УДК 517.962./965

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Ф. Кудинов

Поступила в редакцию 03. 03. 2009 г.

Аннотация. В данной статье получено общее решение линейного однородного разностного уравнения третьего порядка.
Ключевые слова: Линейное разностное уравнение, общее решение, матрица, сумма.

Abstract. The general decision of linear difference equation of third order was found in this article.
Keywords: Linear difference equation, general decision, matrix, sum.

Пусть $n \in \{0,1,2,...\}, a_n, b_n, c_n$ — заданные комплекснозначные функции, u_n — функция, удовлетворяющая линейному однородному разностному уравнению третьего порядка

$$u_n + a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2} + c_n u_{n-3} = 0. \tag{1}$$

Требуется найти все решения уравнения (1). Для постоянных функций $a_n = a, b_n = b, c_n = c$ отыскание всех решений уравнения (1) не представляет проблемы (см., напр., [1]—[2]).

В нашей статье дан метод для нахождения общего решения уравнения (1) с переменными ненулевыми коэффициентами. Этот метод может быть применен и к решению разностных уравнений более высокого порядка. Случай разностного уравнения второго порядка рассмотрен в работе, предложенной к опубликованию в сборнике статей факультета прикладной математики, информатики и механики ВГУ.

§ 1. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Обозначения.

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_n \\ a_n & 0 & c_n \\ 0 & b_n & c_n \end{pmatrix}, (n \geq 1, c_n \neq 0),$$ — матрицы третьего порядка; $P_n = A_1 A_2 ... A_n; Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — вектор-столбец; $Q_n = P_n Q_0 = \begin{pmatrix} Q_{1n} \\ Q_{2n} \\ Q_{3n} \end{pmatrix}$; $f_0 = 0$, $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, ..., f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, ...$ — числа Фибоначчи; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — произвольные постоянные.

Теорема 1. Если $a_1 b_1 a_2 \neq 0$, то линейная комбинация

$$u_n = \alpha_1 Q_{1n} + \alpha_2 Q_{2n} + \alpha_3 Q_{3n} \tag{2}$$

при $n \geq 3$ есть общее решение линейного однородного разностного уравнения третьего порядка

$$u_n = A_n u_{n-1} + A_{n-1} b_n u_{n-2} + c_{n-2} b_{n-1} a_n u_{n-3}. \tag{3}$$

Замечание. Если в уравнении (3) $a_n \neq 0, b_n \neq 0, c_n \neq 0, (n = 1,2,3,...)$, то с помощью соответствующих переобозначений уравнение (3) сводится к уравнению (1).

Доказательство. При $n \geq 3$ имеем:

$$Q_n = P_{n-1} A_n Q_0 = P_{n-1} \begin{pmatrix} c_n \\ a_n + c_n \\ b_n + c_n \end{pmatrix} = A_n P_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_n P_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_n P_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Так как

$$P_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q_{n-1}, P_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_{n-1} Q_{n-2}, P_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_{n-1} c_{n-2} Q_{n-3},$$

то продолжая равенство (4), получим формулу:

$$Q_n = A_n Q_{n-1} + A_{n-1} b_n Q_{n-2} + c_{n-2} b_{n-1} a_n Q_{n-3}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что функции

$$u_n = Q_{1n}, u_n = Q_{2n}, u_n = Q_{3n}$$

удовлетворяют уравнению (3).

Покажем, что их линейная комбинация (2) есть общее решение уравнения (3). Для этого рассмотрим определитель Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{20} & Q_{21} & Q_{22} \\ Q_{30} & Q_{31} & Q_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1(b_2 + c_2) \\ 1 & a_1 + c_1 & c_1(b_2 + c_2) + a_1 c_2 \\ 1 & b_1 + c_1 & c_1(b_2 + c_2) + b_1(c_2 + a_2) \end{vmatrix} = a_1 b_1 a_2,$$

который по условию теоремы 1 отличен от нуля. На основании теоремы II ([1], стр. 313—314) линейная комбинация (2) есть общее решение уравнения (3), что и требовалось доказать.

§ 2. СУММАТОРНАЯ ФОРМА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

В этом параграфе представим Q_n в виде некоторой суммы при $b_n = c_n = 1$.

Для этого требуются следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $B_n, C_n, D_n, n \geq 1,$ квадратные матрицы одного порядка.

Если $D_n = B_n + C_n$, то справедлива формула

$$D_1 D_2 ... D_n = B_1 B_2 ... B_n +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} B_1 ... B_{i_1 - 1} C_{i_1} B_{i_1 + 1} ... B_{i_2 - 1} C_{i_2} ... \quad (6)$$

$$... B_{i_{k-1}+1} ... B_{i_k - 1} C_{i_k} B_{i_k + 1} ... B_n,$$

при этом произведение матриц $B_i ... B_j$ при $j < i$ считается равным единичной матрице того же порядка, что и матрицы B_i.

Лемма 2. Пусть матрицы B и C имеют вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $k \geq 1$ справедливы формулы:

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & f_{k-1} & f_k \\ 0 & f_{k-1} & f_k \\ 0 & f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$CB^k C = f_{k-1} C, \quad (8)$$

где k — показатель степени матрицы B.

Доказательство формул (6) и (7) проводится методом математической индукции.

Теорема 2. Пусть

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_j = \begin{pmatrix} f_{j-1} \\ f_{j-1} \\ f_j \end{pmatrix}, j \geq 1.$$

Тогда для последовательности матриц Q_n, $n \geq 1$, справедлива формула

$$Q_n = V_{n+2} + \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+2}{3}} \sum_{1 \leq j_1 < ... < j_k \leq n-2(k-1)} V_{j_1 - 1} a_{j_1} a_{j_2 + 2} \cdots \quad (9)$$

$$\ldots a_{j_k + 2(k-1)} f_{j_2 - j_1} \ldots f_{j_k - j_{k-1}} f_{n+1-2(k-1)-j_k}.$$

Доказательство. Представим матрицу A_n в виде суммы двух матриц: $A_n = B + a_n C$, где матрицы B и C определены в лемме 2.

Полагая в лемме 1 $D_n = A_n, B_n = B, C_n = a_n C$, на основании формул (7) и (8), получим:

$$P_n = B^n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} B^{i_1 - 1} C B^{n - j_k} a_{i_1} ...$$

$$... a_{i_k} f_{i_2 - i_1 - 2} ... f_{i_k - i_{k-1} - 2}, \quad (10)$$

$$i_2 - i_1 \geq 3, ... i_k - i_{k-1} \geq 3.$$

Вводя в формуле (10) новые переменные

$$i_1 = j_1, i_2 = j_2 + 2, ... i_k = j_k + 2(k-1),$$

и применяя формулы

$$P_n Q_0 = Q_n, B^n Q_0 = V_{n+2}, B^i C B^j Q_0 = f_{j+1} V_i,$$

получим формулу (9).

Итак, формула (9) дает сумматорную форму для общего решения разностного уравнения

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + a_n u_{n-3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей, Физматгиз, 1959.

2. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре, Воронеж, 2004.

Кудинов Анатолий Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент

Тел. 73-84-00

E-mail: antreg@ list.ru

Kudinov Anatoly Filippovich — Ph. D., assistant professor

Tel. 73-84-00

E-mail: antreg@list.ru