УДК 531.12

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА В ОТСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНЫХ УСИЛИЙ

Н. Д. Вервейко, Е. А. Тришина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.07.2009 г.

Аннотация: При расчете центробежных машин желательным является такое пространственное положение каналов на роторе, при котором отсутствует давление на стенки за счет сил инерции и тем самым уменьшается сопротивление. В данной работе используется гидравлический подход, при котором скорость течения жидкости в поперечном сечении предполагается постоянной и тем самым элемент жидкости можно моделировать твердым телом, то есть элемент жидкости моделируется движением материальной точки с некоторой скоростью v.

Ключевые слова: материальная точка, скорость, поперечные усилия, неинерциальная система отсчета

Annotation: At calculation of centrifugal machines is desirable such spatial position of channels on a rotor at which there is no pressure at the expense of forces of inertia on walls and by that resistance decreases. In the given work is used the hydraulic approach at which speed of a current of a liquid in cross-section section is supposed a constant and by that the liquid element can be modeled a hard body, i.e. the liquid element is modeled by movement of a material point with some speed v.

Keywords: material point, velocity, lateral forces, noninertial system coordinate

ВВЕДЕНИЕ

При расчете центробежных машин желательным является такое пространственное положение каналов на роторе, при котором отсутствует давление за счет сил инерции на стенки и тем самым уменьшается сопротивление. В [1] рассматривается плоская осесимметричная задача движения жидкого элемента на осесимметричном вращающемся диске. Ниже рассмотрен случай пространственного движения жидкости в канале переменного сечения, которое моделируется движением материальной точки со скоростью, зависящей от ее положения на траектории.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ)

Рассмотрим движение материальной точки в неинерциальной вращающейся с постоянной угловой скоростью системе отсчета.

Уравнение динамики точки во вращающейся системе отсчета имеет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}}. \quad (1)$$

В проекции на оси естественного трехгранника ($\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$) (рис. 1) система (1) конкретизируется:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau - 2m[\vec{\omega}\times\vec{v}]\cdot\vec{\tau} + mr\omega^2(\vec{r}_0\vec{\tau}) \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n - 2m[\vec{\omega}\times\vec{v}]\cdot\vec{n} + mr\omega^2(\vec{r}_0\vec{n}) \quad (2) \\ 0 &= F_b - 2m[\vec{\omega}\times\vec{v}]\cdot\vec{b} + mr\omega^2(\vec{r}_0\vec{b}) \end{aligned}$$

Система уравнений (2) представляет собой систему трех ОДУ уравнений второго порядка

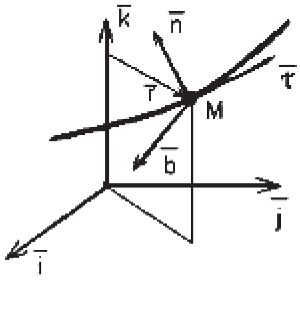

Рис. 1. Схематическое изображение движения материальной точки

по времени для функции координат. Здесь: m — масса частицы жидкости, v — скорость движения точки вдоль траектории, ω — угловая скорость вращения, r — полярный радиус, r_0 — единичный вектор, F_τ, F_n, F_b — компоненты внешних заданных сил.

После проведения векторных операций, система (2) принимает вид:

$$
\begin{gathered}
m\frac{dv}{dt} = F_\tau + mr\omega^2\tau_r, \\
m\frac{v^2}{\rho} = F_n - 2m\omega(n_\phi v_r - n_r v_\phi) + mr\omega^2 n_r, \\
0 = F_b - 2m\omega(-v_\phi(\tau_\phi n_z - \tau_z n_\phi) + v_r(-n_z\tau_r + n_r\tau_z)) + \\
+mr\omega^2(\tau_\phi n_z - \tau_z n_\phi).
\end{gathered}
$$

Рассмотрим далее движение жидкости в канале переменного сечения во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе отсчета. При этом рассматривается нестационарное движение жидкости вдоль стационарной траектории. Построим систему дифференциальных уравнений движения точки таким образом, чтобы отсутствовали поперечные силы, действующие на точку $\overrightarrow{F_n} = 0$ и $\overrightarrow{F_b} = 0$:

$$
\begin{gathered}
m\frac{dv}{dt} = F_\tau + mr\omega^2\tau_r, \\
m\frac{v^2}{\rho} = -2m\omega(n_\phi v_r - n_r v_\phi) + mr\omega^2 n_r, \\
0 = -2m\omega(-v_\phi(\tau_\phi n_z - \tau_z n_\phi) + v_r(-n_z\tau_r + n_r\tau_z)) + \\
+mr\omega^2(\tau_\phi n_z - \tau_z n_\phi).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Конкретизируем общий вид системы (3), используя известные формулы дифференциальной геометрии Френе для кривой заданной в виде $\vec{r} = \vec{r}^*(s)$ [2],

$$
\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}^*}{ds}, \vec{n} = \frac{1}{k}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}^*}{ds}\right) = \frac{1}{k}\frac{d\vec{\tau}}{ds}
$$

Для этого, вычисляя входящие в систему (3) компоненты векторов нормали (n_r, n_ϕ, n_z) и касательной ($\tau_r, \tau_\phi, \tau_z$), и исключая время t из (3), построим систему двух ОДУ второго порядка для определения траектории точки при условии отсутствия поперечных сил инерции, действующих на точку.

$$
\begin{cases}
\dfrac{v^2}{\rho^2} = \dfrac{2v\omega}{(\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}(\ddot{r}r - 2\dot{r} - r^2) + \\
\quad + \dfrac{\omega^2 r}{(\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2)^2} * [(\ddot{r} - r)(\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2) - \\
\quad - \dot{r}(\ddot{r}\dot{r} + r\dot{r} + \ddot{z}\dot{z})] \\
0 = 2v[\dot{z}\dot{r}(\ddot{r} + r) - \ddot{z}(\dot{r}^2 + r^2)] - \\
\quad - r\omega(\ddot{z}r - 2\dot{z}\dot{r})\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2}
\end{cases}
. \tag{4}
$$

Здесь:

$$
\rho^2 = \frac{(\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2)^3}{(\dot{r}^2 + r^2 + \dot{z}^2)[(\ddot{r} - r)^2 + 4\dot{r}^2 + \ddot{z}^2] - [\dot{r}(\ddot{r} - r) + 2r\dot{r} + \dot{z}\ddot{z}]^2};
$$

точка у функций $r(\varphi)$ и $z(\varphi)$ означает производные первого и второго порядков по φ.

В системе ОДУ (4) скорость v можно рассматривать как управляющий параметр, где скорость v задается вдоль траектории за счет изменения поперечного сечения канала $A(s)$:

$$
v = v_0\frac{A(s)}{A(s_0)}.
$$

В случае движения жидкости в криволинейном канале скорость v(s) будет определяться задаваемой величиной поперечного сечения канала. Таким образом, решение системы уравнений (4) задает пространственную траекторию точки при отсутствии поперечных к траектории сил инерции.

Для применения численных методов решения системы ОДУ (4) представим ее в виде четырех ОДУ первого порядка:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dr}{d\phi} = \overline{p} \\
\dfrac{dz}{d\phi} = \overline{q} \\
\dot{q} = \dfrac{2pq[(\overline{\omega}\overline{r}\,\overline{\rho})^2(\overline{q}^2 + \overline{r}^2) + \overline{v}\sqrt{\overline{p}^2 + \overline{r}^2 + \overline{q}^2}((\overline{vq})^2 + 4(\overline{\omega}\overline{r}\,\overline{\rho})^2 + (\overline{vp})^2 + (\overline{vr})^2)}{\overline{\rho}^2\overline{r}\,\overline{\omega}[\overline{\omega}^2\overline{rq}^2 + 4\overline{v}^2\overline{r}^2 + \overline{\omega}^2\overline{r}^4 + 4\overline{v}^2\overline{p}^2 + 4\overline{r}^2\overline{\omega}\sqrt{\overline{p}^2 + \overline{r}^2 + \overline{q}^2})} \\
\underline{+4v^2\overline{\omega}\overline{\rho}^2(\overline{r}^2 + \overline{p})]} \\
\dot{p} = \dfrac{1}{2\overline{qpv}}(2\overline{vp}^2 + 2\overline{vr}^2 + \overline{r}^2\overline{\omega}\sqrt{\overline{p}^2 + \overline{r}^2 + \overline{q}^2}) * \dot{q} - \dfrac{\overline{r}}{\overline{v}}(\overline{v} + \sqrt{\overline{p}^2 + \overline{r}^2 + \overline{q}^2})
\end{cases}
\tag{4*}
$$

Таким образом, построение траектории точки в неинерциальной системе отсчета сведено к решению системы четырех ОДУ первого порядка с управляющей функцией v(s).

Возможна постановка задачи о нахождении траектории точки на заданной вращающейся поверхности $z = Z(r)$, но в этом случае задача оказывается переопределенной в том плане, что невозможно одновременно требовать равенства нулю поперечных нормальных и поперечных бинормальных сил инерции. В случае задания вращающейся поверхности $z = Z(r)$ задача распадается на две отдельные задачи — отсутствие бинормальных или нормальных сил инерции.

Ниже представлен случай построения траектории точки на вращающемся параболоиде при условии отсутствия бинормальных сил инерции, который сведен к решению системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений и одного конечного уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\phi} = p \\ \dfrac{dz}{d\phi} = pZ'_{,r} \\ \dfrac{dp}{d\phi} = P(r, v, p, Z'_{,r}) = \dfrac{\dfrac{p}{U}\sqrt{1 + \dfrac{r^2}{p^2} + Z'_{,r}} + r}{\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{r}{2Up}\sqrt{1 + \dfrac{r^2}{p^2} + Z'_{,r}} - 1} \end{cases} \quad (5)$$

$$Z(r) = m + \lambda r + \mu r^2, \; U = v/(\omega r).$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ТРАЕКТОРИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Расчет пространственной траектории был проведен в среде MATHCAD с помощью встроенной функции rkfixed (метод Рунге—Кутта четвертого порядка точности). Численные эксперименты показали большую чувствительность алгоритма к выбору управляющей функции и начальных параметров, что объясняется вхождением скорости v в виде $v^2 \geq 0$, так что возможны даже ситуации такого выбора входных параметров, при которых задача построения траектории не имеет решения.

На рис. 2 приведены результаты численного расчета траектории точки под действием центральных сил инерции для некоторых конкретных значений входящих безразмерных параметров:

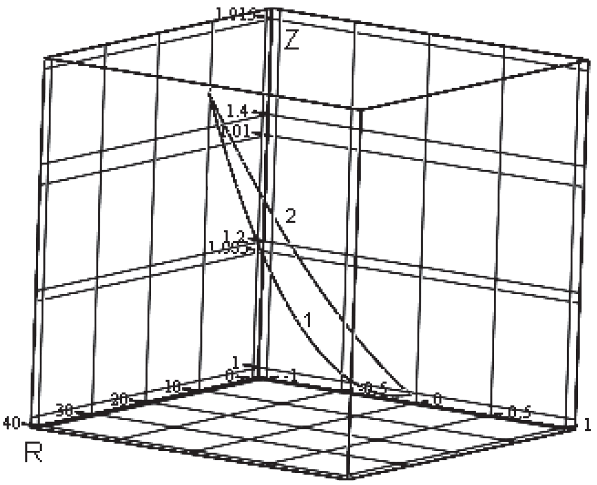

Рис. 2. Результаты численного расчета траектории точки под действием центральных сил инерции

1 — $\omega = 5$; $n = 40$; $\gamma = 0{,}01$; $r_0 = 1$; $z_0 = 1$; $p_0 = 0.01$; $q_0 = 1$;

2 — $\omega = \omega = 5$; $n = 40$; $\gamma = 0{,}01$; $r_0 = 1$; $z_0 = 1$; $p_0 = 0.01$; $q_0 = 0.01$.

Решение задачи построения траектории точки на вращающемся параболоиде (5) проведено с использованием конечно-разностной схемы Эйлера первого порядка точности [3] в среде DELPHI 7.

На рис. 3 приведены результаты численного расчета траектории для некоторых конкретных значений входящих в (5) безразмерных параметров.

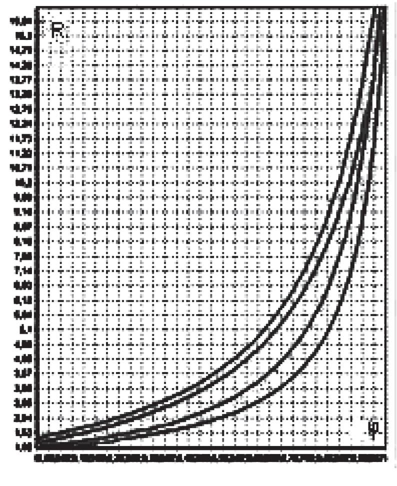

Рис. 3. Результаты численного расчета траектории в случае отсутствия бинормальных сил инерции

Из приведенных графиков следует, что увеличение начального p_0 — тангенса угла наклона траектории к угловой координате φ

ведет к спрямлению траектории вдоль параболоида, а уменьшение p_0 ведет к медленному росту полярного радиуса при увеличении φ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом:

1) построена математическая модель расчета стационарной траектории движения жидкости в канале переменного сечения во вращающейся с постоянной угловой скоростью системе координат при условии отсутствия поперечных к траектории сил, действующих на точку;

2) показано, что предложенная математическая модель построения траектории может быть модифицирована к задаче построения свободной траектории точки на вращающейся осесимметричной поверхности;

3) проведенные численные расчеты показали работоспособность предложенных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Вервейко Н. Д., Шишков В. М., Гвоздевский А. В.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008612757. Программа профилирования проточной части центробежных лопаточных машин. Заявка № 2008610866. Зарегистрирован в реестре программ 05.06.2008.

2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / М.: Наука, 1970. — 720 с.

3. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы / М.: Наука, 1975. — 630 с.

Вервейко Николай Дмитриевич — доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета

Тел. (4732) 20-87-63

Тришина Елена Александровна — студентка 5 курса кафедры теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета

Тел. (4725) 48-54-18

E-mail: deimos_87@mail.ru

Verveyko Nikolay D. — professor, chair of engineering and mechanics of Voronezh State University

Tel. (4732) 20-87-63

Trishina Elena A. — student 5th course, chair of engineering and mechanics of Voronezh State University

Tel. (4725) 48-54-18

E-mail: deimos_87@mail.ru