

# РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВЫТОЧКОЙ

А. В. Кривоченко

Старооскольский филиал Воронежского государственного университета г. Старый Оскол

Поступила в редакцию 01.06.2009 г.

**Аннотация.** Отличие данной публикации от аналогичных состоит в учете как ассоциированной, так и неассоциированной сжимаемости, что позволяет более полно описать свойства материала, а также учесть влияние времени на характер деформирования.

На основании данных численного эксперимента построена зависимость радиуса упруго-пластической границы от физико-механических параметров материала и параметров нагружения. Определено влияние вязкости, ассоциированной и неассоциированной сжимаемости на величину пластической области.

**Ключевые слова:** динамическое деформирование, дилатансия, сжимаемость, упругость, вязкость, пластичность, упрочнение, растяжение, сжатие.

**Abstract.** The difference of the given work from the analogous one consists in the registration of the associative as well as non-associative compressibility and it permits to describe properties of the material more completely and to take into account the influence of time to the character of deformation.

On the grounds of data of the numerical calculations it is presented the dependence of radius of the elastic and plastic boundary from the physic-mechanical parameters of material and parameters of strain. It is defined the influence of viscosity, associative and non-associative compressibility to the meaning of the plastic area.

**Keywords:** dynamic deformation, dilatancy, compressibility, elasticity, viscosity, plasticity, hardening, a stretching, compression.

В настоящей работе построено решение классической задачи Ивлева [3] для упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела с учетом ассоциированной и неассоциированной сжимаемости, причем внешние и внутренние нагрузки изменяются с течением времени определенным образом. Аналогичные задачи в квазистатической постановке для несжимаемого материала рассмотрены ранее в работах [1–2], [4], [6].

Определим, согласно [6], напряженно-деформированное состояние сжимаемой упрочняющейся упруго-вязко-пластической бесконечной пластины, ослабленной эллиптической выточкой, с полуосями  $a(1+d)$ ,  $a(1-d)$  (рис. 1).

На бесконечности действуют взаимно-ортогональные растягивающие напряжения интенсивности  $P_1$ ,  $P_2$ . На контур отверстия действует нормальное давление интенсивности  $p_0$ . Решение ищется в безразмерных переменных в цилиндрической системе координат. Величины, имеющие размерность длины, относятся к

радиусу упруго-пластической границы  $r_s$ , имеющие размерность напряжений к модулю сдвига  $\mu$  и им приписан ноль внизу.

Предполагается что на промежутке  $[0..T]$ , величины  $P_1$ ,  $P_2$  и  $p$  изменяются от нуля до некоторых постоянных значений  $P_1^{(0)}$ ,  $P_2^{(0)}$  и  $p^{(0)}$ . В этом случае приложенные нагрузки можно представить в виде экспоненциальных

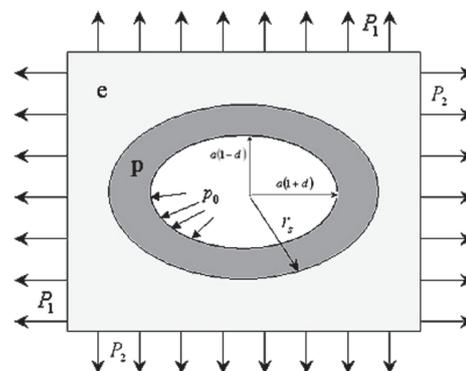


Рис. 1. Пластина, ослабленная эллиптической выточкой

рядов по некоторому параметру  $t \in [0..T]$ , причем характеристики соответствующих рядов вычисляются согласно изменениям  $P_1, P_2$  и  $p$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^{(0)} + \sum_{k=1}^n P_1^{(k)} e^{\omega_k t + \gamma_k}, \\ P_2 &= P_2^{(0)} + \sum_{k=1}^n P_2^{(k)} e^{\omega_k t + \gamma_k}, \\ p_0 &= p_0^{(0)} + \sum_{k=1}^n p_0^{(k)} e^{\omega_k t + \gamma_k}. \end{aligned} \quad (1).$$

Здесь  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_0^{(k)}$  ( $k = 0..n$ ) — постоянные давления бесконечной длительности;  $\omega_k, \gamma_k$  — известные вещественные константы. Поскольку напряжения на бесконечности и на внутреннем контуре пластины с течением времени стремятся к постоянным значениям  $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}$  и  $p^{(0)}$  полагаем, что  $\omega_k < 0$ . Причем, приложенные нагрузки тем интенсивнее, чем выше  $|\omega_k|$ .

Введём, согласно [2, 4, 6], малый параметр  $\delta$ :

$$\frac{q_1 - q_2}{2} = \delta q, \quad q_1 = \frac{P_1}{K}, \quad q_2 = \frac{P_2}{K}, \quad d = \delta d', \quad (2)$$

$K$  — предел пластичности материала.

Величины  $q$  и  $d'$  характеризуют отклонение от невозмущённого состояния.

Уравнение контура отверстия представим в виде [4, 5]

$$\begin{aligned} r_M &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r_M^{(n)} = \frac{a_* (1 - \delta^2 d'^2)}{\sqrt{1 - 2\delta d' \cos 2\theta + 2\delta^2 d'^2}} = \\ &= a_* \left[ 1 + \delta d' \cos 2\theta + \frac{3}{4} \delta^2 d'^2 (1 - \cos 4\theta + \dots) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

$a_* = \frac{a}{r_s}$ ,  $r_s$  — радиус упруго-пластической границы.

В нулевом приближении, согласно [2, 3], имеет место осесимметричное состояние пластины. Определим для данного приближения компоненты тензора напряжений и вектора перемещений.

Система уравнений, описывающая процесс деформирования рассматриваемой задачи, в нулевом приближении, согласно [6], имеет вид.

Уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{r} = 0. \quad (4)$$

Соотношения Коши

$$\varepsilon_r^{(0)} = \frac{du^{(0)}}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{r}, \quad u^{(0)} = u_r^{(0)}. \quad (5)$$

Закон Гука для напряжений в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= 2\varepsilon_r^{(0)} + \lambda_0 (\varepsilon_r^{(0)} + \varepsilon_\theta^{(0)}), \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2\varepsilon_\theta^{(0)} + \lambda_0 (\varepsilon_r^{(0)} + \varepsilon_\theta^{(0)}), \end{aligned} \quad (6)$$

$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\mu}$ ;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе.

Соотношения для полных деформаций в пластической области

$$\varepsilon_r^{(0)} = \varepsilon_r^{p(0)} + \varepsilon_r^{e(0)}, \quad \varepsilon_\theta^{(0)} = \varepsilon_\theta^{p(0)} + \varepsilon_\theta^{e(0)}, \quad (7)$$

Функция нагружения для сжимаемого упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_1^{(0)} + \sqrt{(S_{ij}^{(0)} - c_0 e_{ij}^{p(0)} - \eta_0 \dot{e}_{ij}^{p(0)}) (S_{ij}^{(0)} - c_0 e_{ij}^{p(0)} - \eta_0 \dot{e}_{ij}^{p(0)})} - \\ - K_0 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\alpha$  — скорость дилатансии;  $S_{ij}, e_{ij}$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций;  $c_0, \eta_0$  — параметры упрочнения и вязкости;  $K_0$  — предел пластичности.

Ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p(0)} = \xi^{(0)} \left( \frac{\alpha}{3} + \frac{S_{ij}^{(0)} - c_0 e_{ij}^{p(0)} - \eta_0 \dot{e}_{ij}^{p(0)}}{K_0 - \alpha \sigma_1} \right) + \Psi \dot{\sigma}_1^{(0)}, \quad (9)$$

$\Psi$  — функция объемного сжатия. В дальнейшем полагаем  $\Psi = \text{const}$ .

Граничные условия и условия сопряжения на упруго-пластической границе для нулевого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p(0))} \Big|_{r=a_*^{(0)}} = p_0, \quad \sigma_r^{(e(0))} \Big|_{r \rightarrow \infty} = P_0, \\ [\sigma_r^{(0)}] \Big|_{r=1} = 0, \quad [\sigma_\theta^{(0)}] \Big|_{r=1} = 0, \quad [u^{(0)}] \Big|_{r=1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $a_*^{(0)} = \frac{a}{r_s^{(0)}}$ ;  $r_s^{(0)}$  — радиус упруго-пластической границы в нулевом приближении; квадратные скобки обозначают разность между упругими и пластическими составляющими соответствующих компонент тензоров.

В качестве начального условия используется предположение о том, что в начальный момент времени  $t_*$  зарождение пластической зоны происходит от границы полости, то есть:

$$a_*^{(0)} \Big|_{t=t_*} = 1. \quad (11),$$

Используя соотношения Коши (5), закон Гука (6) получаем зависимость компонент тензора напряжений в упругой области

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(0)} &= (2 + \lambda_0) \frac{du^{(0)}}{dr} + \lambda_0 \frac{u^{(0)}}{r}, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \lambda_0 \frac{du^{(0)}}{dr} + (2 + \lambda_0) \frac{u^{(0)}}{r}.\end{aligned}\quad (12)$$

Поставляя (12) в уравнение равновесия (4), выводим

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(0)}}{dr} - \frac{u^{(0)}}{r^2} = 0. \quad (13)$$

Согласно (1), представим искомые функции в виде

$$\Phi(r, t) = \Phi^{(0)}(r) + \sum_{k=1}^n \Phi^{(k)}(r) e^{\omega_k t + \gamma_k}. \quad (14)$$

Решая уравнение (13) с учетом (14), получаем вид компонент тензора перемещений в упругой области в нулевом приближении

$$u^{(e)(0)} = \frac{a_{11}^{(0)}}{r} + a_{12}^{(0)} r + \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_{11}^{(k)}}{r} + a_{12}^{(k)} r \right) e^{\omega_k t + \gamma_k}, \quad (15)$$

здесь  $a_{ij}^{(k)}$  — константы интегрирования.

Учитывая (12) и (15), выводим

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(e)(0)} &= 2(1 + \lambda_0) a_{12}^{(0)} - 2 \frac{a_{11}^{(0)}}{r} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \left( (1 + \lambda_0) a_{12}^{(k)} - \frac{a_{11}^{(k)}}{r} \right) e^{\omega_k t + \gamma_k}, \\ \sigma_\theta^{(e)(0)} &= 2(1 + \lambda_0) a_{12}^{(0)} + \frac{a_{11}^{(0)}}{r} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \left( 2(1 + \lambda_0) a_{12}^{(k)} + \frac{a_{11}^{(k)}}{r} \right) e^{\omega_k t + \gamma_k}.\end{aligned}\quad (16)$$

Из осевой симметрии в нулевом приближении, следует, что  $\sigma_z^{(0)} = 0$ ,  $\epsilon_z^{(0)} = 0$ ,  $S_z^{(0)} = -(S_r^{(0)} + S_\theta^{(0)})$ ,  $e_z^{(0)} = -(e_r^{(0)} + e_\theta^{(0)})$ .

Положим

$$\begin{aligned}\frac{S_r^{(0)} - c_0 e_r^{p(0)} - \eta_0 e_r}{K_0 - \alpha \sigma_1^{(0)}} &= f_1, \\ \frac{S_\theta^{(0)} - c_0 e_\theta^{p(0)} - \eta_0 e_\theta}{K_0 - \alpha \sigma_1^{(0)}} &= f_2.\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь  $f_1, f_2$  — константы, удовлетворяющие уравнению

$$f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2 = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

В этом случае функция нагружения (8) тождественно удовлетворяется.

С учетом (17), соотношения ассоциированного закона пластического течения (9) принимают вид

$$\dot{\epsilon}_r^p = \xi \left( \frac{\alpha}{3} + f_1 \right) + \Psi \dot{\sigma}_1, \quad \dot{\epsilon}_\theta^p = \xi \left( \frac{\alpha}{3} + f_2 \right) + \Psi \dot{\sigma}_1. \quad (19)$$

Используя соотношения (14) и (17), а также (19), выводим зависимость компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций в пластической области в нулевом приближении.

$$\sigma_\theta^{(k)(0)} = \frac{1}{l^{(k)}} \left( l_{21}^{(k)(p)(0)} \frac{d u}{dr} + l_{22}^{(k)(p)(0)} \frac{u}{r} + \chi_2^{(k)} \right), \quad (20)$$

$$\sigma_r^{(k)(0)} = \frac{1}{l^{(k)}} \left( l_{11}^{(k)(p)(0)} \frac{d u}{dr} + l_{12}^{(k)(p)(0)} \frac{u}{r} + \chi_1^{(k)} \right),$$

$$\chi_1^{(k)} = \begin{cases} 3l_{13}^{(0)} K_0, & k = 0; \\ 0, & k > 0; \end{cases} \quad \chi_2^{(k)} = \begin{cases} 3l_{23}^{(0)} K_0, & k = 0; \\ 0, & k > 0; \end{cases} \quad k = 0..n.$$

$$l^{(0)} = 3(2 + c_0) [2\alpha(f_1 + f_2)(1 + \lambda_0) + 2\lambda_0 + c_0 + 2],$$

$$l_{11}^{(0)} = 4c_0\alpha(f_1 + 2f_2)(1 + \lambda_0) + 3c_0^2(2 + \lambda_0) + 12c_0(1 + \lambda_0),$$

$$l_{12}^{(0)} = 4c_0\alpha(2f_1 + f_2)(1 + \lambda_0) - 3c_0^2\lambda_0,$$

$$l_{13}^{(0)} = f_1(c_0[4 + 3\lambda_0] + 8[1 + \lambda_0]) + f_2(c_0[2 + 3\lambda_0] + 4[1 + \lambda_0]),$$

$$l_{21}^{(0)} = 4c_0\alpha(f_1 + 2f_2)(1 + \lambda_0) - 3c_0^2\lambda_0,$$

$$l_{22}^{(0)} = 4c_0\alpha(2f_1 + f_2)(1 + \lambda_0) + 6c_0(2 + c_0) + 3c_0\lambda_0(c_0 + 4),$$

$$l_{23}^{(0)} = f_1(\lambda_0[4 + 3c_0] + 2[2 + c_0]) + f_2(c_0[4 + 3\lambda_0] + 8[1 + \lambda_0]),$$

$$l^{(k)} = 3[2\alpha(1 + \lambda_0)(f_1 + f_2) + 2 + \eta_0\omega_k + c_0 + 2\lambda_0] \times (\eta_0\omega_k + c_0),$$

$$l_{11}^{(k)} = 4\alpha(f_1 + 2f_2)(1 + \lambda_0)(c_0 + \eta_0\omega_k) + 3(\lambda_0 + 2)(c_0^2 + \eta_0^2\omega_k^2) + 12c_0(1 + \lambda_0) + 6\eta_0\omega_k[2(1 + \lambda_0) + c_0(2 + \lambda_0)],$$

$$l_{12}^{(k)} = 4\alpha(2f_1 + f_2)(1 + \lambda_0)(c_0 + \eta_0\omega_k) - 3\lambda_0(c_0 + \eta_0\omega_k)^2,$$

$$l_{21}^{(k)} = 3\lambda_0(c_0 + \eta_0\omega_k)^2 - 4\alpha(f_1 + 2f_2)(1 + \lambda_0)(c_0 + \eta_0\omega_k),$$

$$\begin{aligned}
 l_{22}^{(k)} &= 4\alpha(2f_1 + f_2)(1 + \lambda_0)(c_0 + \eta_0 \omega_k) + \\
 &+ 3(\lambda_0 + 2)(c_0^2 + \eta_0^2 \omega_k^2) + 12c_0(1 + \lambda_0) + \\
 &+ 6\eta_0 \omega_k [2(1 + \lambda_0) + c_0(2 + \lambda_0)], \\
 b^{(k)} &= 3[\eta_0 \omega_k(2\alpha + 3f_1 + 3f_2) + 6\alpha(1 + \lambda_0)(f_1 + f_2)^2 + \\
 &+ (f_1 + f_2)[2(1 + \lambda_0)(3 + 2\alpha^2) + 3c_0] + \\
 &+ 2\alpha(2 + 2\lambda_0 + c_0)], \\
 b_1^{(k)} &= 2\omega_k(1 + \lambda_0)[9\alpha(f_1 + f_2) - 2\Psi(\eta_0 \omega_k + c_0) + 9], \\
 &k = 1..n.
 \end{aligned}$$

Подставляя (20) в (4), выводим уравнения для определения компонент перемещений в пластической области в нулевом приближении  $u^{(k)(p)(0)}$ ,  $k = 0..n$ .

$$m_1^{(0)} \frac{d^2 u^{(0)}}{dr^2} + \frac{m_2^{(0)}}{r} \frac{d u^{(0)(p)(0)}}{dr} - m_3^{(0)} \frac{u^{(0)(p)(0)}}{r^2} + \frac{m_4^{(0)}}{r} K_0 = 0, \quad (21)$$

$$l_{11}^{(k)} \frac{d^2 u^{(k)(p)(0)}}{dr^2} + \frac{l_{11}^{(k)} - (l_{12}^{(k)} + l_{21}^{(k)})}{r} \frac{d u^{(k)(p)(0)}}{dr} + l_{22}^{(k)} \frac{u^{(k)(p)(0)}}{r^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 &k = 1..n; \\
 &m_1^{(0)} =
 \end{aligned}$$

$$= c_0 [4\alpha(1 + \lambda_0)(f_1 + 2f_2) + 12(1 + \lambda_0) + 3c_0(\lambda_0 + 2)],$$

$$m_2^{(0)} = 3c_0 [4(\lambda_0 + 1)(\alpha f_2 + 1) + c_0(\lambda_0 + 2)],$$

$$m_3^{(0)} = 4\alpha c_0(1 + \lambda_0)(2f_1 + f_2) + 12c_0(1 + \lambda_0) + 3c_0^2(2 + \lambda_0),$$

$$m_4^{(0)} = 6(2 + 2\lambda_0 + c_0)(f_1 - f_2).$$

Решая (21), получаем

$$u^{(0)(p)(0)} = \frac{a_{21}^{(0)}}{r} + a_{22}^{(0)} r^{n_0} + \frac{3(2 + 2\lambda_0 + c_0)}{4c_0\alpha(1 + \lambda_0)} r K_0, \quad (22)$$

$$u^{(k)(p)(0)} = \frac{a_{21}^{(k)}}{r} + a_{22}^{(k)} r^{n_k},$$

$$n_0 = \frac{4\alpha(1 + \lambda_0)(2f_1 + f_2) + 12(1 + \lambda_0) + 3c_0(2 + \lambda_0)}{4\alpha(1 + \lambda_0)(f_1 + 2f_2) + 12(1 + \lambda_0) + 3c_0(2 + \lambda_0)},$$

$$n_k = \frac{3(\lambda_0 + 2)(\eta_0 \omega_k + c_0) + 4(\lambda_0 + 1)[\alpha(2f_1 + f_2) + 3]}{3(\lambda_0 + 2)(\eta_0 \omega_k + c_0) + 4(\lambda_0 + 1)[\alpha(f_1 + 2f_2) + 3]},$$

$$k = 1..n.$$

Компоненты тензора напряжений в пластической области в нулевом приближении, согласно (20), примут вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(0)(p)(0)} &= \frac{1}{l^{(0)}} \left[ -\frac{l_{11}^{(0)} + l_{12}^{(0)}}{r^2} a_{21}^{(0)} + \left( n_0 l_{11}^{(0)} - l_{12}^{(0)} \right) a_{22}^{(0)} r^{n_0-1} \right] + \\
 &+ \frac{3K_0}{4 l^{(0)} c_0 \alpha (1 + \lambda_0)} \times \\
 &\times \left[ (2 + 2\lambda_0 + c_0) \left( l_{11}^{(0)} - l_{12}^{(0)} \right) + 4c_0 \alpha l_{13}^{(0)} (1 + \lambda_0) \right], \\
 \sigma_\theta^{(0)(p)(0)} &= \frac{1}{l^{(0)}} \left[ \frac{l_{21}^{(0)} + l_{22}^{(0)}}{r^2} a_{21}^{(0)} - \left( n_0 l_{21}^{(0)} - l_{22}^{(0)} \right) a_{22}^{(0)} r^{n_0-1} \right] + \\
 &+ \frac{3K_0}{4 l^{(0)} c_0 \alpha (1 + \lambda_0)} \times
 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\times \left[ (2 + 2\lambda_0 + c_0) \left( l_{21}^{(0)} - l_{22}^{(0)} \right) + 4c_0 \alpha l_{23}^{(0)} (1 + \lambda_0) \right],$$

$$\sigma_r^{(k)(p)(0)} = \frac{1}{l^{(k)}} \left[ \frac{l_{12}^{(k)} + l_{11}^{(k)}}{r^2} a_{21}^{(k)} + \left( n_k l_{11}^{(k)} - l_{12}^{(k)} \right) a_{22}^{(k)} r^{n_k-1} \right],$$

$$\sigma_\theta^{(k)(p)(0)} = \frac{1}{l^{(k)}} \left[ \frac{l_{22}^{(k)} + l_{21}^{(k)}}{r^2} a_{21}^{(k)} + \left( n_k l_{21}^{(k)} - l_{22}^{(k)} \right) a_{22}^{(k)} r^{n_k-1} \right],$$

$$k = 1..n.$$

Таким образом, соотношения (15)—(16), (18), (22)—(23), с учетом граничных условий и условий сопряжения (10), полностью описывают напряженно-деформированное состояние рассматриваемой задачи в нулевом приближении.

Определим первое приближение. Рассмотрим пластическую область.

Граничные условия на внутреннем контуре полости, на бесконечности, а также условия неразрывности на упруго-пластической границе, для компонент тензоров напряжений первого приближения, в соответствии с [2, 4, 6], запишутся в следующем виде:

при  $r = 1$

$$\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} a_*^{(0)} d' \cos 2\theta = 0,$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} + 2(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}) d' \sin 2\theta = 0,$$

при  $r \rightarrow \infty$

$$\sigma_r^{(1)} = -\frac{P_1 - P_2}{K} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{P_1 - P_2}{K} \sin 2\theta; \quad (24)$$

при  $r = a_*^{(1)}$ ,

$$\left[ \sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} \right] = 0, \quad \left[ \sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{dr} \right] = 0, \quad [\tau_{r\theta}^{(1)}] = 0. \quad (25)$$

Введём, согласно [4—5], функцию напряжений Эри Э. Тогда компоненты девиатора тензора напряжений в первом приближении, первой итерации запишутся так

$$S_{ij}^{(k)(p)(1)} = -\mathcal{E}_{,ij}^{(k)(1)} + \delta_{ij} \mathcal{E}_{,ll}^{(k)(1)}, \quad (i, j, l = 1, 2; k = 0..n). \quad (26)$$

Согласно [5—6], система уравнений для определения Э имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}^{(k)(1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}^{(k)(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{(k)(1)}}{\partial \theta^2} = \Omega^{(k)(1)}, \quad k = 0..n. \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)(1)} &= \frac{l_{11}^{(0)} + l_{12}^{(0)} + l_{21}^{(0)} + l_{22}^{(0)}}{l^{(0)} r^2} a_{21}^{(0)} - \\ &- \frac{1}{l^{(0)}} \left[ n_0 (l_{21}^{(0)} + l_{11}^{(0)}) - (l_{12}^{(0)} + l_{22}^{(0)}) \right] a_{22}^{(0)} r^{n_0-1} + \kappa, \\ \kappa &= \frac{3K_0 \left[ (2 + 2\lambda_0 + c_0) (l_{21}^{(0)} + l_{12}^{(0)} - l_{11}^{(0)} - l_{22}^{(0)}) + \right. \\ &\quad \left. + 4c_0 \alpha (1 + \lambda_0) (l_{23}^{(0)} - l_{13}^{(0)}) \right]}{4l^{(0)} c_0 \alpha (1 + \lambda_0)}, \\ \Omega^{(k)(1)} &= \frac{l_{22}^{(k)} + l_{21}^{(k)} - l_{12}^{(k)} - l_{11}^{(k)}}{l^{(k)} r^2} a_{21}^{(k)} - \\ &- \frac{1}{l^{(k)}} \left[ (n_2^{(k)} l_{21}^{(k)} + l_{22}^{(k)}) r^{n_2^{(k)}-1} - (n_1^{(k)} l_{11}^{(k)} + l_{12}^{(k)}) r^{n_1^{(k)}-1} \right]. \end{aligned}$$

Решая уравнения (27), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(0)(1)} &= (d_{11}^{(0)} r \cos \varphi + d_{12}^{(0)} r \sin \varphi) \cos(2\theta) + d_{21}^{(0)} + \\ &+ d_{22}^{(0)} r + \frac{\ln r}{2l^{(0)}} (l_{11}^{(0)} + l_{12}^{(0)} + l_{21}^{(0)} + l_{22}^{(0)}) a_{21}^{(0)} - \\ &- \frac{n_0 (l_{21}^{(0)} + l_{11}^{(0)}) - (l_{22}^{(0)} + l_{12}^{(0)})}{l^{(0)} (n_0^2 - 1)} r^{n_0+1} a_{22}^{(0)} + \\ &+ \frac{r^2}{2} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \kappa, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(k)(1)} &= (d_{11}^{(k)} r \cos \varphi + d_{12}^{(k)} r \sin \varphi) \cos(2\theta) + d_{21}^{(k)} + d_{22}^{(k)} r + \\ &+ \frac{\ln r}{2l^{(k)}} (l_{22}^{(k)} + l_{21}^{(k)} - l_{12}^{(k)} - l_{11}^{(k)}) a_{21}^{(k)} + \\ &+ \left[ \frac{(l_{12}^{(k)} - n_1^{(k)} l_{11}^{(k)}) r^{n_1^{(k)}+1}}{l^{(k)} (n_1^{(k)2} - 1)} - \frac{(l_{22}^{(k)} - n_2^{(k)} l_{21}^{(k)}) r^{n_2^{(k)}+1}}{l^{(k)} (n_2^{(k)2} - 1)} \right] a_{22}^{(k)}, \end{aligned}$$

$\varphi = \sqrt{3} \ln r$ ,  $d_{11}^{(k)}$ ,  $d_{12}^{(k)}$  — произвольные константы  $k=0..n$ .

Учитывая (28) из (26), получаем вид компонент тензора напряжений в пластической области первого приближения

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(0)(p)(1)} &= \frac{1}{r} \left[ (\sqrt{3} \sin \varphi + 3 \cos \varphi - 8r^2 \cos \varphi) d_{11}^{(0)} - \right. \\ &- \left. (\sqrt{3} \cos \varphi - 3 \sin \varphi + 8r^2 \sin \varphi) d_{12}^{(0)} \right] \cos 2\theta - \\ &- 4d_{22}^{(0)} + \frac{l_{11}^{(0)} + l_{12}^{(0)} + l_{21}^{(0)} + l_{22}^{(0)}}{2l^{(0)} r^2} a_{21}^{(0)} - \frac{n_0 (n_0 + 1) (n_0^2 - 1)}{l^{(0)}} \times \\ &\times \left[ n_0 (l_{11}^{(0)} - l_{21}^{(0)}) + l_{12}^{(0)} + l_{22}^{(0)} \right] r^{n_0-1} a_{22}^{(0)} - \left( \ln r + \frac{1}{2} \right) \kappa, \\ \tau_{r\theta}^{(0)(p)(1)} &= 2 \left[ (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) d_{11}^{(0)} + \right. \\ &+ \left. (\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) d_{12}^{(0)} \right] \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)(p)(1)} &= \frac{2}{r} \left[ (\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi - 2r^2 \sin \varphi) d_{12}^{(k)} - \right. \\ &- \left. (\sqrt{3} \sin \varphi - 3 \cos \varphi + 2r^2 \cos \varphi) d_{11}^{(k)} \right] \cos 2\theta + \\ &+ 4d_{22}^{(k)} + \frac{l_{22}^{(k)} + l_{21}^{(k)} - l_{11}^{(k)} + l_{12}^{(k)}}{l^{(k)} r^2} a_{21}^{(k)} - \\ &- \frac{2}{r^2 l^{(k)}} \left[ \frac{n_1^{(k)} (n_1^{(k)} l_{11}^{(k)} - l_{12}^{(k)})}{n_1^{(k)} - 1} r^{n_1^{(k)}-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{n_2^{(k)} (l_{22}^{(k)} - n_2^{(k)} l_{21}^{(k)})}{n_1^{(k)} - 1} r^{n_2^{(k)}-1} \right] a_{22}^{(k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(k)(p)(1)} &= -\frac{1}{r} \left[ (\sqrt{3} \sin \varphi + 3 \cos \varphi + 8r^2 \sin \varphi) d_{11}^{(k)} + \right. \\ &+ \left. (\sqrt{3} \sin \varphi - 3 \cos \varphi + 8r^2 \cos \varphi) d_{12}^{(k)} \right] \cos 2\theta + \\ &+ 2d_{22}^{(k)} + \frac{l_{22}^{(k)} + l_{21}^{(k)} - l_{11}^{(k)} + l_{12}^{(k)}}{l^{(k)} r^2} a_{21}^{(k)} - \\ &- \frac{2}{r^2 l^{(k)}} \left[ \frac{n_1^{(k)} (n_1^{(k)} l_{11}^{(k)} - l_{12}^{(k)})}{n_1^{(k)} - 1} r^{n_1^{(k)}-1} + \right. \\ &+ \left. \frac{n_2^{(k)} (l_{22}^{(k)} - n_2^{(k)} l_{21}^{(k)})}{n_1^{(k)} - 1} r^{n_2^{(k)}-1} \right] a_{22}^{(k)}, \\ \tau_{r\theta}^{(k)(p)(1)} &= 2 \left[ (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) d_{11}^{(k)} + \right. \\ &+ \left. (\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) d_{12}^{(k)} \right] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Найдём решение в упругой области.

Аналогично нулевому приближению, из соотношений Коши (5) и закона Гука (6), выведем

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)(1)(e)} &= (2 + \lambda_0) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda_0}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\lambda_0}{r} u_r, \\ \sigma_{\theta}^{(k)(1)(e)} &= \lambda_0 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2 + \lambda_0}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2 + \lambda_0}{r} u_r, \\ \tau_{r\theta}^{(k)(1)(e)} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (4), выводим систему уравнений, для определения компонент тензора перемещений в упругой области, в первом приближении.

$$\begin{aligned} (2 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda_0}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 + \lambda_0}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \\ - \frac{2 + \lambda_0}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 + \lambda_0}{r^2} u_r = 0, \\ \frac{2 + \lambda_0}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 + \lambda_0}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{4 + \lambda_0}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_\theta = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$k = 0..n.$

Решая (31) с учетом вида граничных условий (24), получаем

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i} \cos 2\theta + \frac{d_{41}^{(k)}}{r} + d_{42}^{(k)} r, \\ u_\theta &= \sum_{i=1}^4 g_i d_{3i}^{(k)} r^{s_i} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $s_i$  — величины, удовлетворяющие уравнению  $(2 + \lambda_0)(s_i^4 - 6s_i^2 - 3) - 8s_i = 0$ ,  $g_i = -\frac{(s_i^2 - 1)(2 + \lambda_0)}{2[\lambda_0(s_i - 1) - 2]}$ ,  $d_{3i}^{(k)}$  — константы интегрирования ( $k = 0..n, i = 1..4$ ).

Согласно (30), (32), компоненты напряжений в упругой области в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [(2 + \lambda_0)s_i + (2g_i + 1)] \cos 2\theta - \\ &- 2 \frac{d_{41}^{(k)}}{r^2} + 2(1 + \lambda_0) d_{42}^{(k)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [(2 + \lambda_0)(1 + 2g_i) + \lambda_0 s_i] \cos 2\theta + \\ &+ 2 \frac{d_{41}^{(k)}}{r^2} + 2(1 + \lambda_0) d_{42}^{(k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 2 \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [g_i (s_i - 1) - 2] \sin 2\theta, \\ &k = 0..n. \end{aligned}$$

Интегрируя соотношения ассоциированного закона пластического течения (9), для первого приближения выводим

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{2}{c_0} \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [g_i (s_i - 1) - 2] \sin 2\theta, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta}^{(k)(p)(1)} &= \frac{2\beta_k}{\omega_k + (c_0 + \eta_0 \omega_k) \beta_k} \times \\ &\times \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [g_i (s_i - 1) - 2] \sin 2\theta, \\ \beta_k &= \frac{a_{21}^{(k)} - a_{11}^{(k)}}{r^2} + a_{12}^{(k)} + a_{22}^{(k)} r^{n_k-1}, \quad k = 1..n. \end{aligned}$$

В соответствии с [5], представим перемещения в пластической области в следующем виде

$$u_r^{(k)(1)(p)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \theta}, \quad u_\theta^{(k)(1)(p)} = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial r}, \quad (35)$$

где  $W^{(k)} = W^{(k)}(r, \theta)$  — неизвестные функции,  $k = 0..n$ .

Используя (32), а также соотношения Коши (5), из (35) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial \theta^2} = \\ = 2 \left[ (\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi) d_{11}^{(0)} + (\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi) d_{12}^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial \theta^2} = G^{(k)},$$

$$\begin{aligned} G^{(k)} &= 4 \int_0^{\varepsilon_p^{(k)(0)}} \frac{\omega_k \beta_k \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [g_i (s_i - 1) - 2]}{\omega_k + (c_0 + \eta_0 \omega_k)} dr + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^4 d_{3i}^{(k)} r^{s_i-1} [g_i (s_i - 1) - 2]. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (36), получаем

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \frac{1}{73} \left[ (34d_{11}^{(0)} + 2\sqrt{3}d_{12}^{(0)}) r^2 \cos \varphi + \right. \\ &+ \left. (34d_{12}^{(0)} - 2\sqrt{3}d_{11}^{(0)}) r^2 \sin \varphi \right] \sin 2\theta + \\ &+ d_{51}^{(0)} + d_{52}^{(0)} \ln r, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} W^{(k)} &= \frac{r-1}{r} \int \frac{G^{(k)}(r) r^2}{(r-1)^2} dr \sin 2\theta + d_{51}^{(k)} + \frac{d_{52}^{(k)}}{r}, \\ &k = 1..n. \end{aligned}$$

Здесь  $d_{51}^{(k)}, d_{52}^{(k)}$  — произвольные константы ( $k = 0..n$ ).

Используя зависимость (37) и учитывая условия сопряжения (25), из (36) выводим

$$\begin{aligned} u_r^{(0)(1)(p)} &= -\frac{2}{73} \left[ (34d_{11}^{(0)} + 2\sqrt{3}d_{12}^{(0)}) r^2 \cos \varphi + \right. \\ &+ \left. (34d_{12}^{(0)} - 2\sqrt{3}d_{11}^{(0)}) r^2 \sin \varphi \right] \cos 2\theta + \end{aligned} \quad (38)$$

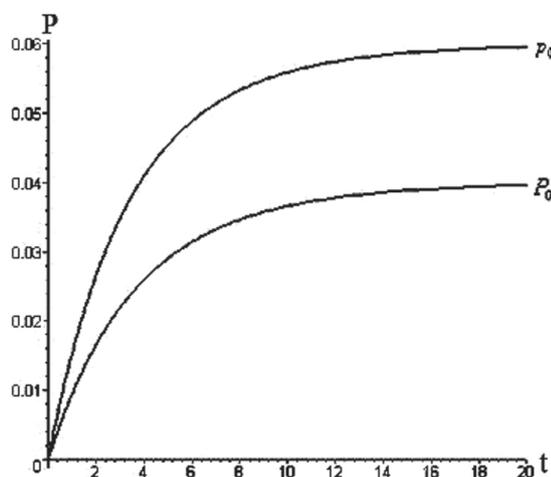
$$+ \frac{d_{41}^{(0)}}{r^2} + d_{42}^{(0)} r,$$

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{(0)(1)(p)} &= \frac{r}{73} \left[ (62d_{11}^{(0)} + 38\sqrt{3}d_{12}^{(0)}) \cos \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + (62d_{12}^{(0)} - 38\sqrt{3}d_{11}^{(0)}) \sin \varphi \right] \sin 2\theta, \\
 u_r^{(k)(1)(p)} &= 2 \frac{r-1}{r} \int \frac{G^{(k)}(r) r^2}{(r-1)^2} dr \cos 2\theta + \frac{d_{41}^{(k)}}{r} + d_{42}^{(k)} r, \\
 u_{\theta}^{(k)(1)(p)} &= \left[ \frac{G^{(k)}(r) r}{(r-1)} + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{r-1}{r} \right) \int \frac{G^{(k)}(r) r^2}{(r-1)^2} dr \right] \sin 2\theta, \\
 &\quad k = 1..n.
 \end{aligned}$$

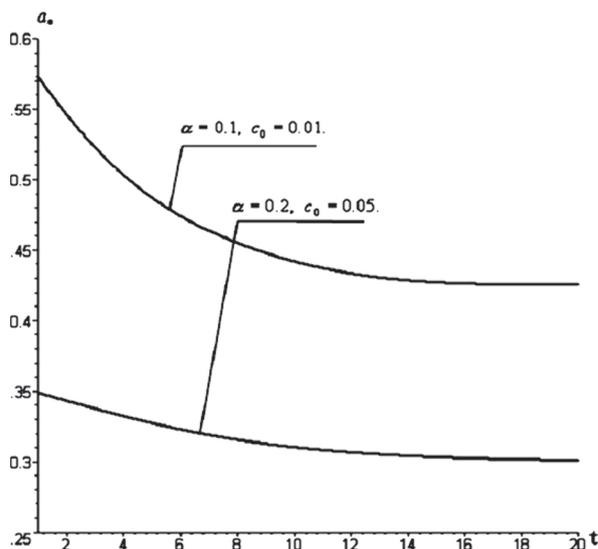
Соотношения (29), (32), (33), (38), с учетом граничных условий (24)—(25), определяют компоненты напряжений и перемещений в упругой и пластической областях в первом приближении.

Константы интегрирования  $a_{11}^{(k)}$ ,  $a_{12}^{(k)}$ ,  $a_{21}^{(k)}$ ,  $a_{22}^{(k)}$ ,  $d_{11}^{(k)}$ ,  $d_{12}^{(k)}$ ,  $d_{3i}^{(k)}$ ,  $d_{51}^{(k)}$ ,  $d_{51}^{(k)}$  ( $i = 1..4; k = 0..n$ ) и радиус раздела упругой и пластической зон  $r_s$  определяются численно, в соответствии с граничными условиями (10), (24), условиями сопряжения (25) и начальным условием (11).

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 2—3. При этом на рисунках с индексом «а» приведены, согласно (1), характерные зависимости от времени внешних  $P_1$ ,  $P_2$  и внутренних  $p_0$  нагрузок, а на рисунках с индексом «б» — соответствующее данным нагрузкам изменение величины  $a_* = \frac{a}{r_s}$  ( $r_s$  — текущий радиус упруго-пластической границы).

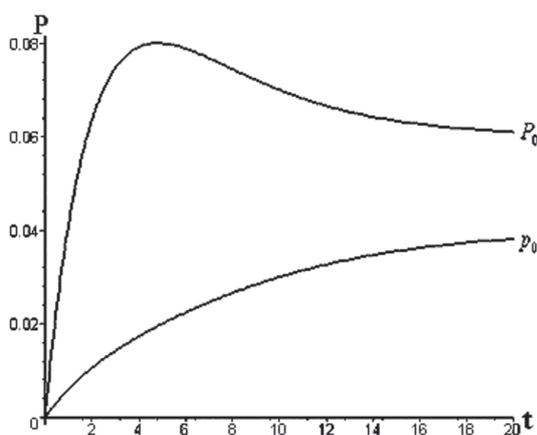


(а)

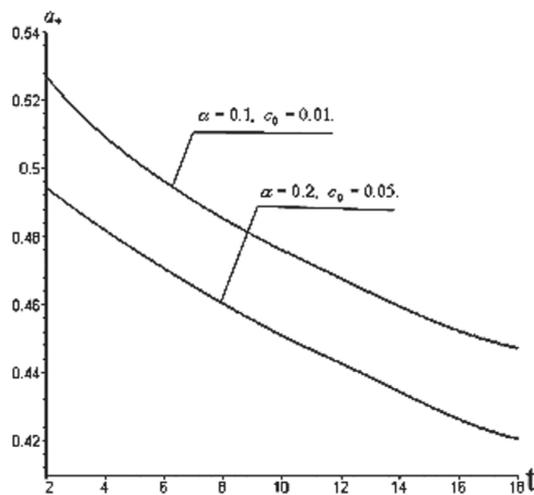


(б)

Рис. 2. Характер изменения нагрузок (вид I) (а), величина пластической области (б)



(а)



(б)

Рис. 3. Характер изменения нагрузок (вид II) (а), величина пластической области (б)

При моделировании нагрузок (рис. 2а—3а) выбирались следующие значения констант

$$P_0 = P_1 = \frac{P_2}{2}; \omega_k = -10^{-1}k, k = 1..3.$$

Значения безразмерных характеристик материала, соответствующих кривым на рис. 2б—рис. 3б., принимались, согласно [6], в виде:  $\delta = 0.06$ ;  $\lambda_0 = 1.5$ ;  $K_0 = 0.01$ ;  $\eta_0 = 0.01$ ;  $\alpha = 0.1; 0.20$ ,  $c_0 = 0.01, 0.05$ ;  $\Psi = K_0$ .

Анализ численного расчета показал:

увеличение скорости дилатансии  $\alpha$  при рассмотренном нагружении приводит к увеличению области пластического деформирования вокруг контура выточки от 5 (рис. 3б) до 29 % (рис. 2б);

вид нагружения оказывает существенное влияние на величину пластической области;

с течением времени радиус упруго-пластической границы стремится к постоянной величине, что обусловлено стабилизирующей ролью вязкости.

**Кривоченко Алексей Викторович** — кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Старооскольского филиала Воронежского государственного университета

Тел.: 8-951 -131-64-29

E-mail: avk-99@yandex.ru

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемов М. А.* Двуосное растяжение тонкой пластины с эллиптическим отверстием / М. А. Артемов // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. — Чебоксары, 1988. — С. 4—8.
2. *Асамидинов Ф. М.* Устойчивость массива возле горизонтальной горной выработки эллиптической формы при одноосном растяжении-сжатии / Ф. М. Асамидинов // Прикл. механика. — 1977. — Т. 13. — № 11. — С. 124—126.
3. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
4. *Гузь А. Н.* О задачах устойчивости горных выработок / А. Н. Гузь // Доклады АН УССР, Сер. А, — 1980, № 3, — С. 553—559.
5. *Спорыхин А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. — Воронеж : ВГУ. — 1997. — 361 с.
6. *Спорыхин А. Н.* Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород / А. Н. Спорыхин, А. И. Шашкин — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2004. — 232 с.

**Krivochenko Alexey V.** — Ph. D, teacher of Chair of applied mathematics and computer science of Voronezh State University Stary Oskol branch

Tel.: 8-951 -131-64-29

E-mail: avk-99@yandex.ru