УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ КВАЗИЛЕНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ ОБОБЩЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Д. С. Сотников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.02.2009 г.

Аннотация. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения в гильбертовом пространстве решается приближённо проекционно-разностным методом. В условиях обобщённой разрешимости задачи Коши установлена сходимость в энергетической норме приближённых решений к точному с порядком скорости по времени. Для проекционных подпространств типа конечных элементов получена скорость сходимости и по пространству, точная по порядку аппроксимации.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, проекционно-разностный метод.

Abstract. The Cauchy problem for quasilinear parabolic problem in Hilbert space is resolved approximately by the projection difference method. The convergence of the approximate solution to the exact solution in conditions of generalized solvability is established in energy norm with the rate of convergence with respect to time. The rate of convergence with respect to space with exact to order of approximation is obtained for subspaces of the finite element type.

Keywords: Hilbert space, parabolic problem, projection difference method.

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения являются плотными и непрерывными. Для $t \in [0,T]$ на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных форм $a(t,u,v)$. Предполагается, что для всех $u, v \in V$ функции $t \to a(t,u,v)$ измеримы на $[0,T]$ и выполнены оценки:

$$|a(t,u,v)| \le M_1 \| u \|_V \| v \|_V, \qquad \operatorname{Re} a(t,u,u) \ge \delta \| u \|_V^2, \tag{1}$$

где $\delta > 0$. Форма $a(t,u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t): V \to V'$ такой, что $a(t,u,v) = (A(t)u, v)$ и $\| A(t) \|_{V \to V'} \le M_1$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H.

Предположим также, что на $[0,T] \times H$ задана функция $f(t,u)$, со значениями в V' такая, что $f(t,u) \in L_2(0,T;V')$ при каждом фиксированном $u \in H$ и для $u_1, u_2 \in H$

$$\| (f(t,u_1) - f(t,u_2)) \|_{V'} \le M_2 \| u_1 - u_2 \|_H . \tag{2}$$

Заметим, что для функции $t \to u(t) \in H$, измеримой на $[0,T]$, функция $t \to f(t,u(t)) \in V'$ будет измеримой на $[0,T]$.

Обратим внимание, что в приложениях условие (2) означает возможность нелинейности $f(t,u)$ содержать производные функции $u \in H$ по пространственным переменным.

В пространстве V' рассмотрим задачу Коши:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t,u(t)), \quad u(0) = u^0 \in H. \tag{3}$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

При дополнительном предположении компактности вложения $V \subset H$ в [1] показано, что задача (3) имеет единственное решение u(t) такое, что $u(t) \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ и $u'(t) \in L_2(0,T;V')$. Такое решение задачи (3) будем называть слабым.

Опишем некоторые факты, связанные с проекционными подпространствами. Через V_h, где h — положительный параметр, обозначим конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\| u_h \|_{V_h'} = \sup |(u_h, v_h)|$, точная верхняя граница берется по $v_h \in V_h$ и $\| v_h \|_V = 1$. Нетрудно видеть, что $\| u_h \|_{V_h'} \le \| u_h \|_{V'}$. Обозначим через P_h ортопроектор в пространстве H на V_h. В [2] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и для $u \in V'$ справедлива оценка $\| \overline{P}_h u \|_{V_h'} \leq \| u \|_{V'}$. Отметим также для $u_h \in V_h$ оценку $\| u_h \|_{V'} \leq \| P_h \|_{V \to V} \| u_h \|_{V_h'}$ и для $u \in V'$ оценку $\| \overline{P}_h u \|_{V'} \leq \| P_h \|_{V \to V} \| u \|_{V'}$ [3]. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [4].

В условии существования слабого решения задачи (3) проекционно-разностный метод изучался в [5]. При этом на пространства V_h накладывалось некоторое дополнительное условие, которому в приложениях в методе конечных элементов соответствует равномерное разбиение области пространственных переменных. В работе [6] проекционно-разностный метод изучался без этого дополнительного предположения на подпространства V_h. Однако при этом налагались достаточно сильные условия на гладкость точного решения задачи (3) и функции $f(t,u)$. В настоящей работе проекционно-разностный метод (7) будет исследоваться в условия обобщенной разрешимости задачи (3).

Для этого сделаем некоторые дополнительные предположения.

Пусть при каждом $u \in V$ функция $f(t,u)$ действует в H и справедлива оценка

$$\| f(t,u) \|_H \leq M_3 \| u \|_V + M_4. \qquad (4)$$

Кроме того, если функция $t \to u(t) \in V$ измерима, то и $f(t,u(t)) \in H$ также измерима.

Из (4) следует, что для $u \in L_2(0,T;V)$ получим $f(t,u(t)) \in L_2(0,T;H)$.

Предположим дополнительно, что форма $a(t,u,v)$ симметрична, т. е. $a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)}$, где черта над выражением означает комплексное сопряжение. Пусть также форма $a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна по $t \in [0,T]$ и справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} a(t,u,v) \right| \leq M_5 \| u \|_V \| v \|_V . \qquad (5)$$

Определим множество $D[A(t)] = \{ v \in V \mid A(t)v \in H \}$. Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D[A(t)] \subset E \subset V$ и $V = [E,H]_{1/2}$ [7]. Например, если оператор $A(t)$ порожден в области $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ с гладкой границей равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$. Если же на границе области задано условие Неймана, то полагаем $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$.

Потребуем от оператора $A(t)$ выполнения условия типичного для эллиптических операторов: существует $\alpha > 0$, что для всех $t \in [0,T]$

$$\| u \|_E \leq \alpha \| A(t)u \|_H \quad (u \in D[A(t)]). \qquad (6)$$

Пусть также $u^0 \in V$. В таком случае, из равенства (3) и работы [8] получим, что слабое решение $u(t)$ задачи будет более гладкое: $u(t) \in C([0,T],V) \cap L_2(0,T;E)$ и $u'(t), A(t)u(t) \in L_2(0,T;H)$. Такое решение назовем обобщенным.

Полученные далее результаты о энергетической сходимости проекционно-разностного метода дополняют результаты работы [9], где подобные утверждения установлены для линейной задачи.

Рассмотрим проекционно-разностную задачу в V_h

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P}_h A(t_k) u_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h f(t, u_{k-1}^h) dt \qquad (7)$$
$$(k = \overline{1,N}),$$

где N — натуральное число, $N\tau = T, t_k = k\tau$ и $u_0^h \in V_h$ считаем заданным.

Установим разрешимость (7), т. е. обратимость в V_h операторов $I + \tau \overline{P}_h A(t_k)$. Пусть $v_h \in V_h$ и $(I + \tau \overline{P}_h A(t_k)) v_h = 0$. Получим соотношение

$$\| v_h \|_H^2 + \tau a(t_k, v_h, v_h) = 0.$$

Из (1) следует оценка

$$\| v_h \|_H^2 + \delta\tau \| v_h \|_V^2 \leq 0.$$

Таким образом, $v_h = 0$, то есть операторы $I + \tau \overline{P}_h A(t_k)$ непрерывно обратимы в V_h.

Лемма 1. *Пусть для формы $a(t,u,v)$ и функции $f(t,u)$ выполнены перечисленные выше условия и пусть $u(t)$ — обобщенное решение задачи (3), а u_k^h — решение задачи (7). Тогда справедлива следующая оценка*

$$\max_{0 \leq k \leq N} \| u_k^h \|_V^2 + \sum_{k=1}^N (\| (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \|_H^2 \, \tau + \qquad (8)$$
$$+ \| u_k^h - u_{k-1}^h \|_V^2) \leq C_1 \| u_0^h \|_V^2 + C_2.$$

Доказательство. Умножим (7) на $(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}$ скалярно в H.

$$\| (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \|_H^2 + (\overline{P}_h A(t_k) u_k^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}) =$$
$$= \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h f(t, u_{k-1}^h) dt, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \right). \qquad (9)$$

Возьмем удвоенную вещественную часть от (9). Прежде всего рассмотрим

$$2\operatorname{Re}(A(t_k)u_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1})=$$
$$=2\operatorname{Re}a(t_k,u_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1})=$$
$$\tau^{-1}[a(t_k,u_k^h,u_k^h)-a(t_k,u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)+$$
$$+a(t_k,u_k^h-u_{k-1}^h,u_k^h-u_{k-1}^h)].$$

Таким образом приходим к равенству

$$\begin{gathered}2\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}a(t_k,u_k^h,u_k^h)-\\-\tau^{-1}a(t_{k-1},u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)+\tau^{-1}a(t_k,u_k^h-u_{k-1}^h,u_k^h-u_{k-1}^h)=\\=\tau^{-1}[a(t_k,u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)-a(t_{k-1},u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)]+\\2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_hf(t,u_{k-1}^h)dt,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\right).\end{gathered}\tag{10}$$

Оценим слагаемые I_i в правой части (10)

$$I_1=\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial}{\partial s}a(s,u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)ds\le M_5\|u_{k-1}^h\|_V^2.$$

Была использована оценка (5). Для I_2, используя (4), получим

$$I_2\le 2\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_hf(t,u_{k-1}^h)dt\right\|_H\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H\le$$
$$\le\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|f(t,u_{k-1}^h)\|_H^2dt+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\le$$
$$\le\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2M_3^2\|u_{k-1}^h\|_V^2+2M_4^2)dt+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\le$$
$$C_1\|u_{k-1}^h\|_V^2+C_2+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2.$$

Оценим также снизу выражение

$$a(t_k,u_k^h-u_{k-1}^h,u_k^h-u_{k-1}^h)\ge\delta\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_V^2.$$

Из (10) получили оценку

$$\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}(\delta\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_V^2+$$
$$+a(t_k,u_k^h,u_k^h)-a(t_{k-1},u_{k-1}^h,u_{k-1}^h))\le C_1\|u_{k-1}^h\|_V^2+C_2.$$

Теперь умножим неравенство на τ и просуммируем по k от 1 до $m\le N$

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{m}(\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2\,\tau+\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_V^2)+\|u_m^h\|_V^2\le\\\le\{(C_1\|u_0^h\|_V^2+C_2\}+C_3\tau\sum_{k=1}^{m}\|u_k^h\|_V^2.\end{gathered}\tag{11}$$

Из (11) выделим суммарное неравенство для $\|u_m^h\|_V^2$:

$$\|u_m^h\|_V^2\le\{C_1\|u_0^h\|_V^2+C_2\}+C_3\tau\sum_{k=1}^{m}\|u_k^h\|_V^2,$$

которое приведет к оценке (8) для $\max\limits_{0\le k\le N}\|u_k^h\|_V^2$. Эту оценку подставим в правую часть (11) и получим оценку (8) в полном объеме.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1, и* $u(t)$ *— обобщенное решение задачи (3), а* u_k^h *— решение задачи (7). Тогда для* $z_k=u(t_k)-u_k^h$ *справедлива следующая оценка*

$$\begin{gathered}\max_{0\le k\le N}\|z_k\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}(\|z_k-z_{k-1}\|_H^2+\tau\|z_k\|_V^2)\le\\C\left\{\|z_0\|_H^2+\left(\sum_{k=1}^{N}\|(z_k-z_{k-1})\tau^{-1}\|_H^2\,\tau\right)^{1/2}\times\right.\\\times\left(\sum_{k=1}^{N}\|(I-Q_h)u(t_k)\|_H^2\,\tau\right)^{1/2}+\\+\sum_{k=1}^{N}\|(I-Q_h)u(t_k)\|_V^2\,\tau+\\+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt+\\\left.\tau^2\left(\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_V^2+\int_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\right)\right\},\end{gathered}\tag{12}$$

где Q_h *— ортопроектор пространства* V *на* V_h.

Доказательство. Интегрируем тождество (3) по t от t_k до $t_{k-1},k=\overline{1,N}$ и результат делим на τ.

$$\begin{gathered}\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}A(t)u(t)=\\=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(t,u(t))dt.\end{gathered}\tag{13}$$

Из (13) вычтем (7), и учитывая замену $z_k=u(t_k)-u_k^h$, получим

$$\begin{gathered}\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau}+\overline{P_h}A(t_k)z_k=\\=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\overline{P_h}A(t_k)u(t_k)-A(t)u(t))dt+\\+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(t,u(t))-\overline{P_h}f(t,u_{k-1}^h))dt.\end{gathered}\tag{14}$$

Умножим тождество (14) скалярно в H на $v_h\in V_h$.

$$\left(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},v_h\right)+(\overline{P_h}A(t_k)z_k,v_h)=$$
$$=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\overline{P_h}A(t_k)u(t_k)-A(t)u(t),v_h)dt+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(t,u(t))-P_hf(t,u_{k-1}^h),v_h)dt.$$

В полученном равенстве возьмём $v_h=Q_hz_k\in V_h$.

$$\left(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},z_k\right)+a(t_k,z_k,z_k)=$$
$$=\left(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},(I-Q_h)z_k\right)+a(t_k,z_k,(I-Q_h)z_k)+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[a(t_k,u(t_k),Q_hz_k)-a(t,u(t),Q_hz_k)]dt+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(t,u(t))-f(t,u_{k-1}^h),Q_hz_k)dt.$$

Учитывая, что $(I-Q_h)u_k^h=0$, получим

$$\left(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},z_k\right)+a(t_k,z_k,z_k)=$$
$$=(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},(I-Q_h)u(t_k))+$$
$$+a(t_k,z_k,(I-Q_h)u(t_k))+ \qquad (15)$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[a(t_k,u(t_k),Q_hz_k)-a(t,u(t),Q_hz_k)\right]dt+$$
$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(t,u(t))-f(t,u_{k-1}^h),Q_hz_k)dt.$$

Возьмем удвоенную вещественную часть от (15). Заметим, что

$$2\operatorname{Re}(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},z_k)=$$
$$=(\| z_k\|_H^2-\| z_{k-1}\|_H^2+\| z_k-z_{k-1}\|_H^2)\tau^{-1}.$$

Тогда с учетом оценки (1)

$$(\| z_k\|_H^2-\| z_{k-1}\|_H^2+\| z_k-z_{k-1}\|_H^2)\tau^{-1}+2\delta\| z_k\|_V^2\le$$
$$\le 2\operatorname{Re}(\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau},(I-Q_h)u(t_k))+$$
$$+2\operatorname{Re}a(t_k,z_k,(I-Q_h)u(t_k))+ \qquad (16)$$
$$+\tau^{-1}2\operatorname{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[a(t_k,u(t_k),Q_hz_k)-a(t,u(t),Q_hz_k)]dt+$$
$$+\tau^{-1}2\operatorname{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(t,u(t))-f(t,u_{k-1}^h),Q_hz_k)dt.$$

Оценим слагаемые I_i в правой части неравенства (16).

$$I_1\le 2\|(z_k-z_{k-1})\tau^{-1}\|_H\|(I-Q_h)u(t_k)\|_H\,. \qquad (17)$$

$$I_2\le\varepsilon_1\| z_k\|_V^2+\frac{M_1^2}{\varepsilon_1}\|(I-Q_h)u(t_k)\|_V^2\,. \qquad (18)$$

Третье слагаемое предварительно преобразуем.

$$I_3=\frac{2}{\tau}\operatorname{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[a(t_k,u(t_k),Q_hz_k)-a(t,u(t_k),Q_hz_k)]dt+$$
$$+\frac{2}{\tau}\operatorname{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}a(t_k,u(t_k)-u(t),Q_hz_k)dt=I_3^1+I_3^2.$$

При оценке I_3^1 используем условие (5).

$$I_3^1=\frac{2}{\tau}\operatorname{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\int_t^{t_k}\frac{\partial}{\partial s}a(s,u(t_k),Q_hz_k)ds\right\}dt\le$$
$$\le 2M_5\tau\| u(t_k)\|_V\| Q_hz_k\|_V\le \qquad (19)$$
$$\le\varepsilon_2\| z_k\|_V^2+\varepsilon_2^{-1}M_5^2\tau^2\| u(t_k)\|_V^2\,.$$

Переходим к следующему слагаемому

$$I_3^2=2M_1\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t_k)-u(t)\|_V\,dt\,\| Q_hz_k\|_V\le$$
$$\varepsilon_3\| z_k\|_V^2+\frac{M_1^2}{\varepsilon_3\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt. \qquad (20)$$

Оценим последнее слагаемое, применив (2),

$$I_4\le\varepsilon_4\| z_k\|_V^2+\frac{1}{\varepsilon_4\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| f(t,u(t))-f(t,u_{k-1}^h)\|_{V'}^2\,dt\le$$
$$\le\varepsilon_4\| z_k\|_V^2+\frac{M_2^2}{\varepsilon_4\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t)-u_{k-1}^h\|_H^2\,dt\le$$
$$\le\varepsilon_4\| z_k\|_V^2+\frac{2M_2^2}{\varepsilon_4\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t)-u(t_{k-1})\|_H^2\,dt+$$
$$+\frac{2M_2^2}{\varepsilon_4}\| z_{k-1}\|_H^2\le\varepsilon_4\| z_k\|_V^2+\frac{2M_2^2\tau}{\varepsilon_4}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u'(t)\|_H^2\,dt+$$
$$+\frac{2M_2^2}{\varepsilon_4}\| z_{k-1}\|_H^2\,. \qquad (21)$$

Возьмем $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\delta/4$, тогда из неравенства (16) с учетом замен (17), (18), (19), (20), (21) следует

$$(\| z_k\|_H^2-\| z_{k-1}\|_H^2+\| z_k-z_{k-1}\|_H^2)\tau^{-1}+\delta\| z_k\|_V^2\le$$
$$\le 2\|(z_k-z_{k-1})\tau^{-1}\|_H\|(I-Q_h)u(t_k)\|_H+$$
$$+C_1\|(I-Q_h)u(t_k)\|_V^2+C_2\tau^2\| u(t_k)\|_V^2+ \qquad (22)$$
$$+\frac{C_3}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt+$$
$$+C_4\tau\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u'(t)\|_H^2\,dt+C_5\| z_{k-1}\|_H^2\,.$$

Умножим (22) на τ и просуммируем по k от 1 до $m\le N$

$$\| z_m\|_H^2+\sum_{k=1}^m(\| z_k-z_{k-1}\|_H^2+\delta\tau\| z_k\|_V^2)\le\| z_0\|_H^2+$$
$$+2\left(\sum_{k=1}^m\|(z_k-z_{k-1})\tau^{-1}\|_H^2\,\tau\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^m\|(I-Q_h)u(t_k)\|_H^2\,\tau\right)^{1/2}+$$
$$+C_1\sum_{k=1}^m\|(I-Q_h)u(t_k)\|_V^2\,\tau+C_2\tau^2\max_{0\le t\le T}\| u(t)\|_V^2+ \qquad (23)$$
$$+C_3\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}\| u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt+$$
$$+C_4\tau^2\int_0^T\| u'(t)\|_H^2\,dt+C_5\tau\sum_{k=1}^m\| z_{k-1}\|_H^2\,.$$

Заметим, что

$$\tau\sum_{k=1}^m\| z_{k-1}^h\|_H^2=\tau\| z_0^h\|_H^2+\tau\sum_{k=1}^{m-1}\| z_k^h\|_H^2\le$$
$$\le T\| z_0^h\|_H^2+\tau\sum_{k=1}^m\| z_k^h\|_H^2\,. \qquad (24)$$

В (23), учитывая (24), выделим суммарное неравенство для $\| z_m\|_H^2$. Из него получим оценку (12) для $\max_{0\le k\le N} \| z_k \|_H^2$. Подставив ее в (23), получим оценку (12) в полном объёме.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Для* $z_k = u(t_k) - u_k^h$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^N \| (z_k - z_{k-1})\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le$$
$$\le C(\| u_0^h \|_V^2 + 1)^{1/2} + \left(\int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \ dt\right)^{1/2}. \quad (25)$$

Доказательство.

$$\left(\sum_{k=1}^N \| (z_k - z_{k-1})\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^N \| (u(t_k) - u(t_{k-1}))\tau^{-1} - (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le$$
$$\left(\sum_{k=1}^N \| (u(t_k) - u(t_{k-1}))\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^N \| (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (26)

$$\left(\sum_{k=1}^N \| (u(t_k) - u(t_{k-1}))\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^N \| \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)dt \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left(\int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \ dt\right)^{1/2}.$$

Оценим второе слагаемое в правой части (26). Из (8) следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^N \| (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le C(\| u_0^h \|_V^2 + 1)^{1/2}.$$

В результате получим оценку (25)

Замечание 1. В оценке (12) рассмотрим выражение:

$$\sum_{k=1}^N \| (I - Q_h)u(t_k) \|_V^2 \ \tau =$$
$$= \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| (I - Q_h)u(t_k) \|_V^2 \ dt \le$$
$$\le \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{2 \| u(t_k) - u(t) \|_V^2 +$$
$$+2 \| (I - Q_h)u(t) \|_V^2\}dt = \quad (27)$$
$$= 2\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u(t_k) - u(t) \|_V^2 \ dt +$$
$$+2\int_0^T \| (I - Q_h)u(t) \|_V^2 \ dt.$$

Лемма 2. *Пусть задача (3) удовлетворяет условиям теоремы 1, а* $u(t)$ *— обобщенное решение этой задачи. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u(t_k) - u(t) \|_V^2 \ dt \le$$
$$\le \tau M\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + 1\right). \quad (28)$$

Доказательство. Из работы [10] следует существование эволюционных операторов $U(t,s)(0 \le s \le t \le T)$ класса C_1, ограниченно действующих в пространствах V' и H. Решение задачи (3) запишем в виде

$$u(t) = U(t,0)u^0 + \int_0^t U(t,s)f(s,u(s))ds. \quad (29)$$

Учитывая (29), нетрудно получить тождество

$$u(t_k) - u(t) = U(t_k,0)u^0 + \int_0^{t_k} U(t_k,s)f(s,u(s))ds -$$
$$-U(t,0)u^0 + \int_0^t U(t,s)f(s,u(s))ds =$$
$$= \int_t^{t_k} U(t_k,s)f(s,u(s))ds + (U(t_k,t) - I)u(t).$$

Из работы [8] и условия (6) следует оценка

$$\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_V^2 + \int_0^T (\| u'(t) \|_H^2 + \| A(t)u(t) \|_H^2)dt \le$$
$$\le M\left\{\| u^0 \|_H^2 + \int_0^T \| f(t,u(t)) \|_H^2 \ dt\right\}, \quad (30)$$

которая справедлива на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset [0,T]$. Следовательно, из (30) на отрезке $[t, t_k]$ получим оценку

$$\| \int_t^{t_k} U(t_k,s)f(s,u(s))ds \|_V^2 \le C\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| f(t,u(t)) \|_H^2 dt.$$

Воспользуемся (4), тогда

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| f(t,u(t)) \|_H^2 \ dt \le \int_{t_{k-1}}^{t_k} (2M_3^2 \| u(t) \|_V^2 + 2M_4^2)dt.$$

Так как $u(t) \in D[A(t)]$ почти при всех $t \in [0,T]$ и вложение $E \subset V$ непрерывно [7], то $\| u(t) \|_V \le C_1 \| u(t) \|_E \le C_2 \| A(t)u(t) \|_H$. Поэтому

$$\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k,s)f(s,u(s))ds \|_V^2 \le$$
$$\le C_3\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + C_4\tau.$$

Теперь воспользуемся оценкой из [10] для $v \in H$.

$$\| [U(t_k,t) - I]A(t)^{-1}v \|_V \le C(t_k - t)^{1/2} \| v \|_H.$$

В таком случае, почти при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$ получим

$$\| [U(t_k,t) - I]u(t) \|_V^2 \le C^2\tau \| A(t)u(t) \|_H^2.$$

Из (4) теперь окончательно следует (28).

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u(t_k) - u(t) \|_V^2 \ dt \le$$
$$\le \tau c\int_0^T (\| f(t,u(t)) \|_H^2 + \| A(t)u(t) \|_H^2)dt \le$$
$$\le \tau\left(C_1\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 dt + C_2T\right) \le$$
$$\le \tau M(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 dt + 1).$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, $u(t)$ — обобщенное решение задачи (3), а u_k^h — решение задачи (7). Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\max_{0\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \| u(t_k) - u_k^h \|_V^2 \ \tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}) \right\|_H^2 \le$$
$$\le C\left\{\| u^0 - u_0^h \|_H^2 + \int_0^T \| (I-Q_h)u(t) \|_V^2 \ dt + \right.$$
$$+\left[(\| u_0^h \|_V^2 + 1)^{1/2} + \left(\int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \ dt\right)^{1/2}\right]\times \quad (31)$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{N} \| (I-Q_h)u(t_k) \|_H^2 \ \tau)^{1/2} + \right.$$
$$+\tau\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + 1\right) +$$
$$\left. + \tau^2\left(\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_V^2 + \int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \ dt\right)\right\}.$$

Доказательство следует из оценок (8), (12), (25), (27), (28).

Покажем эффективность оценки (31). Для этого предположим, что задана последовательность подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в V, т.е. $\| (Q_h - I)v \|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$.

Следствие 3. *Пусть $u(t)$ — обобщенное решение задачи (3), а u_k^h — решение задачи (7). Пусть $\{V_h\}$ — предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств при $h \to 0$. Пусть $\| u^0 - u_0^h \|_H \to 0$ при $h \to 0$, а последовательность $\| u_h^0 \|_V$ равномерно ограничена, например $u_0^h = Q_h u^0$. В таком случае при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ получим*

$$\max_{0\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \| u(t_k) - u_k^h \|_V^2 \ \tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right) \right\|_H^2 \to 0. \quad (32)$$

Доказательство. Эта сходимость следует из оценки (31) и из того, что

$$(\sum_{k=1}^{N} \| (I-Q_h)u(t_k) \|_H^2 \ \tau)^{1/2} \le$$
$$\le (\max_{0\le t\le T} \| (I-Q_h)u(t) \|_H^2 \ T)^{1/2} \le$$
$$\le C\max_{0\le t\le T} \| (I-Q_h)u(t) \|_V \to 0$$

при $h \to 0$, т.к. $u \in C([0,T],V)$.

Для получения скорости сходимости по пространству предполагается, что для подпространств V_h справедлива оценка

$$\| (I-Q_h)v \|_V \le r_1 h \| v \|_E \quad v \in E, \quad (33)$$

где константа $r_1 > 0$ не зависит от v и h. Условие (33) является типичным для подпространств V_h типа конечных элементов.

В [11] показано, что из (33) следует для всех $v \in V$ оценка

$$\| (Q_h - I)v \|_H \le r_2 h \| (Q_h - I)v \|_V, \quad (34)$$

из которой очевидно образом получается

$$\| (Q_h - I)v \|_H \le r_2 h \| v \|_V . \quad (35)$$

Используя оценку (33), получим

$$\int_0^T \| (I-Q_h)u(t) \|_V^2 \ dt \le Ch^2 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \ dt. \quad (36)$$

Замечание 2. Оценим выражение, используя (27), (28), (33) и (34).

$$\sum_{k=1}^{N} \| (I-Q_h)u(t_k) \|_H^2 \ \tau \le$$
$$\le Ch^2 \sum_{k=1}^{N} \| (I-Q_h)u(t_k) \|_V^2 \ \tau \le$$
$$\le C_1 h^2 \{\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \| u(t_k) - u(t) \|_V^2 \ dt +$$
$$+ \int_0^T \| (I-Q_h)u(t) \|_V^2 \ dt\} \le$$
$$\le C_2 h^2 \left\{\tau\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + 1\right) + \right.$$
$$\left. + h^2 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \ dt\right\} \le$$
$$\le C_3(h^4 + \tau^2)\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + 1\right) +$$
$$+ C_4 h^4 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 dt.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \| (I-Q_h)u(t_k) \|_H^2 \ \tau\right)^{1/2} \le$$
$$C_1(h^2 + \tau)\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \ dt + 1\right)^{1/2} + \quad (37)$$
$$+ C_2 h^2 \left(\int_0^T \| u(t) \|_E^2 \ dt\right)^{1/2}.$$

Следствие 4. *Пусть* $u(t)$ *— обобщенное решение задачи (3), а* u_k^h *— решение задачи (7). Пусть для подпространства* V_h *выполнено условие (33). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^N \| u(t_k) - u_k^h \|_V^2 \tau +$$
$$+\sum_{k=1}^N \| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \|_H^2 \le \tag{38}$$
$$\le C\{\| u^0 - u_0^h \|_H^2 + (\tau + h^2) \times$$
$$\times \left(1 + \| u_0^h \|_V^2 + \int_0^T \| u(t) \|_V^2 \, dt \right)\}.$$

Доказательство. Из оценок (31), (36) и (37) мы получаем

$$\max_{1\le k\le N} \| u(t_k) - u_k^h \|_H^2 + \sum_{k=1}^N \| u(t_k) - u_k^h \|_V^2 \tau +$$
$$+\sum_{k=1}^N \| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \|_H^2 \le$$
$$C\left\{ \| u^0 - u_0^h \|_H^2 + h^2 \int_0^T \| u(t) \|_E^2 \, dt + \right.$$
$$+\tau^2 (\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_V^2 + \int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \, dt) +$$
$$\tau (\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \, dt + 1) + \left[(\| u_0^h \|_V^2 + 1)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \left(\int_0^T \| u'(t) \|_H^2 \, dt \right)^{1/2} \right] \left[\tau \left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 \, dt + 1 \right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. \left. + h^2 \left(\left(\int_0^T \| A(t)u(t) \|_H^2 dt + 1 \right)^{1/2} + \left(\int_0^T \| u(t) \|_E^2 \, dt \right)^{1/2} \right) \right] \right\}. \tag{39}$$

Теперь непосредственно из (39), используя (4), (30), следует оценка (38).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смагин В. В.* О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа / В. В. Смагин, М. В. Тужикова // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2004. — № 1. — С. 153—156.

2. *Вайникко Г. М.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. ур-ния. — 1975. — Т.11, №7.— С.1269—1277.

3. *Смагин В. В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Труды математ. ф-та (новая серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — № 2. — С. 63—67.

4. *Смагин В. В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Математ. сборник. — 1997. — Т.188, №3.— С. 143—160.

5. *Смагин В. В.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейных параболических уравнений / В. В. Смагин, Д. С. Сотников // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2006. — № 1.— С. 193—198.

6. *Сотников Д. С.* Сходимость проекционно-разностного метода для квазилинейного параболического уравнения с гладкими исходными данными// Актуальные проблемы математики и информатики. ВГУ — 2008. — №4 — С.61—70.

7. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес // — М.: Мир, 1971. — 372 с.

8. *Смагин В. В.* Обобщенная разрешимость вариационных задач параболического типа // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 2001. — № 6. — С. 131—139.

9. *Смагин В. В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционно-разностного метода для абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Сибирский математический журнал. — 1996. — Т. 37, № 2. — С. 406—418.

10. *Fijie Y.* On some parabolic equations of evolutions in Hilbert space / Y. Fijie, H. Tanabe // Osaka J.Math. — 1973. — №10 — P.115—130.

11. *Смагин В. В.* Проекционно-разностные методы приближенного решения параболических уравнений с несимметричными операторами // Дифференц. ур-ния. — 2001. — Т.37, №1. — С. 115—123.

Сотников Денис Сергеевич — аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, тел. 89081329419, E-mail: dsotnikov@voronezh.gkm.ru

Sotnikov Denis Sergeevich — postgraduate student, department of functional analysis and operator equations, mathematical faculty, Voronezh State University, phone 89081329419, E-mail: dsotnikov@voronezh.gkm.ru