УДК 517.9; 514.8

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СНИЗУ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

П. С. Зыков, П. Е. Киселева

Курский государственный университет

Поступила в редакцию 31.08.2009 г.

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для функционально-дифференциальных второго порядка на полном римановом многообразии вида $\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in F(t, m_t(\theta), \dot{m}_t(\theta))$. В качестве начального значения рассматривается C^1-гладкая кривая $\phi : [-h, 0] \to M$, а в качестве конечного — точка m_1, не сопряженная с $\phi(0)$ вдоль некоторой геодезической связности Леви—Чивита, $\frac{D}{dt}$ — ковариантная производная связности Леви—Чивита, а $F(t, m(\theta), X(\theta))$ — многозначное векторное поле имеющее замкнутые образы, которое задано на множестве пар, состоящем из непрерывной кривой $m(\theta)$ на M, $\theta \in [-h, 0]$ и векторного поля $X(\theta)$ вдоль $m(\theta)$, которое непрерывно слева и имеет предел справа. Поле F предполагается полунепрерывным снизу и имеющим равномерно квадратичный или менее чем квадратичный рост по скоростям.
Ключевые слова: Неподвижные точки; интегральные операторы; функционально-дифференциальные включения второго порядка; римановы многообразия; краевые задачи; несопряжённые точки.

Abstract. We investigate the boundary value problem for second order functional differential inclusions of the form $\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in F(t, m_t(\theta), \dot{m}_t(\theta))$ on a complete Riemannian manifold for a C^1-smooth curve $\phi : [-h, 0] \to M$ as initial value, and a point m_1 that is non-conjugate with $\phi(0)$ along at least one geodesic of Levi—Civita connection. Here $\frac{D}{dt}$ is the covariant derivative of Levi—Civita connection and $F(t, m(\theta), X(\theta))$ is a set-valued vector field with closed values that is lower semicontinuous and is given on couples: a continuous curve $m(\theta)$ in M, $\theta \in [-h, 0]$, and a vector field $X(\theta)$ along $m(\theta)$ that is continuous from the left and has limits from the right, under the assumption that F has uniformly quadratic or less than quadratic growth in velocity.
Keywords and phrases: Fixed points; integral operators; Riemannian manifolds; boundary value problem; second order functional differential inclusions; non-conjugate points.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — конечномерное риманово многообразие и TM — касательное расслоение с естественной проекцией $\pi : TM \to M$. Пусть $I = [-h, 0]$. Будем обозначать $D(I, TM)$ множество пар $(m(\theta), X(\theta))$, где $m(\theta)$ — непрерывная кривая на M и $X(\theta)$ — векторное поле вдоль этой кривой $m(\theta)$, которое непрерывно слева и имеет предел справа. Рассмотрим многозначное отображение $F : R \times D(I, TM) \multimap TM$ такое, что для каждой пары $(m(\theta), X(\theta))$ верно соотношение $\pi F(t, m(\theta), X(m(\theta)) = m(0)$. Будем называть F многозначным силовым полем. *

Пусть $l > 0$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{D}{dt}\dot{m}(t) \in F(t, m_t(\theta), \dot{m}_t(\theta)), \tag{1}$$

где $m(\cdot) : [-h, l] \to M$ и $t \in [0, l]$. Введем следующее обозначение: $m_t(\theta) = m(t + \theta)$, где $\theta \in I$. Далее мы будем предполагать, что F имеет равномерно квадратичный или менее чем квадратичный рост по скоростям на множествах из $D(I, TM)$ (см. определения 1, 2). Также будем предполагать, что F удовлетворяет условию полунепрерывности снизу и имеет выпуклые замкнутые образы.

Основная цель данной статьи — найти условия, при которых данная краевая задача разрешима при некотором $t_1 \in (0, l)$. Т.е. найти C^0-кривую $m(t)$, $t \in [-h, t_1]$, которая удовлетворяет (1) и такую, что $m(t) = \phi(t)$ для $t \in [-h, 0]$

и $m(t_1) = m_1$ где $\phi(\cdot)$ данная C^1-кривая, $t \in I$ и m_1 — данная точка.

Нужно заметить, что даже обычная двухточечная краевая задача для дифференциальных уравнений может быть неразрешима в случае, если граничные точки сопряжены вдоль любой геодезической связности Леви—Чивита (см например [1]). Поэтому далее в статье будем предполагать, что точки $\phi(0)$ и m_1 не сопряжены вдоль хотя бы одной из геодезических. В статье найдены условия связывающие расстояние между точками $\phi(0)$ и m_1, геометрические характеристики мнгообразия M и момент времени t_1 при котором задача разрешима. Имеются примеры дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывной правой частью, для которых данная задача разрешима на достаточно малом временном интервале и не разрешима на большом. Кроме того, задача может быть разрешима для точек, находящихся на достаточно малом расстоянии и не разрешима для точек, находящихся друг от друга на большом расстоянии.

Решение рассматриваемой задачи строится с помощью неподвижных точек оператора интегрального типа, который действует в пространстве $C^0(I, T_{\phi(0)}M)$.

Схожая задача рассматривалась в [2] при начальном условии — постоянная кривая $\phi(t)$ при $t \in [-h, 0]$, а правая часть уравнения (1) удовлетворяла условию: $\|F(t, m(\theta), X(\theta))\| \le$ $\le c(1 + \|X(\theta)\|^{\alpha})$ где $\alpha \in [0, 2)$.

Однозначное непрерывное поле f представляет собой частный случай введенного ранее многозначного поля F. Таким образом, условия разрешимости задачи сформулированные для включений будут верны и для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка вида $\frac{D}{dt}\dot{m}(t) = f(t, m_t, \dot{m}_t)$ с непрерывной правой частью.

2. ТЕХНИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим точку $m_0 \in M$. Пусть $v : [0,1] \to T_{m_0}M$ — непрерывная кривая. В [3] показано, что существует единственная C^1-кривая $m : [0,1] \to M$ такая, что $m(0) = m_0$ и вектор $\dot{m}(t)$ параллелен вдоль $m(\cdot)$ вектору $v(t) \in T_{m_0}M$ при любом $t \in [0,1]$. Обозначим кривую $m(t)$, полученную из кривой $v(t)$, описанным способом, символом $Sv(t)$. Таким образом, мы определили непрерывный оператор S, который переводит банахово пространство $C^0([0,1], T_{m_0}M)$ непрерывных отображений [0, 1] в $T_{m_0}M$ в банахово многообразие $C^1([0,1], M)$. Пусть точка $m_1 \in M$ не сопряжена с точкой $m_0 \in M$ вдоль геодезической связности Леви-Чивита $g(\cdot)$. Везде далее будем обозначать U_R шар в $C^0([0,t_1], T_{\phi(0)}M)$ с центром в нуле пространства и радиусом R.

Лемма 2.1. *Существует шар $U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}M)$ такой, что для любой кривой $\breve{u}(t) \in U_\varepsilon \subset C^0([0,1], T_{m_0}M)$ существует единственный вектор $\mathbf{C}_{\breve{u}}$, который лежит в некоторой ограниченной окрестности V вектора $\dot{g}(0)$ в $T_{m_0}M$, непрерывно зависящий от $\breve{u}$ и такой, что $S(\breve{u} + \mathbf{C}_{\breve{u}})(1) = m_1$.*

Введем обозначение $\sup_{\mathbf{C} \in V} \|\mathbf{C}\| = C$, где V из Леммы 1.

Замечание 2.1. *Легко показать, что $\varepsilon < C$.*

Отметим, что C характеризует расстояние между точками m_0 и m_1, а ε характеризует некоторые свойства римановой геометрии на M.

Лемма 2.2. *В условиях и обозначениях Леммы 1, пусть $R > 0$ и $t_1 > 0$ таковы что $t_1^{-1}\varepsilon > R$. Для любой кривой $u(\cdot) \in U_R \subset$ $\subset C^0([0,t_1], T_{m_0}M)$ существует единственный вектор C_u в окрестности $t_1^{-1}V$ вектора $t_1^{-1}\dot{g}(0)$ в $T_{m_0}M$, непрерывно зависящий от u, что $S(u + C_u)(t_1) = m_1$.*

Для данной кривой $\phi(\cdot)$ введем оператор $S_\phi : C^0([0,t_1], T_{\phi(0)}M) \to C^0([-h, t_1], M)$ следующим образом: $S_\phi(v(\cdot))(t) = \phi(t)$ при $t \in [-h, 0]$ и $S_\phi(v(\cdot))(t) = S(v(\cdot))(t)$ при $t \in [0, t_1]$.

Лемма 2.3. *Рассмотрим $t_1 > 0$, $R > 0$ удовлетворяющие условиям предыдущей Леммы. Пусть $\phi(\cdot) \in C^1(I, M)$. Все кривые $S_\phi(v + C_v)_t(\theta)$, где $v(\cdot) \in U_R \subset C^0([0,t_1], T_{\phi(0)}M)$ принимают значения в компактном множестве $\Xi \subset M$, которое зависит от ϕ, ε и C, введенных выше и не зависит от t_1.*

Доказательство. Очевидно, что длина $S_\phi(v + C_v)(\cdot)$ равна сумме длин $\phi(\cdot)$ и $S(v + C_v)(\cdot)$. Поскольку параллельный перенос сохраняет норму вектора, для любой кривой $v(\cdot) \in C^0([0,t_1], T_{\phi(0)}M))$ длина $S(v + C_v)(\cdot)$ не больше, чем $\int_0^{t_1}(R + \|C_v\|)dt \le \int_0^{t_1} t_1^{-1}(\varepsilon + C)dt =$ $= \int_0^1(\varepsilon + C)dt = \varepsilon + C$. Обозначим $N = \sup_{t \in I}\|\dot{\phi}(t)\|$. Легко увидеть, что длина $\phi(\cdot)$ не больше, чем Nh. Следовательно, все кривые $\|S_\phi(v + C_v)_t(\cdot)\|$ лежат в замкнутом подмножестве $\Xi \subset M$. Из полноты M и из теоремы Хопфа—Ринова следует что эти замкнутые множества компактны. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть дано действительное число a, удовлетворяющее неравенству $0 < a < \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$. Тогда существует достаточно малое положительное число φ такое, что $(\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) > 0$ и верно неравенство $a((\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) + C t_1^{-1})^2 < \varepsilon t_1^{-2} - \varphi t_1^{-1}$.*

Доказательство. Из формулировки Леммы получаем, что $a(\varepsilon t_1^{-1} + C t_1^{-1})^2 < \varepsilon t_1^{-2}$. Из непрерывности обеих сторон неравенства следует, что существует достаточно малое число $\varphi > 0$ такое, что $(\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) > 0$ и выполняется неравенство $a((\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) + C t_1^{-1})^2 < (\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) t_1^{-1} = \varepsilon t_1^{-2} - \varphi t_1^{-1}$. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть M — полное риманово многообразие. Введем обозначение: $\|X(\cdot)\| = \sup_{\theta \in I} \|X(\theta)\|$. Норму векторного поля $F(t, m, X) \in T_m M$ введем следующим образом:

$$\|F(t, m(\cdot), X(\cdot))\| = \sup_{y \in F(t, m(\cdot), X(\cdot))} \|y\|.$$

На $D(I, TM)$ будем использовать метрику Скорохода (см. например, [4], где описано пространство непрерывных справа функций, имеющих предел слева, в нашем случае конструкция аналогична).

Определение 3.1. *Будем говорить, что F имеет равномерно менее чем квадратичный рост по скоростям если на любом множестве $[0, l] \times \Theta$ при $\Theta \subset D(I, TM)$ таком, что все кривые $\{m(\cdot)\} = \pi\Theta$ принадлежат компактному множеству Ω из M, если для пары $(m(\cdot), X(\cdot))$ с любым фиксированным $\|X(\cdot)\|$ получаем, что $\sup_{(t, m(\cdot)) \in [0, l] \times \pi\Theta} \|F(t, m(\cdot), X(\cdot))\|$ конечен и имеет место соотношение:*

$$\lim_{\|X(\cdot)\| \to \infty} \frac{\sup_{(t, m(\cdot)) \in [0, l] \times \pi\Theta} \|F(t, m(\cdot), X(\cdot))\|}{\|X(\cdot)\|^2} = 0. \quad (2)$$

Определение 3.2. *Будем говорить, что поле F имеет равномерно квадратичный рост по скоростям, если на любом множестве $[0, l] \times \Theta$ при $\Theta \subset D(I, TM)$ таком, что все кривые $\{m(\cdot)\} = \pi\Theta$ принадлежат компактному множеству Ω из M, если для пары $(m(\cdot), X(\cdot))$ с любым фиксированным $\|X(\cdot)\|$ получаем, что $\sup_{(t, m(\cdot)) \in [0, l] \times \pi\Theta} \|F(t, m(\cdot), X(\cdot))\|$ конечен и существует положительное число $\delta = \delta(\Omega)$ такое, что:*

$$\lim_{\|X(\cdot)\| \to \infty} \frac{\sup_{(t, m(\cdot)) \in [0, l] \times \pi\Theta} \|F(t, m(\cdot), X(\cdot))\|}{\|X(\cdot)\|^2} = \delta. \quad (3)$$

Определение 3.3. *Многозначное отображение F будем называть полунепрерывным снизу в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(x') \cap V \neq \varnothing$*

Рассмотрим непрерывную кривую $v : [0, t_1] \longrightarrow T_{\phi(0)} M$. Построим C^1-кривую $\gamma(t) = S_\phi v(t)$ для $t \in [0, t_1]$. Заметим, что векторное поле $F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))$ задано для всех $t \in [0, t_1]$. Будем обозначать Γ оператор параллельного переноса векторов вдоль кривой $\gamma_t(\cdot)$ в точку $\gamma(0) = \phi(0)$. Применим оператор Γ ко всем множествам $F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))$ вдоль $\gamma_t(\cdot)$, в результате для любой $v(\cdot) \in C^0([0, t_1], T_{m_0} M)$, получим отображение $\Gamma F S_\phi v : [0, t_1] \longrightarrow TM$, которое имеет выпуклые образы.

Множество всех измеримых сечений многозначного отображения $\Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot)) : [0, t_1] \to \to T_{m_0} M$, $\gamma(t) = S_\phi v(t)$ при некотором v будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{P}\Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot)) = \\ = \{y(t) \mid y(t) \in \Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))\}.$$

Поскольку векторное поле F удовлетворяет условию 1 или 2 и так как параллельный перенос сохраняет норму вектора, то все кривые v, принадлежащие $\mathcal{P}\Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))$ будут ограничены на отрезке $[0, t_1]$, то есть интегрируемы. Таким образом, отображение, переводящее $v(\cdot) \in C^0([0, t_1], T_{m0} M)$ в $\mathcal{P}\Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))$ будет многозначным отображением из $C^0([0, t_1], T_{m_0} M)$ в $L((I, \mathcal{A}, \mu), T_{m_0} M)$, где $\mathcal{A}$ — борелевская σ - алгебра и μ — нормализованная мера Лебега.

Тогда по теореме Бресано—Коломбо (см. [5]) оно имеет непрерывное сечение, которое обозначим $p\Gamma F(t, \gamma_t(\cdot), \dot{\gamma}_t(\cdot))$. Определим аналогично [6] оператор $G(v) = \int_0^t p\Gamma F(s, S_\phi(v(s) + C_v), \frac{d}{dt} S_\phi(v(s) + C_v)) ds$, определенный на некотором шаре U_K, где $t_1^{-1}\varepsilon > K$. Как и в [6] можно показать, что оператор G вполне непрерывен.

Теорема 3.4. *Пусть точки $\phi(0)$ и m_1 не сопряжены вдоль некоторой геодезической связности Леви—Чивита. Пусть $F(t, m(\cdot), X(\cdot))$ является полунепрерывным снизу, имеет замкнутые образы и удовлетворяет условию. Тогда для достаточно малого $t_1 > 0$ будет су-*

ществовать решение $m(t)$ включения (1) такое, что $m(t) = \phi(t)$ при $t \in I$, и $m(t_1) = m_1$.

Доказательство. Пусть $\phi(0)$ и m_1 не сопряженны вдоль некоторой геодезической связности Леви—Чивита, тогда определены числа ε и C из Леммы 2.1. Обозначим Θ подмножество в $D(I, TM)$ такое, что все кривые из $\pi\Theta$ принадлежат компакту Ξ из Леммы 2.3. Пусть $a < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$. Пусть $N = \sup_{t \in I} \|\dot{\phi}(t)\|$. Из условия (1) получаем, что существует положительное число Q такое, что справедливо следующее неравенство: $N < Q$ и для любых C^1-кривых $m(\cdot)$ и $n(\cdot)$ из $\pi\Theta$ таких, что $\|\dot{m}(\cdot)\| > \|\dot{n}(\cdot)\|$ и $\|\dot{m}(\cdot)\| > Q$, получаем $\|F(t, n(\cdot), \dot{n}(\cdot))\| < a\|\dot{m}(\cdot)\|^2$. Возьмем достаточно малое положительное число t_1 такое, что оно удовлетворяет следующим условиям: $t_1 \in [0, l]$ и $t_1^{-1}\varepsilon - \varphi > Q$, где φ — число из Леммы 2.4. Рассмотрим шар $U_R \subset C^0([0, t_1], T_{m_0}M)$, где $R = t_1^{-1}\varepsilon - \varphi$. При таком R по Лемме 2.2 для любой $v(\cdot) \in U_R$ корректно определен оператор S_ϕ. Так как параллельный перенос сохраняет норму векторов, то из конструкции S_ϕ и Леммы 2.4 получаем, что для любой $v(\cdot) \in U_R$ и $t \in [0, t_1]$ выполняется следующая оценка:

$$\left\| F(t, S_\phi(v + C_v)_t(\theta), \frac{d}{d\theta} S_\phi(v + C_v)_t(\theta)) \right\| <$$
$$< a((\varepsilon t_1^{-1} - \varphi) + C t_1^{-1})^2 < (\varepsilon t_1^{-2} - \varphi t_1^{-1}).$$

Из полученной оценки, для любой $v(\cdot) \in U_R$ и $t \in [0, t_1]$ при заданном F, получаем:

$$\left\| \int_0^t \rho\Gamma F(s, S_\phi(v(s) + C_v), \frac{d}{dt} S_\phi(v(s) + C_v)) ds) \right\|_{C^0([0,t_1], T_{m_0}M)} \le$$
$$\le (t_1^{-1}\varepsilon - \varphi) = R.$$

Следовательно, оператор G переводит шар в себя и, следуя классическому принципу Шаудера, получаем, что будет существовать неподвижная точка $u(\cdot) \in U_R$. Тогда $m(t) = S_\phi(u(t) + C_u)$ является решением для которого $m(\cdot) = \phi(\cdot)$ для $t \in [-h, 0]$ и $m(t_1) = m_1$.

Следствие 1. *Утверждение теоремы 3.4 будет справедливо и для F, не являющегося менее чем равномерно квадратично растущим по скоростям, но удовлетворяющего условию 1 на Θ, таком, что все кривые из $\pi\Theta$ принадлежат компакту Ξ из Леммы 2.3.*

Действительно, при доказательстве теоремы рассматривается $\Theta \subset D(I, TM)$ такой, что все кривые из $\pi\Theta$ принадлежат компакту Ξ из Леммы 2.3.

Теорема 3.5. *Пусть точки $\phi(0)$ и m_1 не сопряжены вдоль некоторой геодезической связности Леви—Чивита. Пусть $F(t, m(\cdot), X(\cdot))$ является полунепрерывным снизу, имеет замкнутые образы и удовлетвояет условию 3.2. Пусть $\delta < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + C)^2}$. Тогда при достаточно малом $t_1 > 0$ существует такое решение $m(t)$ включения (1), что $m(\cdot) = \phi(\cdot)$ для $t \in I$ и $m(t_1) = m_1$.*

Доказательство. Воспользуемся числами ε, C, N и множеством Θ определенными при доказательстве теоремы 3.4. Рассмотрим число $a > 0$ такое, что $\delta < a < \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+C)^2}$. Из условия (3) следует, что существует число $Q > 0$ такое, что $Q > N$ и для любых кривых $m(\cdot)$ и $n(\cdot)$ из Θ таких, что $\|\dot{m}(t)\| > \|\dot{n}(t)\|^2$ и $\|\dot{m}(t)\| > Q$, получаем $\|F(t, n(t), \dot{n}(t))\| < a\|\dot{m}(t)\|^2$. При достаточно малом положительном t_1 будут выполняться следующие условия: $t_1 \in [0, l]$ и $t_1^{-1}\varepsilon - \varphi > Q$, где φ — число из Леммы 3.4. Рассмотрим шар $U_R \subset C^0([0, t_1], T_{m_0}M)$, где $R = t_1^{-1}\varepsilon - \varphi$. Как и при доказательстве теоремы 4 будем использовать оператор $G(v) = \int_0^t \rho\Gamma F(s, S_\phi(v(s) + C_v), \frac{d}{dt} S_\phi(v(s) + C_v)) ds$.

Аналогично [6] легко показать, что этот оператор полунепрерывен снизу, имеет замкнутые образы и переводит замкнутые множества из $C^0([0, t_1], T_{\phi(0)}M)$ в компактные.

Рассуждая как и в доказательстве предыдущей теоремы получаем следующую оценку для нормы оператора G:

$$\|G(v)\| = \left\| \int_0^t \rho\Gamma F S_\phi(v + C_v) \right\|_{C^0([0,t_1], T_{\phi(0)}M)} \le$$
$$\le (t_1^{-1}\varepsilon - \varphi) = R.$$

Таким образом оператор G переводит шар U_R в себя и в соответствии с классическим принципом Шаудера будет существовать неподвижная точка $u(\cdot) \in U_R$, $u(\cdot) \in Zu(\cdot)$. Тогда $m(t) = S_\phi(u(t) + C_u)$ является решением.

Следствие 2. *Утверждение теоремы 3.5 будет справедливо и для F не являющегося равномерно квадратично растущим по скоростям, но удовлетворяющего условию 3.2 на Θ, таком, что все кривые из $\pi\Theta$ принадлежат компакту Ξ из Леммы 2.3.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gliklikh Yu. E.* On the two-point boundary value problem for quadratic second order differential equations and inclusions on manifolds / Yu. E. Gliklikh,

P. S. Zykov // Abstract and Applied Analysis, 2006. — Article ID 30395. — P. 1—9

2. *Grammel G.* Boundary value problems for semicontinuous delayed differential inclusions on Riemannian manifolds / G. Grammel // Nonlinear analysis: Theory, Methods and Applications, series A. — 2007. — Vol. 67, № 12. — P. 3283—3286.

3. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики / Ю. Е. Гликлих. — М.: КомКнига (УРСС), 2005. — 416 с.

4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М.: Наука, 1977. — 351 с.

5. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.

6. *Gliklikh Yu. E.* On a two-point boundary value problem for second order differential inclusions on Riemannian manifolds / Yu. E. Gliklikh, A. V. Obukhovskii // Abstract and Applied Analysis. — 2003. — № 10. — P. 591—600.

Зыков Пётр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и теории обучения математике Курского государственного университета

E-mail: petya39b@mail.ru

Киселёва Полина Евгеньевна — аспирантка кафедры алгебры, геометрии и теории обучения математике Курского государственного университета

E-mail: poliny@kursknet.ru

Zykov Petr Sergeevich — PhD (mathematics), senior lecturer of the Department of Algebra, Geometry and the Theory of Mathematical Education at Kursk State University.

E-mail: petya39b@mail.ru

Kiselyova Polina Evgenievna — post graduate student of the Department of Algebra, Geometry and the Theory of Mathematical Education at Kursk State University

E-mail: poliny@kursknet.ru