение 5. *Если h - некоторая матричная алгебра, состоящая из матриц вида (3.7), то левые верхние 2x2-блоки этих матриц также образуют алгебру.*

Определение 6. Переход от алгебры матриц $g \subset M(2,\mathbb{C})$ к алгебре $h \subset M(4,\mathbb{C})$ мы называем *продолжением* алгебры g.

После достаточно кропотливых исследований выяснилось (см. [32]), что лишь малая часть всех подалгебр алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$ допускает продолжения, т.е. вкладывается в качестве левых верхних 2x2-блоков в алгебры вида (3.7), отвечающие аффинно-однородным гиперповерхностям. Для точной формулировки введем еще одно понятие.

Определение 7. Строго псевдо-выпуклую гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, заданную каноническим уравнением (1.4), назовем поверхностью *общего положения*, если параметры $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ из этого уравнения удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\varepsilon_1-\frac{1}{2}\right)\left(\varepsilon_2-\frac{1}{2}\right)\neq 0.$$

ТЕОРЕМА 4. *Алгебра Ли h, связанная с жесткой аффинно-однородной СПВ-гиперповерхностью общего положения 3-мерного комплексного пространства, является продолжением алгебры $g \subset M(2,C)$ одного из 3-х следующих типов:*

1) $\dim_{\mathbb{R}} g=2$, тогда g — диагонализируемая алгебра;

2) $\dim_{\mathbb{R}} g=3$, тогда

$$g\sim\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

3) $\dim g_{\mathbb{R}}=4$, тогда

$$g \sim \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Все три типа алгебр реализуются на однородных поверхностях.

Из теоремы 4, в частности, следует, что дискретные и одномерные подалгебры $M(2,\mathbb{C})$ не допускают продолжений до алгебр Ли, соответствующих аффинно однородным СПВ-гиперповерхностям общего положения. В двумерном случае продолжения не запрещаются лишь для диагональных подалгебр $M(2,\mathbb{C})$.

Допускающие продолжения 3-мерную и 4-мерную верхнетреугольные алгебры, базисы которых выписаны в теореме 4, обозначим через $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ соответственно.

Приведем здесь некоторые фрагменты обсуждения свойств алгебр вида (3.7), полученных продолжениями каких-либо подалгебр $M(2,\mathbb{C})$.

Основным условием того, чтобы линейное пространство h, состоящее из квадратных матриц, было алгеброй Ли, является замкнутость этого пространства относительно операции антикоммутативного умножения (скобки)

$$[A,B] = AB - BA.$$

Это означает, что скобка любых двух матриц из рассматриваемой алгебры разлагается по базису этой алгебры.

Для базисных матриц пятимерной алгебры $h = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \rangle$ вида (3.7) достаточно рассмотреть $C_5^2 = 10$ скобок. Каждая из них должна быть представлена в виде линейной комбинации

$$[E_k, E_l] = t_1E_1 + t_2E_2 + t_3E_3 + t_4E_4 + t_5E_5 \quad (3.8)$$

пяти базисных матриц с некоторыми (неизвестными) вещественными коэффициентами. При решении задачи можно считать известной лишь продолжаемую алгебру 2х2-матриц. Поэтому изучение 10 скобок — это решение системы 10 квадратичных матричных уравнений, содержащей большое число неизвестных элементов базисных матриц.

В случае продолжения 3-мерных матричных алгебр g можно считать ненулевыми левые верхние 2х2-блоки только трех первых базисных матриц E_1, E_2, E_3 продолженной 5-мерной алгебры h. Поэтому самыми «сложными» из 10 упомянутых скобок будут в нашем случае скобки $[E_1, E_2]$, $[E_1, E_3]$, $[E_2, E_3]$, тогда как для всех скобок $[E_k, E_5] = c_kE_5$ $(k = 1,2,3,4)$ условия (3.8) означают вещественность коэффициентов c_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ и никаких других ограничений на коэффициенты базисных матриц не содержат.

Для удобства рассмотрения 6 оставшихся матричных скобок из 10 введем дополнительные обозначения. В каждой матрице вида (3.7) ее левый верхний 2х2-блок будем называть е-частью, а еще выделим в ней с-часть, $\begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix}$-часть и (a,b)-часть.

В разложениях (3.8) скобок $[E_k, E_l]$ по базису E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 продолженной алгебры h мы будем рассматривать в первую очередь e-части, а затем и остальные выделенные части матриц в указанном выше порядке.

Замечание 1. Помимо выделенных частей в каждой матрице вида (3.7) остаются еще два элемента, которые могут быть ненулевыми. Это вещественные элементы c и q третьей строки матрицы. При этом можно считать, что у базисных матриц E_1, E_2, E_3, E_4 обсуждаемых алгебр элемент q равен нулю (за счет добавления к каждой из этих матриц матрицы E_5, умноженной на подходящий числовой множитель).

Замечание 2. При умножении двух матриц вида (3.7) их е-части перемножаются отдельно, независимо от остальных элементов этих матриц. Поэтому

$$[E_k, E_l]_e = [e_k, e_l]. \quad (3.9)$$

Предложение 6.

$$[E_k, E_l]_{(p,s)} = e_k \begin{pmatrix} p_l \\ s_l \end{pmatrix} - e_l \begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$[E_k, E_l]_{(a,b)} = e_l^T \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} + c_k \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} - e_k^T \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} - c_l \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Из этих технических фактов легко получается следующее интересное утверждение.

Предложение 7. *Если 5-мерная алгебра $h = \langle E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \rangle$ вида (3.7) является продолжением 3-мерной алгебры $g = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, то $\begin{pmatrix} p_4 \\ s_4 \end{pmatrix}$ — общий собственный вектор для e_1, e_2, e_3 с вещественными собственными значениями.*

Следствие. Для продолжаемой 3-мерной алгебры g существует вектор (а именно $\begin{pmatrix} p_4 \\ s_4 \end{pmatrix}$), который является общим собственным вектором для всех матриц алгебры. Для каждой матрицы из алгебры g собственное значение, соответствующее этому вектору, вещественно.

Полный список матричных маломерных вещественных алгебр, состоящих из квадратных комплексных матриц 2-го порядка, построен в работе [33]. В этом списке имеется 10 (с точностью до матричных подобий) типов трехмерных алгебр.

Можно проверить, что для многих из этих алгебр утверждение следствия не выполняется. Например, оно не может быть выполнено, если в алгебре имеется матрица с двумя невещественными собственными значениями. Поэтому из предложения 7 вытекает как следствие еще одно утверждение.

Предложение 8. *Пять типов трехмерных алгебр (α, β, γ - координаты в алгебре), а именно*

$$su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \right\},$$

$$su(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & \gamma \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_{\theta}^{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta)e^{i\theta} & \beta + i\gamma \\ 0 & (\alpha + i\beta)e^{i\theta} \end{pmatrix} \right\}, \theta \in [0, \pi),$$

$$f_{(\mu,\theta)}^{(4)} = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha + i\beta) & \gamma \\ 0 & (\alpha + i\beta) + (\varepsilon\beta - \mu\alpha) \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mu, \xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

не продолжаемы в смысле определения 6.

Непродолжаемость (в случае общего положения) еще четырех из пяти оставшихся типов 3-мерных вещественных подалгебр алгебры $M(2,\mathbb{C})$ доказывается несколько более сложными рассуждениями. И только в одном семействе алгебр за счет сужения его до единственной, точечной, алгебры $g^{(1)}$ удается выйти на реальные продолжения.

Детали продолжения этой алгебры, а также 4-мерной алгебры $g^{(2)}$ мы обсудим в следующих параграфах.

§4. АФФИННАЯ ОДНОРОДНОСТЬ ЖЕСТКИХ СПВ-ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Для реализации описанной выше схемы изучения вопроса о продолжаемости конкретных матричных алгебр полезно использовать еще одно соображение.

Вместо рассмотрения исходной матричной алгебры $h \subset M(2,\mathbb{C})$ и алгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ ее 2x2-блоков, соответствующих каноническому уравнению однородной поверхности, мы перейдем к «канонической» форме этих алгебр. При этом каноническим видом подалгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ будем называть алгебру $\breve{g}$ из классификации [33], к которой g сводится матричным подобием.

Например, каноническим видом любой диагонализируемой 4-мерной вещественной подалгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ является единственная диагональная 4-мерная алгебра с базисом

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Пусть для некоторой алгебры $\hat{g}$ из списка [33] и алгебры $g \subset M(2,\mathbb{C})$ 2x2-блоков исходной алгебры h выполняется равенство

$$g = V\breve{g}V^{-1}$$

с некоторой невырожденной матрицей $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$ второго порядка.

Вводя матрицу

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

рассмотрим вместо h новую, «каноническую» алгебру $\hat{h} = C^{-1}hC \subset M(4,\mathbb{C})$.

Заметим, что матричные подобия сохраняют коммутационные соотношения в произвольной алгебре, и, в частности, в рассматриваемых подалгебрах $\breve{g}$ и $\breve{h}$.

При этом, как легко проверить, специальный вид (3.7) сохранится и для всех матриц алгебры $\hat{h}$, а левые верхние 2x2-блоки матриц из $\hat{h}$ образуют теперь каноническую алгебру $\breve{g}$.

Новые, «канонические» векторы $\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}$ связаны с исходными векторами $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ формулами $(k = 1,2,3,4)$

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = Q^{T} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

При этом вид (p,s)- и (a,b)-соотношений (3.10) и (3.11) сохранится. Изменится лишь соотношение (3.5), т.е. L-связка. Формально будем записывать ее в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

аналогичном (3.5). Но в развернутой форме правая часть (4.2) имеет более сложный вид. Например, в СПВ-случае

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2i \left(R_1 \begin{pmatrix} p \\ s \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} \overline{p} \\ \overline{s} \end{pmatrix} \right), \qquad (4.3)$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2(\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_3^2) & 2(\varepsilon_1 v_1 v_2 + \varepsilon_2 v_3 v_4) \\ 2(\varepsilon_1 v_1 v_2 + \varepsilon_2 v_3 v_4) & 2(\varepsilon_1 v_2^2 + \varepsilon_2 v_4^2) \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} (|v_1|^2 + |v_3|^2) & (v_1 \overline{v}_2 + v_3 \overline{v}_4) \\ (\overline{v}_1 v_2 + \overline{v}_3 v_4) & (|v_2|^2 + |v_4|^2) \end{pmatrix}.$$

Все последующие технические обсуждения будут связаны с алгебрами $\hat{h}$. Однако, для упрощения записи мы сохраним начальные обозначения для матриц, входящих в эту алгебру и их элементов, называя их соответственно E_1, E_2 и т.п.

По мере необходимости, впрочем, мы будем уточнять, с какой именно алгеброй (исходной или канонической) мы в данный момент работаем.

Отметим, что в канонической форме самый сложный фрагмент схемы исследования продолжаемости конкретных алгебр образуют восемь скалярных уравнений, входящих в (4.2). $\begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{s} \end{pmatrix}$- и $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$-фрагменты устроены более просто, несмотря на то, что в каждом из них содержится по 12 скалярных уравнений.

Например, при продолжении 3-мерной алгебры $g^{(1)}$ из 24 упомянутых уравнений достаточно легко устанавливается следующая структура векторов $\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}$ $(k = 1,2,3,4)$:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2is_1 \\ is_2 + p_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -2a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ia_2 - b_4 \\ -2ia_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_4 \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

при некоторых комплексных $p_1, s_1, s_2, p_4, a_1, b_1, a_2, b_4$. Из $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$-соотношений при этом получаются дополнительно условия

$$c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

Аналогично, при продолжении 4-мерной алгебры $g^{(2)}$ имеем для векторов $\begin{pmatrix} \breve{p}_k \\ \breve{s}_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \breve{a}_k \\ \breve{b}_k \end{pmatrix}$ следующее представление:

$$p_1 = iP,\ p_2 = S,\ p_3 = iS,\ p_4 = \xi P, \qquad (4.6)$$

$$s_1 = -iS,\ s_2 = P,\ s_3 = -iP,\ s_4 = \xi S,$$

$$a_1 = iA,\ a_2 = B,\ a_3 = -iB,\ a_4 = RA, \qquad (4.7)$$

$$b_1 = -iB,\ b_2 = A,\ b_3 = iA,\ b_4 = RB.$$

Здесь P, S, A, B, ξ, R — некоторые комплексные числа, при этом $|\xi| = 1, R = \xi - c_4$. Для остальных элементов c_k здесь также устанавливаются равенства

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Теперь согласно описанной выше схеме остается рассмотреть L-связку векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ и (a_k, b_k).

Напомним, что формально в эту связку входит (нелинейным образом) произвольная невырожденная квадратная матрица второго порядка V. Тем самым, исследование этой системы 8 нелинейных уравнений представляет достаточно сложную задачу. При ее решении в случае каждой конкретной изучаемой алгебры полезно учесть еще одно упрощение.

Матрицу V, осуществляющую подобие абстрактной канонической алгебры и 2x2-алгебры, связанной с однородной поверхностью, можно считать принадлежащей достаточно узкому классу матриц вместо всего $GL(2,\mathbb{C})$. Основанием для этого служат утверждения о факторизации типа следующей леммы, используемой при изучении продолжаемости 4-мерной алгебры $su(1,1) + e^{i\theta}$

ЛЕММА 2. *Пусть* $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *невырожденная матрица, удовлетворяющая условию* $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$. *Тогда* W *допускает представление в виде*

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \bar{\zeta} & \bar{\xi} \end{pmatrix}, \qquad (4.8)$$

где $|\xi|^2 - |\zeta|^2 = 1, t \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \omega \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Эта лемма позволяет рассматривать в качестве матриц Q лишь верхнетреугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & t \end{pmatrix},$$

т.к. два других сомножителя в разложении (4.8) сохраняют алгебру $su(1,1) + e^{i\theta}$ неизменной.

Аналогичные факторизационные леммы справедливы и в случае двух наиболее важных для нас продолжаемых алгебр $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$.

Использование такого утверждения позволило упростить до обозримого состояния L-связку, т.е. систему восьми уравнений, отвечающую алгебре $g^{(1)}$. В итоге получено [34] следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Существует 3-параметрическое семейство аффинно различных аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, алгебры линейных векторных полей для которых являются продолжениями алгебры $g^{(1)}$. Базисы этих алгебр имеют вид*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i(1-4\varepsilon_2^2)\omega \\ 0 & 1/2 & 0 & 2i(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\bar{\zeta}\bar{\omega}) \\ -4(1-4\varepsilon_2^2)\bar{\omega} & 2(1-4\varepsilon_2^2)(2\varepsilon_2\zeta\omega + \bar{\zeta}\bar{\omega}) & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4i(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\bar{\zeta}\bar{\omega}) \\ 0 & 0 & 0 & 4i((1-\zeta^2)\omega + 2\varepsilon_2(1-|\zeta|^2)\bar{\omega}) \\ a_2 & 8(1-4\varepsilon_2^2)\bar{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = 16(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\zeta\omega - 8(4\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\bar{\zeta}\bar{\omega} - 8(4\varepsilon_2^2 - 1)\zeta\bar{\omega},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -4(\zeta\omega + 2\varepsilon_2\bar{\zeta}\bar{\omega}) \\ 0 & 0 & 0 & 4((1+\zeta^2)\omega - 2\varepsilon_2(1-|\zeta|^2)\bar{\omega})) \\ a_3 & 8i(1-4\varepsilon_2^2)\bar{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = -8i(2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\zeta\omega + (4\varepsilon_2(\varepsilon_1\bar{\zeta} + \varepsilon_2\zeta) + (\bar{\zeta} - \zeta))\bar{w}),$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i(2\varepsilon_2\zeta\omega + \bar{\zeta}\bar{\omega}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а параметры, входящие в эти матрицы, связаны соотношениями:

$$|\omega| = 1, \; 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\zeta^2)\omega + (1 + |\zeta|^2)\bar{\omega} = 0.$$

Упрощенный, 2-параметрический, вариант этого семейства, получающийся при $\omega = 1$, приведен в статье [30]. Каждая поверхность семейства оказывается алгебраической поверхностью либо 4-го, либо 6-го порядка, но явные уравнения их чрезмерно громоздки. С идейной точки зрения наиболее удобными способами их задания являются именно использование канонических уравнений и описание при помощи матричных алгебр Ли.

Учитывая жесткость (rigidity) всех этих поверхностей, будем называть семейство из [30] *R-семейством.*

Отметим, что рассмотренные выше необходимые $\begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{s} \end{pmatrix}$- и $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$-условия, а также L-связка составляют по сути совокупность условий, достаточных для того, чтобы обсуждаемая алгебра была алгеброй векторных полей на некотором однородном подмногообразии комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. Каждое такое многообразие является интегральным для обсуждаемой алгебры векторных полей.

Формально его можно получить как орбиту аффинной подгруппы, являющейся образом при экспоненциальном отображении рассматриваемой матричной алгебры. Обратим при этом внимание, что это интегральное многообразие может не быть гиперповерхностью, если его размерность окажется меньшей чем 5.

При наличии в обсуждаемой алгебре матрицы (3.5) требуемая размерность гарантируется условием вещественной линейной независимости векторов $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix} (k = 1,2,3,4)$. Это условие необходимо проверять дополнительно для всех решений (завершающей исследования продолжаемости) системы из восьми уравнений. В случаях алгебр $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$, приведших к продолжениям [30], [31], такие проверки, разумеется, были сделаны.

В то же время довольно часто возникает ситуация, когда решение заключительной системы приводит к линейно зависимым векторам $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix} (k = 1, 2, 3, 4)$. Это означает, что обсуждаемое однородное многообразие имеет коразмерность большую, чем 1. Такие однородные многообразия также представляют интерес. Например, в [6] приведено описание аффинно-однородных кривых в пространстве R^3, в [35] строится семейство однородных поверхностей коразмерности 2 в 4-мерном пространстве. Однако такой класс однородных многообразий изучен еще меньше, чем класс однородных гиперповерхностей, и потому мы не будем развивать здесь эту тему.

§ 5. ИНДЕФИНИТНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Техника, связанная с продолжением матричных алгебр, первоначально разрабатывалась для изучения однородности СПВ-гиперповерхностей. Однако Даниловым М.С. было замечено, что описанная в §§ 3—4 схема изучения вопроса о продолжаемости матричных алгебр (за исключением последнего ее этапа) применима без каких-либо изменений и к индефинитным поверхностям. Последний этап, т.е. исследование L-связки, можно проводить по тем же принципам, но технические описания для случаев положительно определенных и индефинитных поверхностей будут различными.

В этом параграфе на примере индефинитных поверхностей мы обсудим исследование 8 уравнений L-связки. Для простоты мы будем обсуждать лишь случай 3-мерной алгебры $g^{(1)}$ и соответствующих этому случаю векторов $\begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, заданных описанием (4.4—(4.5).

ЛЕММА 3. Произвольная матрица $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с единичным определителем и ненулевым элементом a разлагается в произведение двух сомножителей

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot U, \tag{5.1}$$

где $t \in \mathbb{C}$, а матрица U сохраняет алгебру $g^{(1)}$ при подобиях.

Как отмечалось выше, эта лемма позволяет рассматривать в качестве матриц V при обсуждении L-связки лишь верхнетреугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Замечание. Можно показать, что для матрицы V с нулевым элементом a (и единичным определителем) вместо разложения (5.1) справедливо аналогичное представление

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \cdot U,$$

с некоторым комплексным ω и сохраняющим алгебру $g^{(1)}$ вторым матричным множителем U.

При продолжении алгебры $g^{(1)}$ использование леммы 1 и замечания к ней позволяет «без потерь» описать полное множество решений системы из восьми уравнений, отвечающей L-связке. Здесь мы по сути обсудим лишь пример такого продолжения. Вместе с тем даже отдельная лемма 3 дает представление о размерности множества таких решений, а тем самым, о количестве аффинно различных однородных поверхностей (связанных с продолжением $g^{(1)}$).

Итак, рассмотрим продолжение алгебры

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot g^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Пользуясь тем, что обратная матрица V^{-1} для $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ имеет простой вид $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$, мы запишем условие L-связки в форме

$$Q^{-T} \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} = L\left(Q \begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \hat{s}_k \end{pmatrix} \right).$$

Здесь через L обозначен оператор связки в одной из простейших форм (3.2)—(3.4), соответствующих индефинитному случаю.

Рассмотрим для простоты параболический случай, в котором выполняются условия (3.3), т.е.

$$\begin{cases} a = 2i\left(\overline{p} + 2\varepsilon_1 p + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)s\right) \\ b = 2i\left(-\overline{s} - 2\varepsilon_1 s + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p\right). \end{cases}$$

Полагая еще для упрощения формул

$$a_k = 2iA_k,\ \ b_k = 2iB_k (k = 1,2,3,4),$$

можно записать систему восьми уравнений в виде

$$\begin{gathered} A_1 - tB_1 = 2\varepsilon_1 p_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(tp_1 + s_1) + \overline{p_1}, \\ B_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p_1 + 2\varepsilon_2(tp_1 + s_1) - \overline{(tp_1 + s_1)}, \\ A_2 - t(-2A_1) = 2\varepsilon_1(2s_1) + \\ +(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2ts_1 + s_2) + \overline{2s_1}; \\ -2A_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2s_1) + \\ +2\varepsilon_2(2ts_1 + s_2) - \overline{(2ts_1 + s_2)}, \\ (iA_2 - B_4) - t(-2iA_1) = 2\varepsilon_1(2is_1) + \\ +(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2its_1 + (is_2 + p_4)) + \overline{2is_1}, \\ -2iA_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(2is_1) + 2\varepsilon_2(2its_1 + \\ +(is_2 + p_4)) - \overline{(2its_1 + (is_2 + p_4)}, \\ -tB_4 = 2\varepsilon_1 p_4 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(tp_4 + 0) + \overline{p_4}, \\ B_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)p_4 + 2\varepsilon_2(tp_4) - \overline{tp_4}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Первые три и последнее уравнения системы (5.3) позволяют удалить из нее A_1, B_1, A_2, B_4, выразив их через остальные параметры, входящие в (4.5), т.е. через p_1, s_1, s_2, p_4.

Подставляя полученные выражения в оставшиеся уравнения системы, получаем еще

$$s_1 = -\frac{it}{4}p_4 + \frac{i}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \bar{t})\overline{p_4},$$

$$s_2 = \frac{i}{2}(1 + t^2)p_4 - i(\varepsilon_2(1 + |t|^2) + t(\varepsilon_1 + \varepsilon_2))\overline{p_4}.$$

С учетом этих формул получаем завершающую систему следующего вида:

$$\begin{cases} 4(N_1 p_1 + N_2 \overline{p_1}) - iM_4 \overline{p_4} = 0, \\ N_1 p_4 + N_2 \overline{p_4} = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

где

$$N_1 = -2(1 + t)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 t),\ \ N_2 = (|t|^2 - 1),$$

$$M_4 = (1 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1^2) +$$
$$+8\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\operatorname{Re} t + 4(\varepsilon_2^2 - 1)\,|t|^2$$

Напомним, что из вида базисных матриц продолженной алгебры следует, что $p_4 \neq 0$, а значит, можно считать, что $p_4 = e^{i\varphi} \in S^1$ (более того, $\varphi \in [0, \pi)$).

Кроме того, за счет рассмотрения вместо матрицы E_1 ее исправленного варианта $E_1^* = E_1 + \alpha E_4$ можно считать, что p_1 ортогонален как вектор в комплексной плоскости вектору p_4 (в аналитической записи $\operatorname{Re}(p_1 \overline{p_4}) = 0$).

ЛЕММА 4. *Необходимым условием существования у системы (5.4) решений (p_1, p_4), удовлетворяющих ограничениям*

$$p_4 =\in S^1,\ \ \operatorname{Re}(p_1 \overline{p_4}) = 0$$

является равенство $|N_1| = |N_2|$ или

$$N_1 = -N_2 e^{-2i\varphi} \text{ при некотором } \varphi \in [0, \pi). \tag{5.5}$$

При выполнении (5.5) множество обсуждаемых решений, удовлетворяющих дополнительному неравенству $N_2 \neq 0$ задается формулами

$$p_4 = e^{i\varphi}, p_1 = -i\frac{M_4}{8N_2}p_4 = -i\frac{M_4}{8N_2}e^{i\varphi}. \tag{5.6}$$

Следствие. Для любого набора параметров

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, t, \varphi),$$

удовлетворяющего условию (5.5) и неравенству $N_2 \neq 0$, существует и притом единственный набор параметров $(p_k, s_k), (A_k, B_k)$, образующий вместе с (5.6) решение системы восьми уравнений (5.3).

Пример 3. Учитывая сказанное выше, несложно теперь построить 2-параметрическое семейство матричных алгебр Ли, полученных продолжением алгебры $g^{(1)}$ по схеме индефинитного параболического случая. Положим для этого в матрице (5.2) $t = -1$ и введем в качестве вещественных параметров числа

$$r \in R,\ \ \varphi \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi).$$

Считая, кроме того, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 1,$$

обозначим еще:

$$\lambda = 1 - 2\varepsilon,\ \ \mu = 1 + 2\varepsilon,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(\mu\cos\varphi - i\lambda\sin\varphi),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(\mu^2\cos\varphi - i\lambda^2\sin\varphi) +$$
$$+2r(\cos\varphi - i\sin\varphi));$$

$$a_2 = 2(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

$$b_3 = -(\lambda\sin\varphi + i\mu\cos\varphi).$$

С учетом этого базисные матрицы каждой из алгебр предлагаемого семейства имеют вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ir(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ 0 & 1/2 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda\sin\varphi + i\mu\cos\varphi) \\ a_1 & b_1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-\lambda\sin\varphi + i\mu\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi + i\cos\varphi) \\ a_2 & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & -\frac{1}{2}(\mu\cos\varphi + i\lambda\sin\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\varphi + i\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\sin\varphi + i\cos\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверяется, что при указанных ограничениях на введенные параметры векторы $\begin{pmatrix} p_k \\ s_k \end{pmatrix}$ $(k = 1,2,3,4)$ линейно независимы в вещественном смысле. Это означает, что интегральное многообразие для каждой алгебры векторных полей (5.7) является вещественой гиперповерхностью.

Замечание. Аналогичные рассуждения для эллиптической и гиперболической схем продолжения алгебры $g^{(1)}$ в индефинитном случае приводят к 3-параметрическим семействам алгебр (аналогичным семейству из теоремы 5) и, соответственно, к 3-параметрическим семействам аффинно-различных однородных поверхностей.

Интегрирование таких семейств и отслеживание зависимости получающихся однородных поверхностей от параметров семейства является чрезвычайно сложной в техническом плане задачей. Для ее решения уже используются пакеты компьютерной математики, но пока эффективные алгоритмы разработаны здесь лишь для интегрирования «точечных» алгебр. В частности, просчитанные примеры, связанные с эллиптическим и гиперболическим типами в индефинитном случае, приводят к уравнениям однородных поверхностей, напоминающим алгебраические уравнения 6-го порядка из [30].

Здесь мы приведем результат интегрирования одной точечной алгебры, отвечающей параболическому типу (в индефинитном случае). При

$$r = 0,\ \varphi = \arccos\frac{4}{5}$$

уравнение соответствующей алгебре (5.7) аффинно-однородной вещественной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$ имеет (в вещественной форме) вид:

$$v = 2(x_1x_2 + y_1y_2) + \\ +\left(x_2^2 - 3y_2^2\right) + \left(\frac{10}{9}x_2^3 - \frac{5}{6}y_2^3\right).$$

§ 6. ГОЛОМОРФНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Выше уже отмечалась связь аффинной и голоморфной однородности для подмногообразий комплексных пространств $\mathbb{C}^n$. Строго говоря, исследование аффинной однородности вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, которому посвящена эта работа, было начато в связи с изучением именно голоморфной однородности.

В этом, завершающем, разделе обзора мы обсудим фрагменты голоморфной нормализации невырожденных по Леви вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. Все обсуждения будут проводиться для жестких поверхностей и, тем самым, они применимы для рассмотренных выше аффинно-однородных многообразий.

Заметим, что вычисление голоморфных инвариантов аффинно-однородных поверхностей может дать ответы и на некоторые сугубо «аффинные» вопросы. Если, например, удается сделать вывод о голоморфной несводимости друг к другу двух поверхностей, то, очевидно, эти поверхности являются различными и в аффинном смысле. Таким образом, обсуждаемые ниже результаты имеют «двойное назначение».

Отметим еще, что приводимые ниже предложения 9—11 получены автором этой статьи совместно с Атановым А. В., проделавшим значительную работу по переводу математических конструкций на язык компьютерных вычислений.

Итак, пусть вещественно-аналитическая жесткая невырожденная по Леви гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^3$ задана уравнением

$$v = \sum_{k,l\ge 0} F_{kl}(z,\overline{z}) = F_{00} + (F_{10} + F_{01}) + \\ +(F_{20} + F_{11} + F_{02}) + (F_{30} + F_{21} + \\ +F_{12} + F_{03}) + ..., \qquad (6.1)$$

где k, l — степени соответствующих слагаемых по переменным z и $\overline{z}$ соответственно.

Приведение этого уравнения к нормальной форме Мозера [18], детально описано, например, в [25] и [36]. Для аккуратной формулировки вытекающего из этих описаний результата обозначим (по сложившейся в многомерном комплексном анализе традиции) эрмитову форму F_{11} из этого уравнения через $< z, z >$, а матрицу этой формы через H. Здесь мы будем использовать выражения вида

$$\langle f, g\rangle = f^T H\overline{g}$$

для векторнозначных функций f и g.

Введем, например, вспомогательные вектор-функции $f_2, f_3, f_4, ...$ (являющиеся однородными многочленами относительно переменной z), определяя их формулами

$$F_{21} = \langle f_2, f_1\rangle,\ F_{31} = \langle f_3, f_1\rangle,\ F_{41} = \langle f_4, f_1\rangle, ... \qquad (6.2)$$

Далее для произвольных функции $F(z,\overline{z})$ и двумерного вектора $a = (a_1, a_2)$ нам потребуется еще обозначение

$$\partial F(a) = \frac{\partial F}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2} a_2. \qquad (6.3)$$

Опираясь на вектор-функции из (6.2), можно доказать следующее предложение.

Предложение 9. *Голоморфной заменой координат уравнение (6.1) можно привести к виду*

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{k,l\ge 2} H_{kl}(z,\overline{z}) = \\ = \langle z, z\rangle + H_{22} + H_{32} + H_{23} + ..., \qquad (6.4)$$

где, как и раньше k, l — степени соответствующих слагаемых по переменным z и $\overline{z}$. При этом в зависимости от слагаемых исходного уравнения (6.1) младшие многочлены H_{kl} из уравнения (6.4) определяются следующими формулами:

$$H_{22} = F_{22} - \langle f_2, f_2\rangle; \qquad (6.5)$$

$$H_{32} = F_{32} - \langle f_3, f_2\rangle + \langle \partial f_2(f_2), f_2\rangle - \partial F_{22}(f_2); \qquad (6.6)$$

$$H_{42} = F_{42} - \langle f_4^*, f_2\rangle - \partial F_{32}(f_2) + \\ +\partial F_{22}(g_3) + \partial^2 F_{22}(f_2, f_2); \qquad (6.7)$$

$$H_{33} = F_{33} + \langle g_3, g_3\rangle + \partial\overline{\partial} F_{22}(f_2, \overline{f}_2) + \\ +2\mathfrak{R}(-\langle \partial f_2(f_2), g_3\rangle + \langle f_3, g_3\rangle - \partial F_{23}(f_2)), \qquad (6.8)$$

где $g_3(z) = -f_3(z) + \partial f_2(f_2)$.

Замечание 1. Слагаемое f_4^* в (6.7) вычисляется по формуле

$$f_4^* = f_4 + f_2(f_2) + \partial f_2(g_3) - \partial f_3(f_2).$$

Замечание 2. Обозначения $\partial^2 F_{22}(f_2, f_2)$ и $\partial\overline{\partial} F_{22}(f_2, \overline{f_2})$ являются естественными обобщениями обозначения (6.3).

Дальнейшее преобразование уравнения (6.4) по так называемой *простейшей* схеме (см. [28]) приводит к *нормальному* уравнению

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{k,l\ge 2, m\ge 0} N_{klm}(z,\overline{z},u), \qquad (6.9)$$

в котором, например, многочлены N_{220} и N_{320} получаются путем проектирования в специальные пространства $\mathfrak{N}_{22}$, $\mathfrak{N}_{32}$ многочленов H_{22} и H_{32} соответственно.

Замечание. Нормальное уравнение (6.9), вообще говоря, не является жестким даже для жесткого исходного уравнения изучаемой поверхности.

Важные, но все же промежуточные формулы (6.5)—(6.8) показывают чрезмерно громоздкий характер вычислений, необходимых для построения нормального уравнения даже для отдельной поверхности. Напомним, что согласно [37] за однородность невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ «отвечают» коэффициенты нормального уравнения (6.9) вплоть до 7-го порядка включительно (в СПВ случае достаточно коэффициентов 6-го порядка).

Усугубляется ситуация отсутствием единственности нормальных уравнений. Например, многочлен N_{220} из нормального уравнения (6.9) определяется лишь с точностью до действия на него линейного преобразования из группы $SU(2)\times\mathbb{R}_+$ (в СПВ-случае) или аналогичной группы, построенной на основе $SU(1,1)$ (в индефинитном случае).

По этим причинам мы остановимся на многочленах 4-й и 5-й степеней из нормальных уравнений для нескольких семейств аффинно-однородных вещественных СПВ-гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$.

Речь пойдет о трубках над строго выпуклыми поверхностями из $\mathbb{R}^3$ и о поверхностях из R-семейства. Напомним, что множество всех строго выпуклых аффинно-однородных поверхностей из пространства $\mathbb{R}^3$, не сводимых (аффинными преобразованиями) к поверхностям 2-го порядка, распадается [26] с точки зрения соответствующих алгебр Ли на несколько компонент. Это, во-первых, двух-параметрическое семейство E1, а также одно-параметрические семейства E2, E3, E4.

При этом основу семейства E3 составляют, согласно [38], поверхности $z = y^2 \pm x^\mu$. Трубки над ними описаны в классификации голоморфно однородных гиперповерхностей с «богатыми» группами симметрий [37]. В семействе $E1$ имеется много различных подсемейств (в том числе, богатых симметриями); его изучение превосходит размеры этого раздела.

Остальные упомянутые нами поверхности, т.е. представители R-семейства и трубки, отвечающие семействам E2 и E4, имеют дискретные группы изотропии и, следовательно, не сводятся голоморфными (и, в частности, аффинными) преобразованиями к трубкам над E3.

Для получения утверждений, позволяющих различать эти оставшиеся семейства, напомним еще результат из [39], согласно которому при обсуждении 5-мерного пространства N_{22} основной интерес представляют многочлены

$$E_0 = |z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4,$$

$$E_1 = z_1^2\bar{z}_2^2 + z_2^2\bar{z}_1^2,$$

$$E_3 = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$$

из этого пространства.

Предложение 10. *а) Для каждой поверхности из семейства трубок над $E2$ многочлен N_{220} из ее нормального мозеровского уравнения (6.9) сводится к виду*

$$\pm(E_0 + AE_1),\ A \in \mathbb{R};$$

б) Для всех трубок над семействами $E3$ и $E4$ многочлен N_{220} из их нормальных мозеровских уравнений (6.9) сводится к виду $\pm E_0$.

в) для всех аффинно-однородных поверхностей из R-семейства многочлен N_{220} из их нормальных мозеровских уравнений (6.9) сводится к виду $\pm E_0$.

Можно показать, опираясь на [39], что за исключением значений $A = \pm 3$ многочлены $\pm(E_0 + AE_1)$ и $\pm E_0$ не сводимы друг к другу преобразованиями из $SU(2)\times\mathbb{R}_+$. Это означает, что трубки над поверхностями из семейства $E2$ не сводятся (за несколькими возможными исключениями) к поверхностям из R-семейства и к трубкам над поверхностями из E4. Наиболее сложным в этой ситуации остается вопрос о возможной эквивалентности поверхностей из двух последних семейств. Кроме того, необходимо еще разбираться с аналогичным вопросом внутри каждого из упомянутых выше семейств.

Ответ на эти вопросы может появиться за счет сравнения многочленов N_{320} из нормальных уравнений (6.9) этих семейств. Компьютерными вычислениями удается получать результаты следующего типа.

Предложение 11. *Пару многочленов (N_{220}, N_{320}) из нормальных уравнений (6.12) для поверхностей из R-семейства можно привести к виду*

$$N_{220} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{64(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(2\varepsilon_2 - 1)^3}\cdot E_0,$$

$$N_{320} = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{512(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^3(2\varepsilon_2 - 1)^{9/2}}\times$$
$$\times\Big(-\sqrt{2\varepsilon_1 + 1}z_2^3\bar{z}_2^2 - 3\sqrt{2\varepsilon_1 + 1}z_1^2 z_2\bar{z}_1^2 +$$
$$+3i\sqrt{2\varepsilon_2 - 1}z_1 z_2^2\bar{z}_2^2 - 6i\sqrt{2\varepsilon_2 - 1}z_1^2 z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 +$$
$$+iz_1^3\bar{z}_1^2 + 6\sqrt{2\varepsilon_1 + 1}z_1 z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2\Big).$$

Отметим здесь для сравнения, что у семейства E4 аналогичная пара (N_{220}, N_{320}) устроена гораздо сложнее в части N_{320}. Прийти к каким-либо выводам о возможной голоморфной эквивалентности (или о ее отсутствии) поверхностей из R-семейства и трубок над E4 пока не удалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blaschke W.* Affine Differentialgeometrie / W. Blaschke // Berlin. — 1923.

2. *Guggenheimer H.* Differential geometry / H. Guggenheimer // McGraw-Hill. New York. — 1963.

3. *Cartan E.* Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — (4) 11 (1932). — P. 17—90 (Oeuvres II, 2, 1231 - 1304).

4. *Кобаяси Ш.* Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу // М. Наука. — 1981. т. 1 - 344 с.

5. *Azad H.* Homogeneous CR manifolds /H. Azad, A. Huckleberry, W. Richthofer // J. Reine und Angew. Math. — Bd. 358 (1985). — P. 125 - 154.

6. *Широков А.П.* Аффинная дифференциальная геометрия / А. П. Широков, П. А. Широков // М. Физматгиз. — 1959. — 319 с.

7. *Nomizu K.* A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces / K. Nomizu, T. Sasaki // Manuscr. Math. — V. 73(1991).— № 1. — P. 39—44.

8. *Nomizu K.* Affine Differential Geometry / K. Nomizu, T. Sasaki // Cambridge Univ. Press. — 1994. — 263 p.

9. *Opozda B.* On locally homogeneous-structures / B. Opozda // Geom. Dedicata. — 73 (1998).— P. 215—223.

10. *Oliker V.* Affine geometry and polar hypersurfaces / V. Oliker, U. Simon // Analysis and Geometry. — 1992. — P. 87—112.

11. *Vrancken L.* Degenerate homogeneous surfaces in $\mathbb{R}^3$ / L. Vrancken // Geom. Dedic. — V. 53 (1994). — P. 333—351.

12. *Dillen F.J.* (ed.) Handbook of Differential Geometry. Vol. 1. / F. Dillen, L.C.A. Verstraelen // 2000/ — 1054 p.

13. *Doubrov B.M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry / B. M. Doubrov, B. P. Komrakov, M. Rabinovich // Geometry and Topology of Submanifolds. — VIII, World Scientific. — 1996. — P. 168—178.

14. *Takagi R.* On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space / R. Takagi // Osaka J. Math. — V. 19 (1973). — P. 495—506.

15. *Liu H.L.* Centroaffinely homogeneous surfaces in $\mathbb{R}^3$ / H. L. Liu, C. P. Wang // Beitr. Algebra Geom. — V. 35(1)(1994).— P. 109—117.

16. *Repovs D.* C^1-homogeneous compacta in $\mathbb{R}^n$ are C^1-submanifolds of $\mathbb{R}^n$ / D. Repovs, A. B. Skopenkov, E.V. Schepin // Proc. Amer. Math. Soc. — V. 124 (1996). — P. 1219—1226.

17. *Лобода А. В.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 2003. — № 10. — С. 38—50.

18. *Chern S. S.* Real hypersurfaces in complex manifolds/ S. S. Chern, J. K. Moser //Acta Math. — 1974 — 133, N 3. — P. 219—271.

19. *Fels G.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — V. 210(2008). — P. 1—82.

20. *Изотов Г. Е.* О совместном приведении квадратичной и эрмитовой форм/ Г. Е. Изотов // Известия ВУЗов. Сер. Математика. — 1957. — № 1. — С. 143—158.

21. *Данилов М. С.* Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности с индефинитной формой Леви/ М. С. Данилов // Международная школа-семинар по геометрии и анализу. Тез. докл. — Абрау-Дюрсо, 2008 — С. 25—26.

22. *Желобенко Д. П.* Представления групп Ли / Д. П. Желобенко, А. И. Штерн // М.: Наука, 1983. — 360 с.

23. *Montgomery D.* Topological transformation groups / D. Montgomery, L. Zippin // New York. — 1955.

24. *Zaitsev D.* On different notions of homogeneity for CR-manifolds / D. Zaitsev // The Asian Journal of Math. — V. 11(2007). — № 2. — P. 331—340.

25. *Лобода А. В.* О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ / А. В. Лобода // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59. — № 2 — С. 211—223

26. *Eastwood M.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space/ M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom Dedicata. — 1999. — V. 77. — P. 11—69.

27. *Исаев А. В.* Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус / А. В. Исаев, М. А. Мищенко // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1988. — Т. 52. — № 6. — С. 1123—1153.

28. *Лобода А. В.* Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии/ А. В. Лобода // Труды МИАН. — 2001. — Т. 235. — С. 114—142.

29. *Бишоп Р.* Геометрия многообразий /Р. Бишоп, Р. Криттенден. М. Мир. — 1963. — 364 с.

30. *Демин А. М.* Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в C^3 / А. М. Демин, А. В. Лобода // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 5. — С. 791—794.

31. *Евченко В.К.* 4-мерные матричные алгебры и аффинная однородность вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ / В. К. Евченко, А. В. Лобода // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2009, № 1. С. 108—118.

32. *Лобода А.В.* Действие аффинной подгруппы в комплексной касательной плоскости к однородной поверхности / А. В. Лобода // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. — Воронеж, 2009. — С. 106—107.

33. *Белых Ф.А.* Вещественные подалгебры малых размерностей матричной алгебры Ли $M(2,\mathbb{C})$ / Ф. А. Белых, А. Ю. Борзаков, А. В. Лобода // Известия ВУЗов. Сер. математика. — 2007. — № 5. — С. 13—24.

34. *Лобода А. В.* О решениях одного класса квадратичных систем уравнений /А. В. Лобода // Материалы международной конференции. — Уфа — 2007. — Т. 2. — С. 34.

35. *Wang C.P.* The classification of equiaffine indefinite flat homogeneous surfaces in $\mathbb{R}^4$ /C. P. Wang // Geom. Dedicata. — V. 65 (1997). — P. 323—353.

36. *Лобода А.В.* Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии/ А. В. Лобода // Матем. сборник. — 2001. — Т. 192. — С. 3 - 24.

37. *Лобода А.В.* Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэф-

фициентам ее нормального уравнения /А. В. Лобода // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73. — № 3. — С. 419—423.

38. *Болдырева О. А.* О коэффициентном подходе к аффинной однородности / О. А. Болдырева, А. В. Лобода // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. — 2006. № 1. — С. 105—109.

39. *Ежов В. В.* Каноническая форма многочлена 4-го порядка в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в C^3 / В. В. Ежов, А. В. Лобода, Г. Щмальц // Матем. заметки. — 1999. — Т.66. — № 4. — С. 624—626.

Лобода Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ВГАСУ, профессор кафедры математического моделирования ВГУ

Тел. (4732) 78-10-28; 71-53-62, 208-364

E-mail: lobvgasu@yandex.ru

Loboda Alexander Vasil'evich — doctor of of physico-mathematical sciences, professor, chaire of higher mathematics of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, professor, chaire of mathematical modeling of Voronezh State University

Tel.: (4732) 46-03-28, 71-53-62, 208-364

E-mail: lobvgasu@yandex.ru