УДК 62-50

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.09.2009 г.

Аннотация. Предложен новый частотный метод синтеза конечномерного модального регулятора для бесконечномерного объекта с запаздыванием. Для синтеза регулятора применяется метод синтеза модальных систем управления. Конечномерный регулятор получается с помощью аппроксимации модального регулятора с запаздыванием отрезком ряда Бурмана-Лагранжа.
Ключевые слова: конечномерный регулятор, объект с запаздыванием, модальное управление, аппроксимация.

Abstract. A new frequency method is proposed to construct a finite-dimensional modal controller for an infinite-dimensional time-delay plant. The controller is obtained by using a method to synthesis of modal control systems. The finite-dimensional controller makes use of the Burman-Lagrange approximation of the modal time-delay controller.
Keywords: finite-dimensional controller, time-delay plant, modal control, approximation.

ВВЕДЕНИЕ

В теории автоматического управления сохраняется постоянный интерес к системам с запаздыванием [1, 2]. Это объясняется тем, что в большинстве производственных процессов имеются запаздывания, которыми нельзя пренебречь. Кроме того, системы с запаздыванием обладают многими интересными свойствами, благодаря чему широко используются в различных алгоритмах управления [3, 4]. Основная трудность при анализе и синтезе систем с запаздыванием состоит в том, что звено чистого запаздывания является бесконечномерным.

Простейший и достаточно широко распространенный на практике путь решения задач синтеза систем автоматического управления объектами с запаздыванием связан с изначальным приближенным представлением объекта известными методами «подходящей» моделью объекта с сосредоточенными параметрами и последующим применением хорошо разработанного аппарата теории управления сосредоточенными системами. К недостаткам такого подхода относятся, прежде всего, возможная потеря сущностных физических свойств объекта управления, порождаемых пространственной распределенностью параметров, а также ряд проблем технического характера, таких, как высокая размерность вектора переменных состояния сосредоточенной модели, неустойчивость процесса аппроксимации относительно погрешностей промежуточных вычислений и др.

Вообще говоря, для объектов с запаздыванием синтез конечномерных регуляторов по аппроксимирующим моделям может привести к неверным результатам, если синтез осуществлять основываясь только на точности аппроксимации, не учитывая специфики объекта с запаздыванием. Например, для объекта с запаздыванием

$$W(p) = \frac{e^{-4p}}{p-1}$$

ПИД-регулятор не существует. Однако для аппроксимирующей модели

$$\tilde{W}(p) = \frac{-2p+1}{(2p+1)(p-1)},$$

построенной с помощью дроби Паде порядка [1/1]

$$\tilde{W}_0(p) = \frac{-2p+1}{2p+1},$$

существует ПИД-регулятор. Таким образом, применение аппроксимации для синтеза регу-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-07-00007-а).

лятора не гарантирует существование конечномерного регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы для объекта с запаздыванием.

В данной статье рассматривается частотный метод построения конечномерного регулятора для бесконечномерного объекта с запаздыванием. Предлагаемый подход основан на методе синтеза модальных регуляторов и может быть обобщен на объекты с распределенными параметрами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}_n$ множество алгебраических многочленов степени n над полем действительных чисел.

Рассмотрим следующую задачу. Для заданного объекта с запаздыванием

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-\tau p},$$
$$A(p) \in \mathcal{R}_m,\ B(p) \in \mathcal{R}_l,\ m \geq l;\ \tau \geq 0, \tag{1}$$

требуется найти передаточную функцию реализуемого регулятора

$$V(p) = \frac{S(p)}{R(p)},$$
$$S(p) \in \mathcal{R}_s,\ R(p) \in \mathcal{R}_r,\ s \leq r < +\infty, \tag{2}$$

обеспечивающего устойчивость замкнутой системы управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.

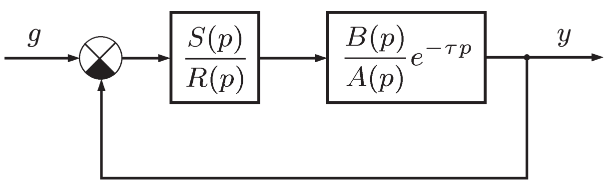

Рис. 1

Таким образом, для бесконечномерного объекта, которым является объект с запаздыванием, требуется синтезировать конечномерный регулятор.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Передаточная функция линейного стационарного объекта дает полное описание данного объекта. Все другие важные характеристики объекта получаются из передаточной функции. Передаточные функции объектов с запаздыванием являются трансцендентными, т. е. являются бесконечномерными, что представляет собой основную проблему при анализе и синтезе систем управления такими объектами. Наиболее простым и эффективным способом решения указанной выше проблемы можно считать аппроксимацию бесконечномерной передаточной функции с помощью дробно-рациональной функции конечного порядка. Выбор в качестве аппроксимирующих моделей дробно-рациональных функций объясняется тем, что, во-первых, вопросы аппроксимации дробно-рациональными функциями в комплексной области являются достаточно хорошо изучены в математической литературе, во-вторых, применение дробно-рациональных аппроксимаций дает возможность решать задачи анализа и синтеза систем управления запаздывающими объектами с помощью хорошо развитых методов теории автоматического управления сосредоточенными объектами.

Очевидно, что различные методы аппроксимации имеют свои достоинства и недостатки. С точки зрения задач управления эффективность того или иного способа приближения определяется тем, насколько полно и точно аппроксимирующая модель отражает свойства исходного бесконечномерного объекта управления. Определяющую роль при выборе класса аппроксимирующих функций играет область в комплексной плоскости, в которой осуществляется аппроксимация [7]. Так как в системе автоматического регулирования входные воздействия на объект с запаздыванием со стороны подсистемы с сосредоточенными параметрами можно считать функциями с ограниченным спектром, то выбор аппроксимирующей функции можно осуществлять на основе близости (в смысле определенных критериев) к точной передаточной функции объекта в некоторой области $|p| < \Omega$ комплексной переменной p, что соответствует полосе низких частот $0 \leq \omega < \Omega$. Ясно, что вся информация о поведении функции комплексного переменного во всей комплексной плоскости, и, следовательно, в области $|p| < \Omega$, заключена в ее особых точках. Поэтому передаточные функции аппроксимирующей модели $\tilde{W}(p)$ должны иметь те же особые точки (полюсы, алгебраические точки ветвления конечного порядка), что и передаточная функция исходного объекта $W(p)$, и главные части $\tilde{W}(p)$ и $W(p)$ в этих особых точках должны совпадать [7]. При такой аппроксимации ошибка воспроизведения сигнала будет тем меньше, чем уже его спектр [7]. Величину Ω следует выбирать такой, чтобы основная часть спектра типичных входных воздействий лежала в области $0 \le \omega < \Omega$.

Далее рассмотрим наиболее эффективный способ конечномерной дробно-рациональной аппроксимации бесконечномерных передаточных функций объектов с запаздыванием, основанный на рядах Бурмана—Лагранжа.

3. ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ БУРМАНА—ЛАГРАНЖА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу аппроксимации передаточной функции бесконечномерного объекта с помощью дробно-рациональных выражений. С этой целью будем использовать ряды Бурмана—Лагранжа — полезное для приложений обобщение рядов Тейлора. Ряды Бурмана-Лагранжа [8, 9] получаются при разложении одной аналитической функции $\Psi(p)$ по степеням другой аналитической функции $w(p)$:

$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n(p) = \sum_{n=0}^{N} d_n w^n(p) + \Delta_N(p). \quad (3)$$

Формула для коэффициентов ряда Бурмана-Лагранжа [8, 9] имеют следующий вид:

$$d_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)}{w^{n+1}(z)}dz. \quad (4)$$

Формула (4) получена при предположении, что $\Psi(p)$ и $w(p)$ правильны в некоторой точке a, причем $w(p)$ имеют в точке a нуль первого порядка. Замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область D, выбирается так, чтобы D содержала точку a, обе функции были правильны в $\bar{D} = D \cup C$ и чтобы $w(p)$ принимала свои значения лишь один раз. Отметим, что если $w(a) \ne 0$, то функцию $\Psi(p)$ можно раскладывать в ряд по степеням функции $w_1(p) = w(p) - a$.

Выражение для остаточного члена ряда Бурмана-Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_N(p) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n w^n(p) = \\ &= \frac{w^{N+1}(p)}{2\pi j}\int_C \frac{\Psi(z)w'(z)\,dz}{w^{N+1}(z)(w(z)-w(p))}.\end{aligned} \quad (5)$$

В качестве примера рассмотрим разложение функции $\Psi(p) = e^{\tau p}$ по степеням $w(p) = p/(p+\lambda)$, $\lambda > 0$, при $a = 0$. Имеем

$$e^{\tau p} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{p^n}{(p+\lambda)^n}. \quad (6)$$

Здесь

$$d_0 = 1,\ d_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A_n^k (\tau\lambda)^{n-k}, \quad n \ge 1. \quad (7)$$

Из формулы (5) получаем

$$\Delta_N(p) = \frac{p^{N+1}}{2\pi j(p+\lambda)^N}\int_C \frac{e^{\tau z}(z+\lambda)^N\,dz}{z^{N+1}(z-p)}. \quad (8)$$

Отметим, что на параметр λ можно накладывать дополнительные требования [8]. Например, λ может быть выбрано из условия точного равенства какой-либо частичной суммы и суммы всего ряда или выбор λ может быть сделан с целью усиления сходимости ряда.

4. СИНТЕЗ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для решения поставленной задачи построим регулятор с передаточной функцией

$$V_0(p) = \frac{S_0(p)}{R_0(p)}e^{\tau p}. \quad (9)$$

Здесь $S_0(p)$ и $R_0(p)$ — неизвестные алгебраические многочлены. Передаточная функция $\Phi_0(p)$ замкнутой системы управления с объектом $W(p)$ и модальным регулятором $V_0(p)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi_0(p) &= \frac{V_0(p)W(p)}{1+V_0(p)W(p)} = \\ &= \frac{B(p)S_0(p)}{B(p)S_0(p)+A(p)R_0(p)}.\end{aligned} \quad (10)$$

В [5, 6] показано, что для произвольного заданного характеристического многочлена $D(p)$ замкнутой системы управления с передаточной функцией $\Phi_0(p)$ искомые многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ могут быть найдены из полиномиального уравнения

$$B(p)S_0(p) + A(p)R_0(p) = D(p). \quad (11)$$

Условия разрешимости этого уравнения задаются следующей теоремой [5,6].

Теорема 1. *Если многочлены $A(p) \in \mathcal{R}_m$ и $B(p) \in \mathcal{R}_l$ взаимно простые, то для любого полинома $D(p) \in \mathcal{R}_n$, $n \ge m + l$, существует единственная пара многочленов $S_0(p) \in \mathcal{R}_{m-1}$ и $R_0(p) \in \mathcal{R}_{n-m}$, являющаяся решением полиномиального уравнения (11).*

Имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. Из теоремы 1 и формулы Эрмита [10] следует, что

$$S_0(p) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\Gamma} \frac{A(z) - A(p)}{A(z)(z-p)} \frac{D(z)}{B(z)} dz, \qquad (12)$$

где Γ — контур, содержащий все корни многочлена $A(p)$.

Многочлен $R_0(p)$ может быть найден по формуле

$$R_0(p) = \frac{D(p) - B(p)S_0(p)}{A(p)}. \qquad (13)$$

Далее исследуем вопрос о физической реализуемости синтезированного модального регулятора. Имеет место следующая теорема [5, 6].

Теорема 2. *Передаточная функция регулятора (9) при $\tau = 0$ всегда реализуема, если выполняется неравенство*

$$n \geq m + \max\{m-1, l\}. \qquad (14)$$

Отметим, что определенная с помощью многочленов $S_0(p)$ и $R_0(p)$ передаточная функция модального регулятора $V_0(p)$ не решает поставленной задачи, так как является трансцендентной передаточной функцией. Однако аппроксимируя экспоненциальную функцию $e^{\tau p}$ дробно-рациональным выражением конечного порядка можно синтезировать конечномерный регулятор. При этом следует обратить внимание на следующий важный факт. Для сохранения устойчивости системы управления с конечномерным регулятором необходимо потребовать, чтобы исходная функция $e^{\tau p}$ и аппроксимирующая дробно-рациональная функция имели равное число полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости. Так как функция $e^{\tau p}$ является аналитической в комплексной плоскости, то аппроксимирующая функция не должна иметь полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости. Обеспечение этого условия накладывает довольно жесткие ограничения на выбор аппроксимирующей функции. Например, дробь Паде

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{2p+1}{-2p+1},$$

является аппроксимацией для e^{4p}, но имеет один полюс в правой полуплоскости комплексной плоскости, т. е. не удовлетворяет заданным выше условиям. Решение данной проблемы может быть найдено с помощью рядов Бурмана—Лагранжа.

5. СИНТЕЗ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Для окончательного определения конечномерного модального регулятора воспользуемся разложением Бурмана—Лагранжа для экспоненциальной функции и представим отрезок ряда Бурмана—Лагранжа в виде дробно-рациональной функции

$$e^{\tau p} = \frac{M(p)}{L(p)} + \Delta_N(p), \qquad (15)$$

где $\Delta_N(p)$ определяется по формуле (8). Отсюда, учитывая формулу (2), получаем

$$V_0(p) = \frac{S(p)}{R(p)} + \tilde{\Delta}_N(p). \qquad (16)$$

Здесь

$$S(p) = M(p)S_0(p), \quad R(p) = L(p)R_0(p), \qquad (17)$$

$$\tilde{\Delta}_N(p) = \frac{S_0(p)}{R_0(p)}\Delta_N(p). \qquad (18)$$

Таким образом, в качестве искомого конечномерного регулятора для бесконечномерного объекта (1) будем использовать регулятор (2), определяемый формулой (17).

Решим теперь задачу обеспечения устойчивости замкнутой системы управления. Для исследования устойчивости большое значение имеет следующая лемма, вытекающая из теоремы Руше [9].

Лемма 1. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри замкнутого контура C, за исключением конечного числа полюсов, имеют внутри C одинаковое число полюсов, а на C непрерывны вместе со своими производными, не обращаются в бесконечность и удовлетворяют условию*

$$|1 + f(z)| > |g(z) - f(z)|, \qquad (19)$$

то функции $1 + f(z)$ и $1 + g(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.

Так как замкнутая система управления с объектом (1) и регулятором (9) является устойчивой по построению, то согласно лемме 1 устойчивость системы с конечномерным регулятором (2) будет обеспечена, если будет верным неравенство

$$\begin{gathered} |1 + V_0(j\omega)W(j\omega)| > \\ > |V(j\omega)W(j\omega) - V_0(j\omega)W(j\omega)|, \ \omega \geq 0. \end{gathered} \qquad (20)$$

Нетрудно проверить, что это неравенство может быть представлено в следующем виде:

$$|D(j\omega)| > |B(j\omega)S_0(j\omega)||\Delta_N(j\omega)|, \ \omega \geq 0. \qquad (21)$$

С помощью формул (8) и (12) после несложных преобразований можно показать, что за счет соответствующего выбора параметра λ, порядка аппроксимации N и многочлена $D(p)$ условие (21) всегда будет выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый частотный метод синтеза конечномерного регулятора для объекта с запаздыванием. Регулятор строится на основе метода синтеза модальных регуляторов. Конечномерный регулятор получается с помощью дробно-рациональной аппроксимации модального регулятора с запаздыванием. В качестве дробно-рациональной аппроксимации применяется отрезок ряда Бурмана—Лагранжа. Метод может быть обобщен на более широкий класс объектов с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gu K., Niculescu S.-I.* Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems // J. Dyn. Syst. Meas. Control (special issue: Time delayed systems). — 2003. — Vol. 125, No. 2. — P. 158—165.

2. *Richard J.-P.* Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, No. 10. — P. 1667—1694.

3. *Artstein Z.* Linear systems with delayed controls: A reduction // IEEE Trans. Automat. Control. — 1982. — Vol. AC-42, No. 4. — P. 869—879.

4. *Niculescu S.-I., Michiels W.* Stabilizing a chain of integrators using multiple delays // IEEE Trans. Automat. Control. — 2004. — Vol. 49, No. 5. — P. 802—807.

5. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2003. — 4. — С. 17—20.

6. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез модальных систем управления // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика, математика. — 2004. — 1. — С. 103—109.

7. *Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. — Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. — 144 с.

8. *Девятов Б. Н.* Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1964. — 324 с.

9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.

10. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. — 508 с.

Дылевский Александр Вячеславович — кандидат технических наук, доцент кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Лозгачев Геннадий Иванович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Тел.: (4732) 20-87-15

Тел.: (4732) 20-87-15

Малютина Виктория Сергеевна — аспирантка кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Тел.: (4732) 20-87-15

Dylevskii Alexander V. — Candidate of engineering sciences, Assistant professor, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Tel: (4732) 20-87-15

Lozgachev Gennadiy I. — Doctor of engineering sciences, Full professor, Head of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Tel: (4732) 20-87-15

Malyutina Victoria S. — Post-graduate student, the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics, the Voronezh State University

Tel: (4732)20-87-15