УДК 517.946

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

А. Д. Баев, П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.06.2009 г.

Аннотация. Определен новый класс весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Установлены некоторые свойства таких операторов, в том числе найдена оценка коммутатора весового псевдодифференциального оператора с переменным символом из нового класса и оператора дифференцирования.

Ключевые слова: весовой псевдодифференциальный оператор, преобразование Фурье, коммутатор.

Abstract. Is defined a new class of weight pseudo-differential operators with a variable symbol. Some properties of such operators are established, including the estimation of the switchboard of the weight pseudo-differential operator with a variable symbol from a new class and operator of differentiation is found.

Key words: the weight pseudo-differential operator, transformation of Fure, the switchboard.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются новые классы псевдодифференциальных операторов с переменным символом. Эти операторы определены по специальному интегральному оператору F_α и называются весовыми псевдодифференциальными операторами. Преобразование F_α было впервые введено в работе [1]. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по t символом были впервые рассмотрены в работе [2]. Затем были изучены свойства весовых псевдодифференциальных операторов с переменным по t символом из некоторых классов (см. [3], [4], [5]).

В данной работе изучаются весовые псевдодифференциальные операторы с переменными символами из нового класса. Установлены: теорема о композиции таких операторов; теоремы об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева; теоремы о коммутации весовых псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования. Полученные свойства весовых псевдодифференциальных операторов позволяют изучать новые классы вырождающихся уравнений и математических моделей вырождающихся процессов.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta)=\int_0^{+\infty}u(t)\exp(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$, где функция $\alpha(t), t\in R_+^1$, $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(t)=$ $=\mathrm{const}$ для $t\geq d$ при некотором $d>0$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\phi^{-1}(\tau)}$, $t=\phi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\phi(t)=\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)}=\sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R_+^1)},$$

что дает возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R_+^1)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)]=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\big|_{\tau=\phi(t)}$. Легко показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\overline{R}_+^1)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1,2,...,$ где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Следуя работе [2], определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n)$; $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}^2 = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta .$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \ge 0,\ \mathrm{q} > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{l=0}^{[sq^{-1}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v]] \right\|_{L_2(R_+^n)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Здесь $[sq^{-1}]$ — целая часть числа sq^{-1}.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| < \infty$ при всех $t \in [0,\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \ge 2N - |\sigma|$, где

$$N \ge \max_{0 \le l_1 \le l}\{2l_1 + \frac{l - l_1 + \frac{3}{2}}{v} + 1, \sigma + 1\},\ l = 1,2,...,$$

σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор, определенный равенством

$$K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[v(x,t)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\delta}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{R}_+^1$, $\sigma \in \mathrm{R}^1$, $0 \le \delta < 1$, если функция $\lambda(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $l, m = 0,1,2...$ справедливы оценки

$$\left|(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t})^m \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(t,\xi,\eta)\right| \le c_{ml}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - l + \delta m} \quad (1)$$

с константами $c_{ml} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1, t \in \Omega$.

Рассмотрим весовые псевдодифференциальные операторы вида

$$P(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F_\alpha^{-1}[p(t,\xi,\eta)F_\alpha[u]], \quad (2)$$

$$Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F_\alpha^{-1}[q(t,\xi,\eta)F_\alpha[u]]. \quad (3)$$

Рассмотрим их композицию $P(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)$.

Так как

$$Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}\left[q(t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]\right]_{\tau=\varphi(t)},$$

то

$$P(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[p(t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(\phi^{-1}(\tau))} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha(\phi^{-1}(\tau))}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[q(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]\big|_{\tau=\phi(t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[p(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[F_{\eta\to\tau}^{-1}[q(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]_{\tau=\phi(t)}.$$

Таким образом,

$$P(t,\xi,D_{\alpha,t})Q(t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} P(\tau,\xi,D_\tau)Q(\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]\big|_{\tau=\phi(t)}, \quad (4)$$

где

$$P(\tau,\xi,D_\tau)u(\tau) = F_{\eta\to\tau}^{-1}[p(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]]. \quad (5)$$

Определение 4. Будем говорить, что символ $\lambda(\tau,\xi,\eta)$ принадлежит при всех $\xi \in R^{n-1}$ классу символов $S_\delta^\sigma(\Omega_1)$, где $\Omega_1 \subset \overline{R}_+^1, \sigma \in R^1$, $0 \le \delta < 1$, если функция $\lambda(\tau,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $\tau \in \Omega_1$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $l, m = 0,1,2...$ справедливы оценки

$$|\partial_\tau^m \partial_\eta^l \lambda(\tau,\xi,\eta)| \le c_{ml}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - l + \delta m} \quad (6)$$

с константами $c_{ml} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1, \tau \in \Omega_1$.

Можно показать, что если $p(t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,\delta}^\sigma$, то $\tilde{p}(\tau,\xi,\eta) = p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S_\delta^\sigma$.

Кроме того, из (4) следует, что для того чтобы исследовать композицию операторов $P(t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(t,\xi,D_{\alpha,t})$ достаточно исследовать композицию операторов $P(\tau,\xi,D_\tau)$ и $Q(\tau,\xi,D_\tau)$.

Обозначим через B^∞ совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(\tau)$ на R^1, что $f(\tau)$ и все ее производные ограничены на R^1.

Назовем ядром оператора $P(\tau,\xi,D_\tau)$ функцию

$$k(\tau,\xi,\eta)=F^{-1}_{\eta\to z}[p(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \qquad (7)$$

Доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. Если $p(\tau,\xi,\eta)\in S^{\sigma}_{\delta}$, то оператор $P(\tau,\xi,D_\tau)$ непрерывен в пространстве B^{∞}.

Лемма 2. Пусть $p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in S^{\sigma}_{\delta}$ (σ — действительное число), $f(\tau)\in B^{\infty}$. Тогда функция $h(\tau,\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(\tau,\xi,\tau-y)e^{-i(y-\tau)\xi}f(y)dy$ при $\eta\to\infty$ допускает асимптотическое разложение

$$h(\tau,\xi,\eta)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta p(\phi^{-1}(\tau),\xi,\eta)f^{(j)}(\tau).$$

Здесь $f^{(j)}(\tau)$ — производная порядка j от функции $f(\tau)$. При этом для любых $N>0$ найдется $N_1>0$, что функция $T_{N_1}(\tau,\xi,\eta)=$ $=h(\tau,\xi,\eta)-\sum\limits_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta p\cdot f^{(j)}(\tau)$ принадлежит классу S^{-N}_{δ}.

С помощью выше этих утверждений доказываются две теоремы.

Теорема 1. Пусть $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $p(t,\xi,\eta)$, $q(t,\xi,\eta)$, принадлежащими классам $S^{m_1}_{\alpha,\delta}(\Omega)$, $S^{m_2}_{\alpha,\delta}(\Omega)$ (m_1,m_2 — действительные числа), $\delta\in[0,1)$. Тогда для любого $N\ge 0$ существует $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(t,\xi,\eta)\in S^{-N}_{\alpha,\delta}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$P(t,D_x,D_{\alpha,t})Q(t,D_x,D_{\alpha,t})-\sum_{j=1}^{N_1-1}R_j(t,D_x,D_{\alpha,t})=$$
$$=T_{N_1}(t,D_x,D_{\alpha,t}),$$

где $T_{N_1}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(t,\xi,\eta)$, а $R_j(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $r_j(t,\xi,\eta)=$ $=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j p(t,\xi,\eta)}{\partial\eta^j}(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t})^j q(t,\xi,\eta)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{\sigma}_{\alpha,\delta}(\Omega)$, ($\sigma$ — действительное число), $\delta\in[0,1)$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

При доказательстве теорем о коммутации весовых псевдодифференциальных операторов с операторами дифференцирования используются следующие леммы, которые доказываются аналогично соответствующим утверждениям работы [3].

Лемма 3. Пусть $f(x)(1+|x|)^{-s}\in L_2(R^1)$ (s – действительное число), $g(x)\in S(R^1)$, тогда

$$f(x)g(x)=F^{-1}_{\tau\to x}[F_{x\to\tau}[f]*F_{x\to\tau}[g]], \qquad (8)$$

$$F_{x\to\tau}[f\cdot g]=F_{x\to\tau}[f]*F_{x\to\tau}[g]. \qquad (9)$$

Участвующие в (8)—(9) операции понимаются в смысле теории обобщенных функций S'. В частности, под сверткой $f*g$ понимают такую обобщенную функцию, которая действует на основную функцию $\phi\in S(R^1)$ по правилу $(f*g,\phi)=\lim\limits_{k\to+\infty}(f(x)\cdot g(x),\eta_k(x,y)\phi(x+y))$, если предел существует и не зависит от выбора последовательности $\eta_k(x,y)\to 1$ в R^2.

Лемма 4. Пусть функция $\beta(\tau)$ принадлежит пространству $C^N(R^1)$ ($N\ge\sigma,\sigma\in R^1$). Пусть функция $\lambda(\tau,y)$ принадлежит $C^{\infty}(\Omega\times R^1)$, где Ω — произвольное открытое множество и при всех $j,k=0,1,2...$ справедливы оценки $|\partial^k_\tau\partial^j_y\lambda(\tau,y)|\le c_{jk}(1+|y|)^{\sigma-j+\delta k}$ с некоторыми константами $A_{jk}>0$, $\delta\in[0,1)$. Тогда для любой функции $w(\tau)\in S(R^1)$ справедлива формула представления

$$\beta(\tau)F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(\tau,y)F_{\tau\to y}[w]]-F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(\tau,y)F_{\tau\to y}[\beta(\tau)w]]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda_i(\tau,y)F_{\tau\to y}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w]]+$$
$$+F^{-1}_{y\to\tau}[\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_N(\tau,y-z,z)F_{\tau\to(y-z)}[D^N_\tau\beta(\tau)]\cdot F_{\tau\to z}[w]dz],$$

где $\lambda_i(\tau,y)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial^k_\tau\partial^j_y\lambda(\tau,y)$,

$$g_N(\tau,y-z,z)=N\int\limits_0^1\lambda_N(\tau,y-\theta(y-z))(1-\theta)^{N-1}d\theta.$$

Воспользуемся следующим тождеством:

$$\alpha^l(t)\partial^l_t u(t)=\sum_{i=0}^{l}\theta^l_i(t)\partial^i_{\alpha,t}u(t), \qquad (10)$$

где $u(t)\in C^l[0;+\infty)$, $\partial_{\alpha,t}=\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, функции $\theta^l_i(t)$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases}\theta^{l+1}_i(t)=\theta^l_{i-1}(t)+\partial_{\alpha,t}\theta^l_i(t)-(l+\frac{1}{2})\alpha'(t),\ 1\le i\le 1\\ \theta^{l+1}_0(t)=\partial_{\alpha,t}\theta^l_0(t)-(l+\frac{1}{2})\alpha'(t),\ \theta^l_l\equiv 1,\ \theta^l_0=-\frac{\alpha'(t)}{2}\end{cases} \qquad (11)$$

Причем из условия $\alpha(t)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ следует, что $\theta^l_i(t)\in C^{s_1-l}[0,+\infty)$, $l=1,2,...,s_1$, $i=0,1,...,l$.

Обозначим

$$\lambda_i(t,\xi,\eta)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial^i_\eta\lambda(t,\xi,\eta),\ i=1,2,...,N$$

$$g_N(t,\xi,\eta-y,y)=$$
$$=\frac{(-1)^N}{N!}\int_0^1\lambda_N(t,\xi,\eta-z(\eta-y))(1-z)^{N-1}dz.$$

Введем операторы $Q_{i,\sigma}$, $i=1,2,...,N-1$; $R_{N,l,\sigma}$.

$$Q_{i,\sigma}[v(x,t)]=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]],$$

$$R_{N,l,\sigma}v(x,t)=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int_{R^1}F_{\tau\to(\eta-y)}[D^N_\tau\beta_{i,l}(\tau)]\cdot$$
$$\cdot F_{x\to\xi}F_{\tau\to y}[(\partial^j_{\alpha,t}v)_\alpha(x,\tau)]g_N(t,\xi,\eta-y,y)dy]_{\tau=\phi(t)},$$

$$\beta_{j,l}(\tau)=\left.\frac{\theta^l_j(t)}{\alpha^l(t)}\right|_{t=\phi^{-1}(\tau)},\ j=0,1,...,l.$$

Функции $\theta^l_j(t)$ определены в (11). $\tau=\phi(t)=\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Заметим, что для любой $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ справедливо равенство

$$\partial^l_{\alpha,t}K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v=$$
$$=\sum_{p=0}^{l}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{l-p}_{\alpha,t}v(x,t)]],$$

где c_{pl} — биномиальные коэффициенты.

Таким образом, отсюда и из (10) получим равенство

$$\partial^l_tK^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}\partial^i_{\alpha,t}K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v=$$
$$=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}\sum_{p=0}^{i}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v(x,t)]]=$$
$$=\frac{\theta^l_0(t)}{\alpha^l(t)}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^i_{\alpha,t}v]]+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v(x,t)]]=$$
$$=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^i_{\alpha,t}v]]+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v(x,t)]].\tag{12}$$

С другой стороны, в силу (10) получим, что

$$K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})\partial^l_tv=$$
$$=K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})[\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}\partial^i_{\alpha,t}v].\tag{13}$$

Почленно вычитая, из (12) равенство (13), получим

$$M_{l,\sigma}v=\sum_{i=0}^{l}\left[\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})[\partial^i_{\alpha,t}v]-\right.$$
$$\left.-K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})[\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}\partial^i_{\alpha,t}v]\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v]].\tag{14}$$

Из (14) вытекает, что для того чтобы прокоммутировать весовой псевдодифференциальный оператор $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ и оператор ∂^l_t, достаточно изучить коммутатор оператора $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ с функциями $\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}$.

Таким образом, с помощью сформулированных выше утверждений получаем справедливость следующих теорем.

Теорема 3. Пусть символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,\delta}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in\mathrm{R}^1, 0\le\delta<1$. Пусть выполнено условие 1. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$ при всех $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ справедлива формула представления

$$M_{l,\sigma}v(x,t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial^j_tv(x,t)]+R_{N,l,\sigma}v(x,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{pl}F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^p\lambda(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{i-p}_{\alpha,t}v]],$$

где функции $Q_{i,\sigma}$, $R_{N,l,\sigma}$ определены выше, c_{pl} — биномиальные коэффициенты, $b^i_{i_1,j}(t)\in\in C^{s_1-l-i}[0,+\infty)$ — ограниченные функции, функции $\theta^l_i(t)$ определены в (11).

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R^n_+)$ справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{L_2(R^n_+)}\le c(\sum_{j=0}^{l}\|\partial^j_tv\|_{\sigma-1,\alpha}+\sum_{j=0}^{l-1}\|\partial^j_tv\|_{\sigma+\delta(l-j),\alpha})$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Теорема 5. Пусть $q>1$, $s\ge0$ — действительные числа, $v(x,t)\in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R^n_+)$. Пусть символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^q_{\alpha,\delta}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $0\le\delta<1$. Тогда для коммутатора $M_{l,q}$ операторов $K^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ и ∂^l_t, справедлива оценка

$$\|M_{l,q}v\|_{s,\alpha,q}\le c\|v\|_{s+(l+1)q-1,\alpha,q}$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баев А. Д.* О корректности краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения в частных производных: сб. науч. тр. / Новосибирск: Наука, 1980. — С. 17—21.

2. *Баев А. Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады АН СССР. –1982. – Т. 265, № 5. — С. 1044—1046.

3. *Баев А. Д.* Некоторые свойства псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика, Математика. — 2006. — № 2. — С. 147—152.

4. *Баев А. Д.* О разрешимости общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. Естеств. Науки. — 2008. — № 3 (62). — С. 40—50.

5. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Докл. Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727—728.

Баев Александр Дмитриевич — д.ф.-м.н., профессор кафедры уравнений в частных производных и теорий вероятностей ВГУ, декан математического факультета Воронежского государственного университета

Тел. (4732)208553, (4732)374163

E-mail: baev@math.vsu.ru

Садчиков Павел Валерьевич — преподаватель математического факультета ВГУ

Тел. (4732)644182

E-mail: sadch@freemail.ru

Baev Alexandr D. — professor of chair of the equations in private derivatives and probability theory of the Voronezh state university, the dean of mathematical faculty of the Voronezh state university

Tel. (4732)208553, (4732)374163

E-mail: baev@math.vsu.ru

Sadchikov Pavel V. — the teacher of mathematical faculty of the Voronezh state university

Tel. (4732)644182

E-mail: sadch@freemail.ru