УДК 517.984

О РАВНОСХОДИМОСТИ НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая[*], **А. П. Хромов**[**]

[*]*Воронежский государственный университет*
[**]*Саратовский государственный университет*

Поступила в редакцию 15.09.2009 г.

Аннотация. В работе установлена равносходимость на всем отрезке разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией и простейшего интегрального оператора.
Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, ряд Фурье, равносходимость.
Abstract. The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions of integral operator with involution and simplest integral operator at the whole segment is established.
Key words: integral operator, involution, Fourier series, equiconvergence.

Пусть A интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(x,t)$, $A_{x^it^j}(x,t) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} A(x,t)$ ($i+j \le 2$, причем, если $i+j=2$, то $j \ne 2$) непрерывны при $0 \le x \le 1$, и $A(x,x) \equiv 1$.

Вопросы сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора (1) и более общих операторов с инволюцией $\vartheta(x) = 1-x$ ($\vartheta(x)$ — инволюция, если $\vartheta(\vartheta(x)) = x$) начали изучаться в [1] и [2], и к настоящему времени накоплено много фактов (см. работу [3] и библиографию в ней). Также исследовались случаи произвольных инволюций ([4], [5]). Оператор интегрирования (т.е. оператор с ядром $A(x,t) \equiv 1$), когда верхний предел не является инволюцией рассматривался в [6].

В [1] даже в более общей ситуации, при условии $A_x(x,x) \equiv 0$, получен следующий результат:

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - S_r^0(f,x) \right\|_{C[0,1]} = 0, \tag{2}$$

где $S_r(f,x)$ ($S_r^0(f,x)$) *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A ($A_0 f = \int_0^{1-x} f(t)\,dt$) *для тех собственных значений* λ_k (λ_k^0)*, для которых* $|\lambda_k| < r$ ($|\lambda_k^0| < r$).

В настоящей статье покажем, что этот результат имеет место и в случае, когда $A_x(x,x) \not\equiv 0$.

1. Приведем необходимые факты из [2] и [7].

Обозначим через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ ($R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$) резольвенту Фредгольма оператора A (A_0, который есть оператор (1) при $A(x,t) \equiv 1$), где λ — комплексный параметр, E — единичный оператор. Введем операторы

$$A_x f = \int_0^x A_x(x,t)f(t)\,dt, \quad Nf = \int_0^x N(x,t)f(t)\,dt,$$

$$N_t f = \int_0^x N_t(x,t)f(t)\,dt, \quad N = (E + A_x)^{-1} - E,$$

и краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$By'(x) + P(x)y(x) - N_1 y = \lambda y + F(x), \tag{3}$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0, \tag{4}$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & N(x,x) \\ N(1-x,1-x) & 0 \end{pmatrix}$,

$$N_1 y = \int_0^1 N_1(x,t)y(t)\,dt, \ N_1(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & N_t(x,t)\varepsilon(x,t) \\ 0 & N_t(1-x,t)\varepsilon(1-x,t) \end{pmatrix},$$

$\varepsilon(x,t) = 1$, при $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$, при $t > x$, $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$ (T — знак транспонирования), M_0, M_1 — квадратные матрицы, для которых $(M_0)_{22} = (M_1)_{11} = 1$, остальные элементы $(M_k)_{ij} = 0$ ($k = 0,1$).

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00397), гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

Лемма 1. *Если* λ *таково, что* R_λ *существует, то* $y=(y_1,y_2)^T$, *где* $y_1=y_1(x)=R_\lambda f(x)$, $y_2=y_2(x)=y_1(1-x)$, *удовлетворяет (3)–(4). Обратно, если y удовлетворяет (3)–(4), и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то* R_λ *существует, и* $R_\lambda f(x)=y_1(x)$ *и* $y_2(x)=y_1(1-x)$.

Введем также следующую краевую задачу:

$$z'(x)+P_1(x)z(x)-N_2z=\lambda D^{-1}z(x)+\mathbf{\Phi}(x), \quad (5)$$

$$\tilde M_0z(0)+\tilde M_1z(1)=0, \quad (6)$$

где $P_1(x)=D^{-1}\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$, $D=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$,

$\Gamma^{-1}=\frac12\begin{pmatrix} 1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$, $B\Gamma=\Gamma D$, $N_2=D^{-1}\Gamma^{-1}N_1\Gamma$,

$\mathbf{\Phi}(x)=D^{-1}\Gamma^{-1}F(x)$, $\tilde M_k=M_k\Gamma$ ($k=0,1$).

Лемма 2. *Если* $y(x,\lambda)$ *есть решение (3)–(4), то* $z(x,\lambda)=\Gamma^{-1}y(x,\lambda)$ *есть решение (5)–(6), и наоборот.*

Обозначим $H_0(x)=\operatorname{diag}\left(h_1(x),h_2(x)\right)$, где $h_i(x)=\exp\left\{-\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right\}$, $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_1(x)$. Пусть $H_1(x)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения: $H_0(x)+P(x)H_0(x)+(H_1(x)D^{-1}-D^{-1}H_1(x))=0$.

Лемма 3. *При больших* $|\lambda|$ *неособое преобразование* $z=H(x,\lambda)v=(H_0(x)+\lambda^{-1}H_1(x))v$, *приводит систему (5)–(6) к виду*

$$v'(x)+P_\lambda(x)v(x)-N_\lambda v=\lambda D^{-1}v(x)+\mathbf{\Phi}_\lambda(x), \quad (7)$$

$$M_{0\lambda}v(0)+M_{1\lambda}v(1)=0, \quad (8)$$

где $P_\lambda(x)=\lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H_1(x)+P_1(x)H_1(x)]$, $N_\lambda=H^{-1}(x,\lambda)N_2H(x,\lambda)$, $\mathbf{\Phi}_\lambda(x)=H^{-1}(x,\lambda)\mathbf{\Phi}(x)$, $M_{0\lambda}=\tilde M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda}=\tilde M_1H(1,\lambda)$.

Рассмотрим еще такую краевую задачу

$$w'(x)=\lambda D^{-1}w(x)+m(x), \quad (9)$$

$$U(w)=\tilde M_0H_0(0)w(0)+\tilde M_1H_0(1)w(1)=0, \quad (10)$$

где $m(x)=(m_1(x),m_2(x))^T$, $m_i\in L[0,1]$.

В [7, п. 3] рассматриваются краевые условия вида

$$\tilde M_0H(0,\lambda)w(0)+\tilde M_1H(1,\lambda)w(1)=0,$$

но легко показать, что нижеследующие факты из [7, п.3] имеют место и для краевых условий (10). Поэтому изложим их именно для этих условий.

Далее, для определенности, будем считать, что

$$\operatorname{Re}\mu\ge0,\quad \mu=-\lambda i. \quad (11)$$

Лемма 4. *Если* μ *таково, что матрица* $\Delta(\mu)=U(V(x,\mu))$, *где* $V(x,\mu)=\operatorname{diag}\left(e^{\mu x},e^{-\mu x}\right)$, *обратима, то краевая задача (9)–(10) однозначно разрешима при любой* $m(x)$ *с компонентами из* $L[0,1]$, *и ее решение имеет вид:*

$$\begin{gathered} w(x)=R_{1\lambda}m(x)=\\ =g_\mu m(x)-V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu m),\end{gathered} \quad (12)$$

где $g_\mu m(x)=\int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt$,

$$g(x,t,\mu)=\operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu),g_2(x,t,\mu)),$$

$$g_1(x,t,\mu)=-\varepsilon(t,x)\exp\{\mu(x-t)\},$$

$$g_2(x,t,\mu)=\varepsilon(x,t)\exp\{-\mu(x-t)\}.$$

Удалим из μ-плоскости все нули $\Delta(\mu)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0, и получившуюся область обозначим S_{δ_0}.

Лемма 5. *В области* S_{δ_0} *при больших* $|\mu|$ *имеют место оценки*

$$\left\|R_{1\lambda}m\right\|_\infty=O\left(\|m\|_1\right),\quad \left\|R_{1\lambda}m\right\|_\infty=O\left(\text{æ}(\mu)\|m\|_\infty\right),$$

$$\left\|R_{1\lambda}m\right\|_1=O\left(\text{æ}(\mu)\|m\|_1\right),\quad \left\|R_{1\lambda}\chi\right\|_\infty=O\left(\mu^{-1}\right),$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — *норма в* $L_\infty[0,1]$ ($L[0,1]$) *в пространстве вектор-функций размерности 2,* $\text{æ}(\mu)=(1-\left|e^{-\mu}\right|)/\operatorname{Re}\mu$; $\chi(x)=(\chi_1(x),\chi_2(x))^T$, *и* $\chi_i(x)$ — *характеристические функции произвольных отрезков.*

Вышеприведенные факты позволяют получить следующий результат:

Теорема 2. *Если* $f(x)\in L[0,1]$, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int_{|\lambda|=r}[y(x,\lambda)-\Gamma H_0(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}D^{-1}\Gamma^{-1}F)]d\lambda\right\|_\infty=0. \quad (13)$$

2. Проведем исследование второго слагаемого в (13).

Лемма 6. *Имеет место представление* $H_0(x)=h(x)E$, *где* E — *единичная матрица,* $h(x)\in C^1[0,1]$, $h(0)=h(1)=1$ *и* $h(x)=h(1-x)$.

Доказательство. Непосредственно вычисляя элементы $P_1(x)$, имеем $p_{11}(x)=p_{22}(x)=$ $=\frac12[N(x,x)-N(1-x,1-x)]$, откуда

$$\int_0^x p_{ii}(t)\,dt=\frac12\left[\int_0^x N(t,t)\,dt-\int_{1-x}^1 N(t,t)\,dt\right].$$

Так как $h_i(x)=\exp\left\{-\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right\}$ то, положив $h(x)=h_1(x)=h_2(x)$, получим требуемое. □

Таким образом, краевое условие (10) переходит в условие:

$$U_0(w) = \tilde{M}_0 w(0) + \tilde{M}_1 w(1) = 0. \qquad (14)$$

Лемма 7. *Пусть* $R_{1\lambda}^0$ *есть резольвента оператора* Dw', $U_0(w) = 0$. *Тогда*

$$R_{1\lambda}^0 Dm = R_{1\lambda} m = g_\mu m - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m), \qquad (15)$$

где $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$.

Доказательство. В самом деле, если $w(x) = R_{1\lambda}m(x)$, то, поскольку (10) есть (14), $w' = \lambda D^{-1}w + m$, $U_0(w) = 0$, т.е. $Dw' = \lambda w + Dm$, $U_0(w) = 0$. Значит, $w = R_{1\lambda}^0 Dm$, и (15) следует из леммы 4. □

Лемма 8. *Для любой функции* $m(x) = (m_1(x), m_2(x))^T$, $m_i(x) \in L[0,1]$, *имеет место оценка*

$$\left\| \int_{|\mu|=r}' [h(x)g_\mu m - g_\mu(hm)]\, d\mu \right\|_\infty = O(\|m\|_1),$$

где $\|m\|_1 = \int_0^1 (|m_1(t)| + |m_2(t)|)\, dt$, $\int_{|\mu|=r}' = \int_{|\mu|=r, Re\mu \ge 0}$.

Доказательство. При $\operatorname{Re}\mu \ge 0$

$$g_\mu m(x) = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t)\, dt, \int_0^x e^{-\mu(x-t)} m_2(t)\, dt \right)^T.$$

Поэтому для первой компоненты заданного в условии вектора имеем (используя замену $\mu = re^{i\phi}$)

$$\left| \int_{|\mu|=r}' [h(x)g_\mu m - g_\mu(hm)]_1\, d\mu \right| =$$

$$= O\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| [h(x)g_\mu m - g_\mu(hm)]_1 \right| r\, d\phi \right) =$$

$$= O\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\, d\phi \left| \int_x^1 e^{\mu(x-t)} (h(x) - h(t)) m_1(t)\, dt \right| \right) =$$

$$= O\left(\int_x^1 |m_1(t)|\, dt \int_0^\pi r e^{r\cos\phi(x-t)} |x-t|\, d\phi \right) =$$

$$= O\left(\int_x^1 |m_1(t)|\, dt \int_0^{\pi r(t-x)/2} e^{-c_1\xi} d\xi \right) = O(\|m\|_1).$$

Здесь воспользовались тем, что $h(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, заменой $\phi = \pi/2 - \tau$, оценкой $\sin\tau \ge c_1\tau$, при $\tau \in [0, \pi/2]$, а также заменой $\xi = r(t-x)$. Аналогично оценивается вторая компонента. □

Лемма 9. *Для* $\Delta_0^{-1}(\mu) = (x_{ij})_{i,j=1}^2$ *имеют место формулы*

$$x_{11} = 1/\delta(\mu), \quad x_{21} = -i/\delta(\mu),$$

$$x_{12} = -ie^{-\mu}/\delta(\mu), \quad x_{22} = e^{\mu}/\delta(\mu),$$

где $\delta(\mu) = \det \Delta_0(\mu) = e^{\mu} + e^{-\mu}$.

Лемма 10. *Если* $\operatorname{Re}\mu \ge 0$, *то в* S_{δ_0} *справедливы оценки:*

$$|\delta(\mu)| \ge c|e^{\mu}|,$$

$$x_{11} = O(e^{-\mu}), \quad x_{21} = O(e^{-\mu}),$$

$$x_{12} = O(e^{-2\mu}), \quad x_{22} = O(1).$$

Лемма 11. *При* $\operatorname{Re}\mu \ge 0$ *имеет место формула*

$$h(x)V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu(hm)) =$$

$$= (e^{\mu x}[x_{11}I_1 - x_{12}I_2], e^{-\mu x}[x_{21}I_1 - x_{22}I_2])^T.$$

где $I_1 = i\int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(h(x) - h(t))m_2(t)\, dt$,

$$I_2 = i\int_0^1 e^{-\mu t}(h(x) - h(t))m_1(t)\, dt \ .$$

Доказательство. Имеем

$$U_0(g_\mu m) = M_0\Gamma(g_\mu m)(0) + M_1\Gamma(g_\mu m)(1) =$$

$$= \left(i\int_0^1 e^{-\mu(1-t)} m_2(t)\, dt, -i\int_0^1 e^{-\mu t} m_1(t)\, dt \right)^T,$$

откуда следует утверждение леммы. □

Введем в рассмотрение следующие интегралы:

$$J_1 = \int_{|\mu|=r}' |e^{-2\mu}| \cdot |e^{\mu x}| |d\mu| \int_0^1 |e^{\mu t}| \cdot |h(x) - h(t)| \cdot |m_2(t)|\, dt,$$

$$J_2 = \int_{|\mu|=r}' |\, e^{-2\mu}| \cdot |e^{\mu x}| |d\mu| \int_0^1 |e^{-\mu t}| \cdot |h(x) - h(t)| \cdot |m_1(t)|\, dt,$$

$$J_3 = \int_{|\mu|=r}' |e^{-2\mu}| \cdot |e^{-\mu x}| |d\mu| \int_0^1 |e^{\mu t}| \cdot |h(x) - h(t)| \cdot |m_2(t)|\, dt,$$

$$J_4 = \int_{|\mu|=r}' |e^{-\mu x}| |d\mu| \int_0^1 |e^{-\mu t}| \cdot |h(x) - h(t)| \cdot |m_1(t)|\, dt.$$

Лемма 12. *Имеют место оценки* $J_j = O(\|m\|_1)$, $(j = 1,2,3,4)$.

Доказательство. Продолжим $h(x)$ периодически на $(-\infty, \infty)$ с периодом 1. Тогда $h(x)$ по лемме 6 непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с показателем 1, и $h(x) = h(1-x)$. Рассмотрим J_1. Имеем

$$J_1 = O\left(\int_0^{\pi/2} r\, d\phi \int_0^1 e^{-rc_1(2-x-t)\phi} \cdot |h(x) - h(t)| \cdot |m_2(t)|\, dt \right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\pi/2} r\, d\phi \int_0^1 e^{-rc_1(2-x-t)\phi} \cdot |h(1-x) - h(t-1)| \cdot |m_2(t)|\, dt \right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\pi/2} r\, d\phi \int_0^1 e^{-rc_1(2-x-t)\phi} \cdot (2-x-t) \cdot |m_2(t)|\, dt \right) =$$

$$= O\left(\int_0^1 |m_2(t)|\, dt \int_0^{\pi r(2-x-t)/2} e^{-c_1\xi} d\xi \right) = O(\|m_2\|_1),$$

где c_1 та же константа, что при доказательстве леммы 8. Возьмем J_2. Этот интеграл оценивается также как и J_1, но здесь $h(x)$ заменяем на $h(3-x)$, а $h(t)$ — на $h(1-t)$, и получаем $J_2 = O(\|m_1\|_1)$. Аналогично оцениваем J_3, J_4. Лемма доказана. □

Лемма 13. *Положим*

$$\Omega_r(m) = \int_{|\lambda|=r} [h(x)R^0_{1\lambda}(Dm) - R^0_{1\lambda}(hDm)]\,d\lambda.$$

Тогда имеет место оценка $\|\Omega_r(m)\|_\infty = O(\|m\|_1)$.

Утверждение леммы следует из лемм 7—12 (в доказательстве $\int_{|\mu|=r}$ оценивается лишь при $\operatorname{Re}\mu \ge 0$).

Лемма 14. *Пусть компоненты вектор-функции* Dm *имеют ограниченную производную и* $U_0(Dm) = 0$. *Тогда*

$$h(x)R^0_{1\lambda}(Dm) - R^0_{1\lambda}(hDm) = \\ = \frac{1}{\lambda}[h(x)R^0_{1\lambda}((Dm)') - R^0_{1\lambda}((hDm)')]. \quad (16)$$

Доказательство. Положим $(Dm)' = g$. Тогда имеем $(Dm)' - \lambda Dm = g - \lambda Dm$, $U_0(Dm) = 0$. Отсюда,

$$Dm = R^0_{1\lambda}(g) - \lambda R^0_{1\lambda}(Dm) = \\ = R^0_{1\lambda}((Dm)') - \lambda R^0_{1\lambda}(Dm). \quad (17)$$

Так как $h(0) = h(1) = 1$, то $U_0(hDm) = 0$, и потому аналогично (17) имеем

$$hDm = R^0_{1\lambda}((hDm)') - \lambda R^0_{1\lambda}(hDm). \quad (18)$$

Из (17) и (18) получаем (16). Лемма доказана. □

Теорема 3. *Для любой вектор-функции* $m(x)$ *с компонентами из* $L[0,1]$ *имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_r(m)\|_\infty = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Согласно лемме 5 имеем $\|R^0_{1\lambda}((Dm)')\|_\infty = O(æ(\mu))$, $\|R^0_{1\lambda}((hDm)')\|_\infty = O(æ(\mu))$, если Dm имеет ограниченную производную. Если к тому же $U_0(Dm) = 0$, то по лемме 14 для такой функции Dm выполняется (19), так как

$$\int_{|\mu|=r}{}' \frac{æ(\mu)}{|\lambda|}|d\lambda| = O\left(\frac{\ln r}{r}\right).$$

Множество функций Dm, имеющих ограниченную производную и удовлетворяющих условию $U_0(Dm) = 0$, всюду плотно в пространстве интегрируемых вектор-функций размерности 2. Отсюда и из леммы 13 по теореме Банаха—Штейнгауза следует утверждение теоремы. □

Замечание. Эта теорема аналогична теореме Штейнгауза из теории тригонометрических рядов Фурье [8, с. 111].

3. *Доказательство теоремы 1.* Имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda, \\ S^0_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R^0_\lambda f\,d\lambda. \quad (20)$$

Обозначим через $\tilde R_\lambda$ резольвенту оператора By', $M_0y(0) + M_1y(1) = 0$. Также как и в лемме 1 можно показать, что имеет место соотношение $R^0_\lambda f = [\tilde R^0_\lambda F]_1$ (F та же, что и в лемме 1). Далее, так как $w = R^0_{1\lambda}m$ есть решение краевой задачи: $Dw' = \lambda w + m$, $U_0(w) = M_0\Gamma w(0) + M_1\Gamma w(1) = 0$, и $B = \Gamma D\Gamma^{-1}$, то Γw есть решение краевой задачи: $By' - \lambda y = \Gamma m$, $M_0y(0) + M_1y(1) = 0$. Значит $\Gamma R^0_{1\lambda} = \tilde R^0_\lambda\Gamma$, или $\tilde R^0_\lambda = \Gamma R^0_{1\lambda}\Gamma^{-1}$. Поэтому по леммам 6, 7 и теореме 3

$$\int_{|\lambda|=r} \Gamma H_0(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}D^{-1}\Gamma^{-1}F)\,d\lambda = \\ = \int_{|\lambda|=r} \Gamma h(x)R^0_{1\lambda}(h^{-1}\Gamma^{-1}F)\,d\lambda = \\ = \int_{|\lambda|=r} \Gamma R^0_{1\lambda}(\Gamma^{-1}F)\,d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \tilde R^0_\lambda(F)\,d\lambda + o(1),$$

где $\|o(1)\|_\infty \to 0$. Отсюда и из теоремы 2

$$\int_{|\lambda|=r} y(x,\lambda)\,d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \tilde R^0_\lambda(F)\,d\lambda + o(1), \quad (21)$$

а, следовательно, (21) имеет место и для первых компонент $y(x,\lambda)$ и $\tilde R^0_\lambda(F)$, которые есть $R_\lambda f$ и $R^0_\lambda f$ соответственно. Поэтому в силу (20) теорема 1 доказана полностью. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Матем. сборник. — 2001. — Т. 192, 10. — С. 33—50.

2. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А. П. Хромов // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, 6. — С. 932—949.

3. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях / А. П. Хромов // Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, 11. — С. 115—142.

4. *Кувардина Л. П., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией /Л. П. Кувардина, А. П. Хромов // Известия вузов. Математика. — 2008. — 5. — С. 67—76.

5. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Оператор интегрирования с инволюцией в верхнем пределе интегрирования / В. В. Корнев, А. П. Хромов // ДАН. — 2008. — Т. 422, 4. — С. 459—462.

6. *Domanov J. Yu.* On the spectrum and eigenfunctions of the operator $(Vf)(x) = \int_0^{x^\alpha} f(t)\,dt$ / J. Yu. Domanov// Perspectives of operator theory Banach center publications. — 2007. — V. 75. Warszawa. — P. 1—6.

7. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования / А. П. Хромов // Инф. бюллетень журнала “Интегр. преобразования и специал. функции”. — М.: 2006. — Т. 6, 1. — С. 46—55.

8. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа Воронежского госуниверситета.

Тел.: (4732) 424-420

E-mail: bmsh2001@mail.ru

Хромов Август Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Саратовского госуниверситета.

Тел.: (8452) 666-066

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Burlutskaya Maria Shaukatovna — candidate of science, senior lecturer, chair of mathematical analysis, Voronezh State University.

Tel.: (4732) 424-420

E-mail: bmsh2001@mail.ru

Khromov August Petrovich — doctor of science, professor, head of a chair of differential equations, Saratov State University.

Tel.: (8452) 666-066

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru